现代数学基础丛书 108

组合网络理论

徐俊明 著



内 容 简 介

本书系统介绍互连网络拓扑结构设计和分析中的基本组合理论和方法.内容包括网络与图论的基本概念，网络性能的基本度量；网络设计的基本原则和方法(如线图，Cayley 和笛卡儿方法)；某些著名的网络拓扑结构(如超立方体网络，de Brujin 网络，Kautz 网络，循环网络等)和它们的基本结构性质以及各种推广；容错网络分析中的基本度量参数(如路由转发指数、容错直径、宽直径、限制直径、距离控制数、限制连通度)的基本理论、研究进展和最新成果.

本书可作为高等学校和研究所计算机、网络通信和应用数学专业研究生的阅读，还可供从事理论计算机和互连网络的研究人员、工程技术人员和爱好者参考.

图书在版编目(CIP)数据

组合网络理论/徐俊明著.—北京：科学出版社，2007
(现代数学基础丛书；108)

ISBN 978-7-03-018834-2

I.组… II.徐… III.计算机网络-拓扑-研究 IV.TP393
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 049891 号

责任编辑：张 扬／责任校对：陈玉凤
责任印制：赵德静／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007 年 5 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2007 年 5 月第一次印刷 印张：22
印数：1—3 000 字数：408 000

定价：49.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了十余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

前言

大规模集成(VLSI)电路技术的出现使人们能建造出非常庞大而复杂的互连网络. 出于多方面的考虑, 下一代超级计算机系统将通过增加处理器的数目, 而不是单靠利用更快的处理器. 将来实现高速快捷的目的建造超级计算机系统最困难的技术问题将是连接这些处理器的互连网络的设计, 选择一个合适和理想的互连网络拓扑结构将变成一个迫切需要解决的问题. 在过去的十几年里, 研究工作者已经在这个方面做了许多工作. 该书旨在把更多读者的注意力吸引到这个重要的研究领域中来, 也为应用数学和理论计算机科学的研究工作者和研究生提供一个新的研究领域.

实践证明, 图论是设计和分析互连网络的最基本且强有力的数学工具, 因为互连网络的拓扑结构就是图. 这个事实已被计算机科学家和工程技术人员所接受并广泛应用. 该书旨在用图论的语言介绍有关互连网络拓扑结构设计和分析中最基本的问题、概念和已获得的基本结果. 所采用的材料虽然源于浩瀚的文献, 但展现在读者面前的材料是经过精心组织和安排的. 我们对材料的处理也是自我包含的, 大部分结果都给出了证明. 每章末都有少量习题, 有些习题是正文中重要结论, 但没有给出证明, 留给读者作为练习, 以加强和巩固读者对材料的理解. 书末附有名词和符号索引, 还有大量的参考文献, 供读者查阅.

作者于2001 年出版过《Topological Structure and Analysis of Interconnection Networks》(Kluwer Academic Publishers)[325]. 时隔五年, 各专题的研究都有了很大的发展. 国内许多同行也希望我将英文版改写成中文出版, 以满足国内读者的需求. 该书就是在英文版的基础上改写而成, 在内容和形式上都做了很大的充实和调整.

该书分为四部分, 由十六章组成. 第 1 章介绍图与互连网络拓扑结构的关系, 图的基本概念, 术语, 记号和对应的网络背景, 以及网络设计的基本原则; 回顾将在本书中用到的基本图论结果. 从第 2 章到第 5 章是第二部分, 介绍大规模互连网络设计的三个基本方法: 线图方法, Cayley 方法和笛卡儿乘积方法. 详细介绍由这三种方法构造出来的图的基本性质; 还将简单介绍 (d,k) 图问题. 从第 6 章到第 10 章为第三部分, 作为第二部分的三种方法应用, 介绍四类最著名的互连网络拓扑结构: 超立方体, de Brujin 网络, Kautz 网络和双环网络以及它们的基本性质. 在这一部分的最后一章, 还将简单地介绍某些熟知网络拓扑结构, 如: 网状网, 格网, 金字塔网, 立方连通圈, 蝶形网, Ω 网等等. 第四部分是本书的主要部分, 从第 11 章到第 16 章. 每章都将介绍容错网络分析中一个最基本的问题和研究结果, 它们涉及网络的路由选择, 限制容错分析, 并行系统中 Menger 型问题, 容错直径, 宽直径和 (l,w)

控制数. 读者很容易从中找到一些有进一步研究意义的问题.

对熟悉图论基本知识的读者来说, 阅读该书并不困难. 本书为试图从事互连网络结构设计和分析的读者, 计算机和应用数学专业的学生提供了一本入门教材, 对理论计算机科学工作者, 工程技术人员, 应用数学工作者和对互连网络有兴趣的其他读者也有一定的参考价值.

该书是在作者为中国科学技术大学图论与计算机科学专业研究生开设的课程《组合网络》讲义的基础上修改而成的. 作者感谢中国科学技术大学研究生院和数学系一贯的支持和鼓励. 作者感谢国家自然科学基金多次资助研究项目 “组合网络理论”, 也感谢科学出版基金和科学出版社对本书出版的资助和支持。

趁此机会, 我衷心感谢李乔教授的长期指导和帮助; 堵丁柱教授的鼓励并推荐原英文版的出版; 黄光明教授的宝贵建议; 许德标教授在他 1992 年访问中国科学技术大学期间引导作者进入这个研究领域. 感谢国内外许多同行的鼓励和帮助, 其姓名不一一列出, 但作者铭记在心.

我感谢书末参考文献中列出的所有作者, 正是他们的出色研究成果, 才形成这本书的内容. 感谢中国科学技术大学所有选修 “组合网络” 课程和参与组合网络研究课题的本科生、研究生, 正是他们的学习和研究热情, 才使我对这一领域的研究充满信心. 特别感谢博士研究生黄佳、徐敏、吕敏、马美杰、朱强、田方、杨超等在本书编写过程中给予的许多具体帮助; 特别是黄佳同学用 Latex 软件画出了本书的全部图.

最后, 感谢我的妻子邱景霞的支持和理解. 没有这些, 该书是不可能完成的.

徐俊明

(xujm@ustc.edu.cn)

2006 年 9 月于中国科大

目　录

第一部分　互连网络和图的基本概念

第 1 章　互连网络和图的基本概念 …… 3
§1.1　图和互连网络 …… 3
§1.2　图的基本概念和记号 …… 6
§1.3　树, 图的嵌入和平面图 …… 12
§1.4　网络传输延迟与图的直径, 路由选择 …… 16
§1.5　网络容错性和图的连通度 …… 23
§1.6　网络设计的基本原则 …… 27
习题 …… 29

第二部分　互连网络拓扑结构设计的基本方法

第 2 章　网络设计的线图方法 …… 33
§2.1　线图的概念和基本性质 …… 33
§2.2　线图的连通度与直径 …… 36
§2.3　线图的 Euler 性和 Hamilton 性 …… 37
§2.4　多重线图 …… 38
§2.5　无向线图的边连通度 …… 40
习题 …… 43
第 3 章　网络设计的 Cayley 方法 …… 44
§3.1　群的基本知识 …… 44
§3.2　可迁图 …… 46
§3.3　图的原子 …… 52
§3.4　可迁图的连通度和边连通度 …… 54
§3.5　Cayley 图 …… 57
§3.6　Cayley 图的可迁性 …… 60
§3.7　Cayley 图的原子与连通度 …… 63
§3.8　素阶点可迁图 …… 65
习题 …… 67

第 4 章 网络设计的笛卡儿乘积方法……68
§4.1 图的笛卡儿乘积……68
§4.2 笛卡儿乘积图的直径和连通度……72
§4.3 笛卡儿乘积图的其他性质……78
§4.4 Cayley 图的笛卡儿乘积……79
习题……82
第 5 章 优化设计中的一个基本问题……83
§5.1 (d, k)无向图问题……83
§5.2 (d, k)有向图问题……86
§5.3 直径与连通度之间的关系……89
习题……92

第三部分 著名的互连网络拓扑结构

第 6 章 超立方体网络……95
§6.1 超立方体网络的定义和基本性质……95
§6.2 Gray 码与超立方体中的圈和路长……98
§6.3 超立方体网络的子网嵌入问题……102
§6.4 超立方体网络的推广……104
§6.5 超立方体网络的变形……106
习题……110
第 7 章 De Brujin 网络……112
§7.1 De Brujin 网络的定义和基本性质……112
§7.2 De Brujin 网络中最短路的唯一性……116
§7.3 广义 de Brujin 网络……120
习题……126
第 8 章 Kautz 网络……127
§8.1 Kautz 网络的定义和基本性质……127
§8.2 广义 Kautz 网络……130
§8.3 广义 Kautz 网络的连通度……132
习题……135
第 9 章 双环网络……136
§9.1 双环网络……136
§9.2 平面 L 形瓦……137
§9.3 双环网络的直径……141

§9.4 双环网络的最优设计 ……146
§9.5 循环网络的基本性质 ……150
习题 ……155
第 10 章 其他网络拓扑结构 ……157
§10.1 网状网与格网 ……157
§10.2 金字塔网 ……158
§10.3 立方连通圈网 ……160
§10.4 蝶形网 ……162
§10.5 Beneš 网 ……166
§10.6 Ω网 ……168
§10.7 移位交换网 ……169
习题 ……170

第四部分 互连网络拓扑结构分析

第 11 章 互连网络中的路由选择 ……173
§11.1 路由选择的转发指数 ……173
§11.2 路由选择的边转发指数 ……181
§11.3 某些著名网络的转发指数 ……186
§11.4 容错路由选择的传输延迟 ……190
§11.5 幸存路径图直径的某些上界 ……192
习题 ……196
第 12 章 互连网络的容错直径 ……198
§12.1 交错图的直径 ……198
§12.2 互连网络的边容错直径 ……203
§12.3 容错直径与变更图直径之间的关系 ……209
§12.4 互连网络的点容错直径 ……211
§12.5 某些网络的点容错直径 ……216
习题 ……220
第 13 章 并行系统中 Menger 型问题 ……221
§13.1 点不交限长路问题 ……221
§13.2 Menger 数与有界连通度 ……227
§13.3 边不交限长路问题 ……231
§13.4 点不交超长路问题 ……234
§13.5 网络的 Rabin 数 ……236

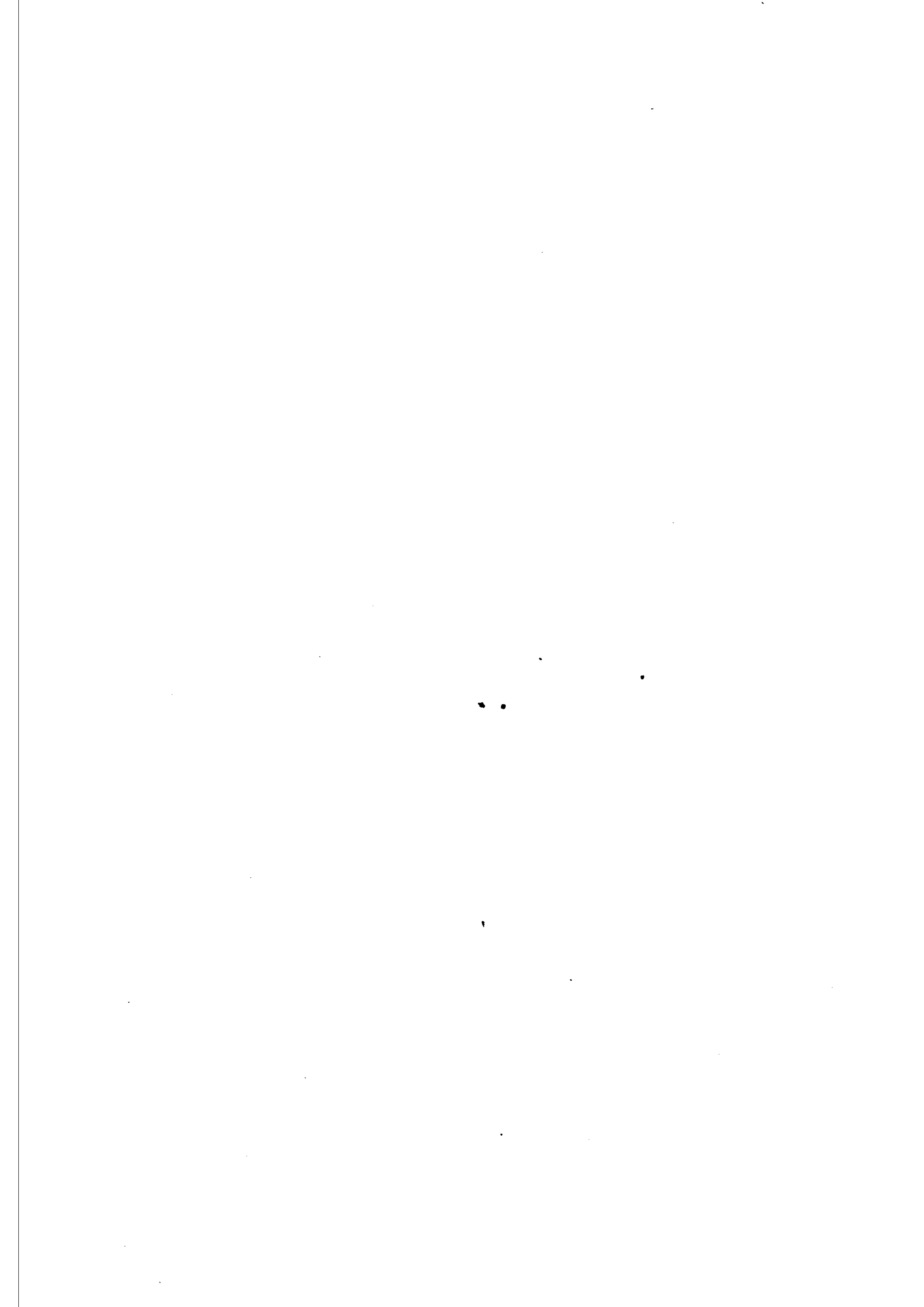
习题 …… 239
第 14 章　互连网络的宽直径 …… 240
§14.1　网络的宽直径 …… 240
§14.2　正则图的宽直径 …… 243
§14.3　笛卡儿乘积的宽直径 …… 245
§14.4　宽直径与独立数 …… 249
§14.5　宽直径与容错直径 …… 252
§14.6　某些网络的宽直径 …… 255
习题 …… 258
第 15 章　(ℓ,w)独立数与(ℓ,w)控制数 …… 259
§15.1　(ℓ,w)独立数 …… 259
§15.2　(ℓ,w)控制数 …… 262
§15.3　距离独立数与距离控制数 …… 265
习题 …… 269
第 16 章　互连网络的限制容错分析 …… 270
§16.1　网络的限制连通度 …… 270
§16.2　网络的限制边连通度 …… 272
§16.3　可迁图的限制边连通度 …… 279
§16.4　网络的超连通性和超连通度 …… 282
§16.5　线图的超连通性和超连通度 …… 288
§16.6　网络的高阶超连通度 …… 290
§16.7　某些网络的限制连通度和超连通度 …… 298
习题 …… 300
参考文献 …… 301
记号索引 …… 318
名词索引 …… 325

*　*　*

《现代数学基础丛书》已出版书目 …… 334

第一部分

互连网络和图的基本概念



第 1 章　互连网络和图的基本概念

用图来表示互连网络拓扑结构这一事实已被计算机科学工作者和工程技术人员广泛接受和运用. 而且, 在实践上已被证明, 图论是设计和分析互连网络拓扑结构的一个非常有用的数学工具 (可参见文献 [204]).

在这一章, 我们将简单地回顾一下本书将用到的图论概念和它们相应的网络背景. 虽然任何一本标准的图论教科书中都包含图论概念, 但这些概念因不同的作者会有不同的描述. 为了避免概念和记号的混淆, 有必要将这些概念和记号重新叙述一下. 某些基本的图论结果只作叙述, 不再证明. 读者可参见任何一本标准的图论教材. 例如, 文献 [40] 或者文献 [318].

§1.1　图和互连网络

本书所说的图 (graph) G 是有序的二元组 $(V(G),E(G))$, 其中 $V(G)$ 是 G 的顶点集 (vertex-set), $V(G)$ 中元素称为 G 的顶点或者点 (vertices); $E(G)\subseteq V(G)\times V(G)$ 称为 G 的边集 (edge-set), $E(G)$ 中元素称为 G 的边 (edges). 边中的一对顶点称为该边的端点 (end-vertices). 一条边的两端点也可能是相同的, 这样的边称为环 (loop). $v(G)=|V(G)|$ 是图 G 中的顶点数目, 也称为 G 的阶 (order). $\varepsilon(G)=|E(G)|$ 是 G 的边数. 若 $v(G)=1$, 则称 G 是平凡图 (trivial graph), 其余的图称为非平凡图 (non-trivial graph). 若 $\varepsilon(G)=0$, 则称 G 是空图 (empty graph). 若 $v(G)$ 和 $\varepsilon(G)$ 都是有限的, 则称 G 为有限图 (finite graph).

若 $V(G)\times V(G)$ 是有序顶点对集, 则称图 G 为有向图 (digraph). 有向图的边 $e=(x,y)$ 称为有向边 (directed edge), 分别称为顶点 x 和 y 为 e 的起点 (head) 和终点 (tail); 也称 e 为顶点 x 的出边 (out-going edge), 或者顶点 y 的入边 (incoming edge). 若 $V(G)\times V(G)$ 是无序顶点对集, 则称图 G 为无向图 (undirected graph). 为方便起见, 通常用 xy 或者 yx 表示无序顶点对 $\{x,y\}$. 无向图的边有时叫无向边 (undirected edges).

如果将无向图的边看成是两条方向相反的两条有向边 (这样的两条有向边称为对称边 (symmetric edges)), 那么, 无向图就可以看成特殊的有向图, 即对称有向图 (symmetric digraph). 因此, 研究有向图的结构比无向图更具有一般性. 有向图被称为是反对称的 (asymmetric), 如果它不含对称边. 两点是相邻的 (adjacent), 如果它们之间有边相连; 两边称为相邻的, 如果它们有一个公共顶点.

在本书中, 如果没有特别声明, 字母 G 总表示非空非平凡有限图.

两个图 G 和 H 称为是同构的 (isomorphic), 记为 $G\cong H$, 如果存在双射 θ :

$V(G) \to V(H)$ 满足相邻性条件:

$$(x,y) \in E(G) \Leftrightarrow (\theta(x),\theta(y)) \in E(H).$$

这样的双射 θ 称为图 G 与 H 之间的同构 (isomorphism). 在同构的意义下, n 阶完全图 (complete graph) 和完全 2 部分图 (complete bipartite graph) 是唯一的, 分别用 K_n 和 $K_{m,n}$ 表示. 习惯上, 称 $K_{1,n}$ 为星 (star).

按照 Hayes[147] 的定义, 一个系统 (system) 可以定义为对象或者元件族, 它们被相互连接形成一个具有确定功能或者目的的整体. 系统所能实现的功能是由系统中元件所具有的功能和元件的互连方式来决定的.

计算机系统, 多处理系统, 计算机网络, 电路系统, 通讯系统, 流水生产线, 管道系统, 交通运输系统等等都是一些最常见的例子.

对于计算机系统, 它的元件可以包括处理器, 控制单元, 储存单元和输入输出 (I/O) 设备 (或许包括开关), 它的功能是将输入的信息 (如, 程序和它的数据) 转换成输出信息 (如, 由数据通过程序计算的结果).

具有多个相互独立的处理器系统称为多处理系统 (multiple processor system, MPS). 因此, 一个多处理系统可以被认为是包含两个或者两个以上处理器集成的计算机. 定语"集成"意味着在执行程序过程中处理器之间的相互合作. 由成千上万个处理器组成的多处理系统亦称为超级处理系统, 它具有运行并行算法的能力以解决超大规模的实际问题.

按照 Saad 和 Schultz[273] 的定义, 本质上存在两大类多处理系统. 第一类是它有 n 个相同的处理器和 n 个存储器, 通过一个大型的开关网络将它们互连起来. 连接模式的变化是多种多样的, 但引起变化的本质特征是开关网络. 这种类型的结构的主要优点是使得数据的存取对用户是透明的, 用户可以认为数据被存储在一个大存储器中, 而且任何处理器都可以容易地存取. 然而, 这种分享存储型结构不利于充分利用问题中某些固有的性质. 例如, 当利用迭代法求解问题时, 需要利用数据的相邻性, 数据的传递只需局部通信. 而且, 在这种结构中, 开关网络会随着处理器数目的增加而变得异常复杂.

第二类多处理系统是它的每个处理器都有自己的局部存储器, 按照某种方便的模式将这些处理器相互连接起来. 在这种类型的机器中, 不需分享存储, 也不必整体同步. 而且, 相互之间的通信是由数据传递来实现的, 计算是由数据来驱动的. 这种结构常称为整体结构, 它的主要优点是使设计简单化. 处理器是一样的, 或者只有微小的差别, 所以它可以用相当低的费用制造出来.

多处理系统两种不同的网络结构如图 1.1 所示.

系统的基本特征是它的元件之间要通过物理连线按照某个模式相互连接在一起以传输信息. 毫无疑问, 系统功能的实现在很大程度上依赖于元件之间的连接模式.

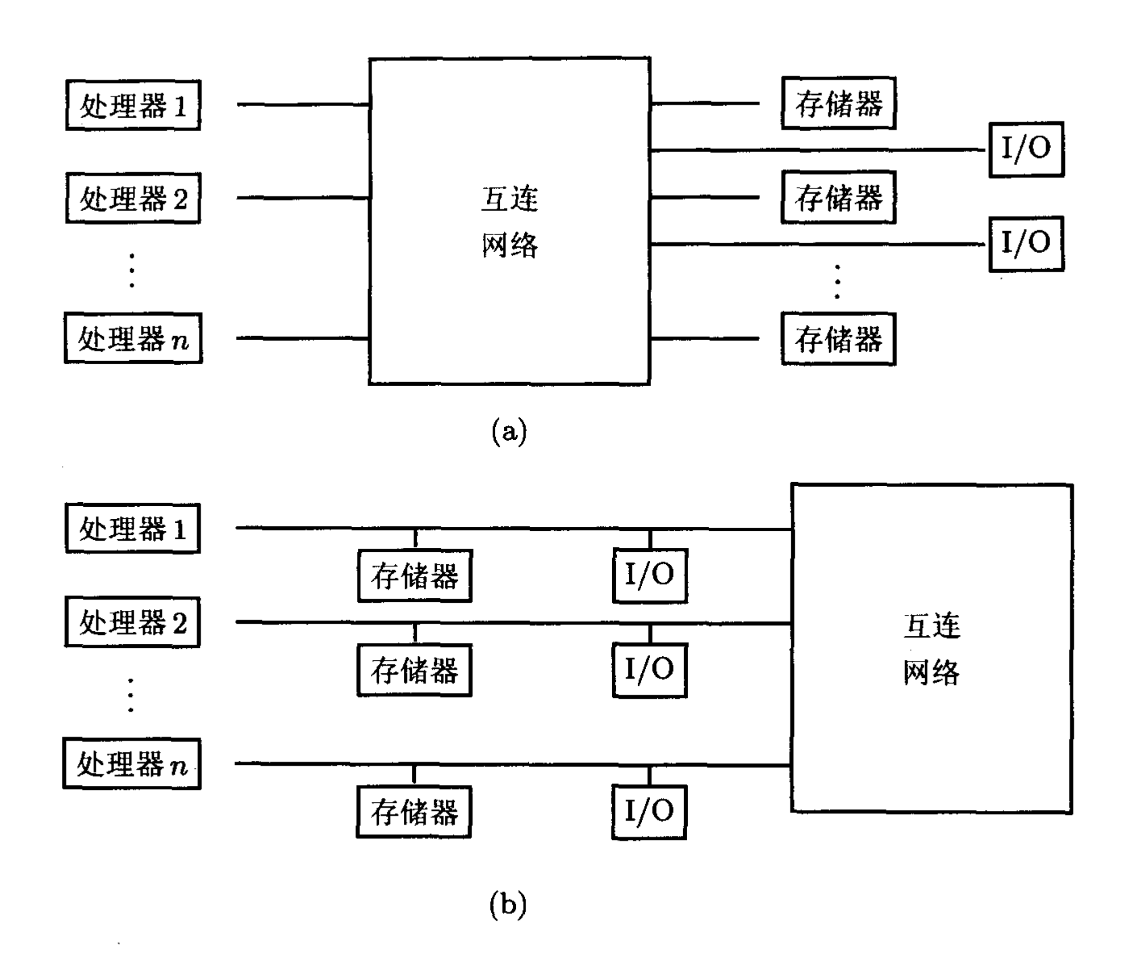


图 1.1 两种类型的多处理系统

系统中元件之间的连接模式称为该系统的互连网络 (interconnection network), 或者简称为网络 (network). 拓扑上讲, 一个系统的互连网络本质上刻画了该系统的结构特征. 换句话说, 系统的互连网络逻辑上指定了该系统中所有元件之间的连接方式.

显然, 互连网络可以用图来表示. 图的顶点表示系统中的元件, 图的边表示元件之间的物理连线, 其中有向边表示单向通信连线, 无向边表示双向通信连线, 而关联函数指定了元件之间的连接方式. 这样的图称为**互连网络拓扑结构** (topological structure), 或者简称**网络拓扑** (network topology). 例如, 以 K_n 为拓扑结构的互连网络称为**全连通网络** (fully connected network). 2 部分图常常用来表示第一类 MPS 结构中的纵横开关 (cross-bar switches) 的拓扑结构. 例如, 图 1.2 中所示的图是 3×3 纵横开关和它的拓扑结构 $K_{3,3}$.

反之, 图也可以看成是某个互连网络的拓扑结构. 从拓扑上讲, 图和互连网络是一回事. 因此, 在以后的叙述中, 我们将混淆“图”和“互连网络”. 将网络、元件和连线说成是图、顶点和边, 反之亦然. 图是有向的还是无向的, 根据通信连线是

单向的还是双向的决定.

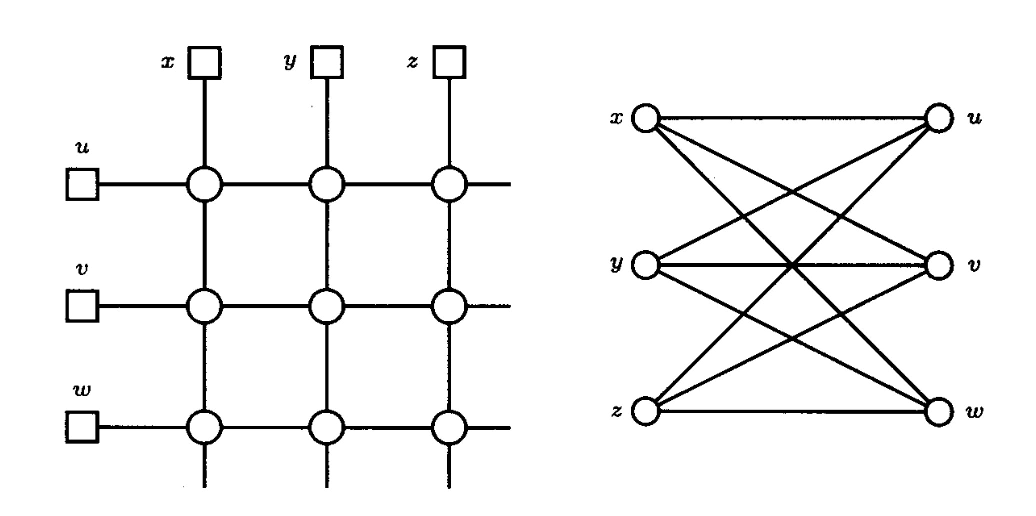


图 1.2 3×3 纵横开关和它的拓扑结构

网络拓扑通常能划分成两个范畴: 动态的和静态的. 在动态系统中, 比如, 上面提到的第一类多处理系统, 网络结构随开关元件的类型而变化. 在静态系统中, 比如, 上面提到的第二类多处理系统, 处理器之间的连接是被动的, 系统的重构是不可能的, 因此网络结构是固定的. 在本书中, 我们的主要兴趣是静态的网络拓扑结构.

§1.2 图的基本概念和记号

这一节回顾将在本书用到的某些基本图论术语, 记号和结论, 包括子图, 顶点度, 路, 圈, 连通图, Euler 回, Hamilton 圈, 邻接矩阵, 匹配, 独立数和控制数等等.

子图是基本的图论概念. 首先回顾由图的运算得到的各种各样的子图.

图 H 称为 G 的**子图** (subgraph), 记为 $H \subseteq G$, 如果 $V(H) \subseteq V(G)$ 且 $E(H) \subseteq E(G)$. G 的子图 H 称为**支撑子图** (spanning subgraph), 如果 $V(H) = V(G)$.

设 S 是 $V(G)$ 的非空子集. G 中由 S **导出子图** (induced subgraph) 记为 $G[S]$, 它的顶点集为 S, 边集为 G 中其两端点都在 S 中的所有边. 记号 $G-S$ 表示导出子图 $G[V \setminus S]$.

设 B 是 $E(G)$ 中的非空子集. G 中由 B **导出的子图** (edge-induced subgraph), 记为 $G[B]$, 它的顶点集为 B 中边的端点集, 它的边集为 B.

$G-B$ 表示 G 的支撑子图 $G[E \setminus B]$. 同样地, $G+F$ 表示在 G 中添加边集 F 后得到的图.

子图被用来表示子网络. 如果 G 是互连网络的拓扑结构, 那么, $G+F$ 表示为

了改进网络的性能而添加连线集 F 而得到的网络; $G-S$ 和 $G-B$ 分别表示网络包含一个故障点集 S 和故障连线集 B.

本质上讲, 互连网络应该包含某些给定类型的子网络. 这是因为计算系统的功能是执行某些算法.

按照 Hayes[146] 的说法, 算法也可以用图 G 来表示. G 的顶点表示执行该算法所要求的设备, G 的边表示这些设备之间的连线. 这样的图 G 叫做该算法的通信模式 (communication pattern). 因此, 算法能在计算机系统 G 中执行当且仅当该算法的通信模式同构于 G 的子图.

设 G_1 和 G_2 是 G 的两个子图. G_1 和 G_2 是**不交的** (disjoint), 如果它们没有公共的顶点; G_1 和 G_2 是**边不交的** (edge-disjoint), 如果它们没有公共的边. G_1 和 G_2 的**并** (union), 记为 $G_1 \cup G_2$, 是 G 的子图, 它的顶点集为 $V(G_1) \cup V(G_2)$, 且边集为 $E(G_1) \cup E(G_2)$. 如果 G_1 和 G_2 是不交的, 有时记 $G_1 \cup G_2$ 为 $G_1 + G_2$. 如果 $V(G_1) \cap V(G_2)$ 是非空, 同样地可以定义 G_1 和 G_2 的**交** (intersection), 记为 $G_1 \cap G_2$.

两个图 G_1 和 G_2 的**联** (join), 记为 $G_1 \vee G_2$, 它是由在 $G_1 + G_2$ 中添加连接 G_1 中每个顶点到 G_2 中每个顶点的边而得到.

边的细分 (subdivision) 是指在该边中添加一个新顶点而成为两条边. 由图 G 通过一系列边的细分而得到的图称为 G 的**细分图**.

设 G 是无向图, $x \in V(G)$. $E_G(x)$ 表示 G 中与 x 关联的边集. $d_G(x) = |E_G(x)|$ 称为 x 的顶点度, 简称为**度** (degree), 度为 d 的顶点称为 **d 度点** (d-degree vertex), 0 度点称为**孤立点** (isolated vertex). G 称为 **d 正则的** (d-regular), 如果 G 中每个顶点都是 d 度点.

$$\Delta(G) = \max\{d_G(x):\ x \in V(G)\} \quad 和$$

$$\delta(G) = \min\{d_G(x):\ x \in V(G)\}$$

分别称为 G 的**最大度** (maximum degree) 和**最小度** (minimum degree). $xy \in E(G)$,

$$\xi_G(xy) = d_G(x) + d_G(y) - 2$$

称为边 xy 的**度** (degree of an edge),

$$\xi(G) = \min\{\xi_G(xy);\ xy \in E(G)\}$$

称为 G 的**最小边度** (minimum edge-degree). 显然,

$$\xi(G) \leqslant \Delta(G) + \delta(G) - 2.$$

G 称为是**边正则的** (edge-regular), 如果 G 中每条边 e 都有 $\xi(e) = \xi(G)$. 显然, 正则图一定是边正则的, 反之不成立. 如, $K_{m,n}$, $m \neq n$ 是边正则的, 但不是正则的.

有向图也有类似的术语和记号. 设 G 是有向图, $x \in V(G)$. $E_G^+(x)$ 表示 G 中以 x 为起点的边集, $d_G^+(x) = |E_G^+(x)|$ 称为 x 的出度 (out-degree). 同样地, $E_G^-(x)$ 表示 G 以 x 为终点的边集, $d_G^-(x) = |E_G^-(x)|$ 称为 x 的入度 (in-degree). 顶点 x 称为平衡的 (balanced edge), 如果 $d_G^+(x) = d_G^-(x)$; G 称为平衡的 (balanced digraph), 如果它的每个顶点都是平衡点.

$$\Delta^+(G) = \max\{d_G^+(x) :\ x \in V(G)\} \quad 和$$

$$\Delta^-(G) = \max\{d_G^-(x) :\ x \in V(G)\}$$

分别称为 G 的最大出度 (maximum out-degree) 和最大入度 (maximum in-degree).

$$\delta^+(G) = \min\{d_G^+(x) :\ x \in V(G)\} \quad 和$$

$$\delta^-(G) = \min\{d_G^-(x) :\ x \in V(G)\}$$

分别称为 G 的最小出度 (minimum out-degree) 和最小入度 (minimum in-degree).

$$\Delta(G) = \max\{\Delta^+(G),\ \Delta^-(G)\} \quad 和$$

$$\delta(G) = \min\{\delta^+(G),\ \delta^-(G)\}$$

称为 G 的最大度 (maximum degree) 和最小度 (minimum degree). 有向图 G 是 d 正则的 (d-regular), 如果 $\Delta(G) = \delta(G) = d$.

当图 G 表示互连网络时, 顶点 x 的入度 $d_G^-(x)$ 和出度 $d_G^+(x)$ 分别表示该网络中元件 x 的输入和输出接口数; 它是该元件中 I/O 设备的最大数.

图的顶点度, 阶数和边数之间有下列关系, 该定理的证明参见 [318] 中定理 1.1 及其推论.

定理 1.2.1 设 G 是任意的图, $V = V(G)$.

(a) 如果 G 是有向图, 那么

$$\varepsilon(G) = \sum_{x \in V} d_G^+(x) = \sum_{x \in V} d_G^-(x).$$

(b) 如果 G 是无向图, 那么

$$2\,\varepsilon(G) = \sum_{x \in V} d_G(x),$$

并且奇度点的数目是偶数. ∎

设 S 和 T 是有向图 G 的不交非空顶点子集. $E_G(S,T)$ 表示 G 中其起点在 S 而终点在 T 中的边集. 如果 $T = \overline{S} = V(G) \setminus S$, 那么记 $E_G^+(S)$ 替代 $E_G(S,\overline{S})$, 并记 $d_G^+(S) = |E_G^+(S)|$. $N_G^+(S)$ 表示 $E_G^+(S)$ 中边的终点集, 称为 S 的外邻点集 (out-neighbors). 同样地, 不难理解记号 $E_G^-(S)$, $d_G^-(S)$ 和 $N_G^-(S)$ 以及无向图 G 的 $E_G(S)$, $d_G(S)$ 和 $N_G(S)$ 的含义, 不再一一赘述.

利用这些记号, 我们叙述一个简单而非常有用的结论.

定理 1.2.2 设 x 和 y 是图 G 的两个顶点子集.

(a) 如果 G 是有向图, 那么

$$d_G^+(X\cap Y)+d_G^+(X\cup Y)\leqslant d_G^+(X)+d_G^+(Y);$$

$$d_G^-(X\cap Y)+d_G^-(X\cup Y)\leqslant d_G^-(X)+d_G^-(Y).$$

(b) 如果 G 是无向图, 那么

$$d_G(X\cap Y)+d_G(X\cup Y)\leqslant d_G(X)+d_G(Y).$$

(c) 如果 G 是平衡有向图, 那么 $d_G^+(X)=d_G^-(X)$.

证明 不等式 (a) 和 (b) 的证明留给读者, 下面证明等式 (c). 令 $H=G[X]$. 因为 G 是平衡图, 所以对任何 $x\in V(G)$, 均有 $d_G^+(x)=d_G^-(x)$. 因此, 由定理 1.2.1 (a), 得

$$\begin{aligned}d_G^+(X)=|E_G^+(X)|&=\sum_{x\in X}d_G^+(x)-\sum_{x\in X}d_H^+(x)\\&=\sum_{x\in X}d_G^-(x)-\sum_{x\in X}d_H^-(x)=|E_G^-(X)|=d_G^-(X).\end{aligned}$$

结论得证. ∎

设 x 和 y 是图 G 的两个顶点. G 中长为 k 的 *xy 链* (walk 或者 chain) 是顶点 $W=(x_0,x_1,\cdots,x_k)$. 边 $e_1,e_2,\cdots,e_k$ 都不同的链称为*迹* (trail), 点不同的迹称为*路* (path). 在连接两顶点 x 和 y 之间的所有路中, 长度最短的路称为*最短 xy 路* (shortest path). G 中一条路 P 称为*无弦路* (chordless path), 如果在 P 中任何不相邻的两顶点在 G 中也不相邻. 因为最短路中任何不相邻两顶点在 G 中不相邻, 所以最短路是无弦路.

起点和终点相同的链, 迹和路分别称为*闭链* (closed walk), *回* (circuit) 和*圈* (cycle). 长为奇数的圈称为*奇圈* (odd cycle), 长为偶数的圈称为*偶圈* (even cycle). 长为 k 圈称为 *k 圈* (k-cycle), 3 圈称为*三角形* (triangle). 显然, 任何 xy 链必含 xy 路, 任何闭链必含回, 任何回必含圈. G 中最短圈长称为*围长*, 记为 $g(G)$ (girth).

定理 1.2.3 设 G 是围长为 g ($\geqslant 3$) 的 d 正则无向图. 则 $v(G)\geqslant h(d,g)$, 其中

$$h(d,t)=\begin{cases}1+d+d(d-1)+\cdots+d(d-1)^{\frac12(g-3)}, & \text{如果 } g \text{ 是奇的;}\\ 2\left(1+(d-1)+\cdots+(d-1)^{\frac12(g-2)}\right), & \text{如果 } g \text{ 是偶的.}\end{cases}$$

证明 首先考虑 G 是奇数的情形. 设 $g=2k+1$, $k\geqslant 1$, 并设 x 是 d 正则无向图 G 中任意顶点. 令

$$J_i(x)=\{y\in V(G):\ G\text{中存在长为 }i\text{的最短 }xy\text{路}\},\ 0\leqslant i\leqslant k.$$

显然, $|J_0(x)| = 1$, $|J_1(x)| = d$. 因为 G 中最小圈长为 $g = 2k+1$, 所以对任何 $y \in J_i(x)\,(2 \leqslant i \leqslant k)$, G 存在唯一的长为 i 的 (x,y) 路, 而且对任何 $i = 1, 2, \cdots, k-1$, $J_i(x)$ 中两顶点在 G 中不相邻. 这意味着

$$|J_i(x)| = d(d-1)^{i-1}, \quad i = 1, 2 \cdots, k.$$

于是,

$$\begin{aligned} v(G) \quad &\geqslant |J_0(x)| + |J_1(x)| + \cdots + |J_k(x)| \\ &= 1 + d + d(d-1) + \cdots + d(d-1)^{k-1} \\ &= 1 + d + d(d-1) + \cdots + d(d-1)^{\frac{3}{2}(g-1)}. \end{aligned}$$

对于 g 是偶数的情形, 考虑 G 中两个相邻的顶点 x 和 y, 利用上述一样的讨论就可以得到结论. 详细的证明留给读者. ∎

注意到在链的定义中, 无论 G 是无向图还是有向图, 没有强调边的方向. 在有向图中, xy 链 $W = (x_0(=x), x_1, \cdots, x_k(=y))$ 称为**有向 xy 链** (directed xy-walk), 记为 (x,y) 链, 如果对每个 $i = 1, 2, \cdots, k$, (x_{i-1}, x_i) 是 W 的边, 即 W 中所有边的方向与链 W 从 x 到 y 的方向是一致的. 类似地定义**有向迹** (directed trail), **有向路** (directed path), **有向回** (directed circuit) 和**有向圈** (directed cycle).

本书有时用"路"(或者"圈") 表示图或者子图, 用 P_n 和 C_n 分别表示 n 阶路和圈.

路是**总线网络** (bus network) 或者**线形阵列网络** (linear array network) 的拓扑结构. 无向圈是**环网** (loop network) 的拓扑结构; 有向圈是**单环网** (simple loop network) 的拓扑结构. 环网和单环网络是最通用的, 最简单的, 而且是最有用的互连网络之一.

图 G 称为 **k 泛圈的** (k-pancyclic), 如果它包含从 k 到 $v(G)$ 的每个长度的圈. 图 G 称为**点 k 泛圈的** (vertex-k-pancyclic) (**边 k 泛圈的** (edge-k-pancyclic)), 如果它的每个点 (每条边) 包含在从 k 到 $v(G)$ 的每个长度的圈中. 显然, 如果 G 是边 k 泛圈的, 那么 G 一定是点 k 泛圈的, 因而是 k 泛圈的.

现在叙述一个通过圈或者回的奇偶性来判断图是否是 2 部分图的准则, 其证明参见徐俊明 [318] 中定理 1.4 及其推论.

定理 1.2.4 图 G 是 2 部分图当且仅当 G 不含奇圈 (或者回). ∎

设 x 和 y 是 G 中两顶点, 如果 G 中存在 xy 路, 那么称 x 和 y 在 G 中是**连通的** (connected). 显然, 关系"是连通的"是 $V(G)$ 上的等价关系. 因此, $V(G)$ 存在等价划分 $\{V_1, \cdots, V_\omega\}$. 子图 $G[V_i]$ 称为 G 的**连通分支** (connected component). 若 $\omega = 1$, 则称 G 是**连通的** (connected); 否则, 称 G 是**非连通的** (disconnected).

同样地, 对于有向图 G 中两顶点 xy, 如果 G 中既存在 (x,y) 路, 又存在 (y,x) 路, 那么称 x 和 y 为**强连通的** (strongly connected). 有向图 G 称为**强连通的** (strongly

connected), 如果 G 中每对顶点都是强连通的.

连通性概念对有向图和无向图都是一样的. 对有向图 G, 强连通的必是连通的, 反之不一定成立. 然而, 从定理 1.2.2 (c) 容易导出下列结果.

定理 1.2.5 平衡有向图是强连通的当且仅当它是连通的. ▮

包含 G 中每条边和每个顶点的回称为 Euler 回 (Euler circuit). G 称为 Euler 图 (eulerian graph), 如果它含 Euler 回. 下面叙述一个 Euler 图的判断准则, 其证明参见文献 [318] 中定理 1.5 及其推论.

定理 1.2.6 有向图是 Euler 图当且仅当它是连通平衡图; 无向图是 Euler 图当且仅当它是连通的且不含奇度点. ▮

包含 G 中每个顶点的路称为 Hamilton 路 (Hamilton path); 包含 G 中每个顶点的圈称为 Hamilton 圈 (Hamilton cycle). G 称为 Hamilton 图 (Hamilton graph), 如果它包含 Hamilton 圈. 目前, 还没有找到 Hamilton 图的充分必要条件. 事实上, 这是图论中最困难的问题之一.

无向完全图 K_1 和无向圈 C_{n-1} 的联 $K_1 \vee C_{n-1}$ 称为轮 (wheel), 记为 W_n. K_1 中的顶点称为轮心 (center), 或者轮毂 (hub), 与轮心关联的边叫轮辐 (spokes).

设 G 是图, 它的顶点集 $V(G) = \{x_1, x_2, \cdots, x_v\}$. G 可以用它的邻接矩阵来表示. G 的邻接矩阵 (adjacency matrix) 是 v 阶方阵, 记为 $A(G) = (a_{ij})$, 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } (x_i, x_j) \in E(G); \\ 0, & \text{如果 } (x_i, x_j) \notin E(G). \end{cases}$$

显然, 简单图的邻接矩阵是主对角线元素全为 0 的 $(0,1)$ 矩阵, 无向图的邻接矩阵是对称的, 而有向图的邻接矩阵不一定是对称的.

图的邻接矩阵是图的另一种表示, 图正是以这种形式存储于计算机中. 它有利于人们借助计算机来获得或者解决有关图论问题, 也有利于我们借助代数方法来研究图论.

显然, 同构的图的邻接矩阵是置换相似的. 换句话说, 如果 A 和 B 分别是同构的两个图 G 和 H 的邻接矩阵, 那么存在置换矩阵 P 使得 $A = P^{-1}BP$. 正是这个性质, 能使人们方便地利用相似矩阵的不变量, 如特征值, 特征向量等, 来研究图. 如果图 G 是 d 正则的, 那么 d 是 G 的特征值.

关于图的邻接矩阵, 有下列重要结论, 其证明参见文献 [318] 中定理 1.9.

定理 1.2.7 设图 G 的顶点集为 $V(G) = \{x_1, x_2, \cdots, x_v\}$, A 是 G 的邻接矩阵. 那么, A^k 中 (i,j) 元素是 G 中长为 k 的 (x_i, x_j) 链的数目. ▮

现在回顾一下图 G 的独立数和控制数的概念. $V(G)$ 的非空子集 I 称为 G 的独立集(independent set), 如果 I 中任何两顶点在 G 中不相邻. G 中最大独立集中点数称为 G 的独立数(independence number), 记为 $\alpha(G)$. 与独立集对应的边概念是

匹配的. $E(G)$ 的非空子集 M 称为 G 的**匹配**(matching), 如果 M 中任何两条边在 G 中不相邻. G 中最大匹配中的边数称为 G 的**匹配数**(matching number), 记为 $\alpha'(G)$. 如果 G 中每个顶点都是匹配 M 中某条边的端点, 则称 M 为 G 的**完备匹配**(perfect matching).

$V(G)$ 的非空子集 S 称为 G 的**控制集** (dominating set), 如果 G 中每个顶点或者在 S 中, 或者与 S 中某顶点相邻. G 中最小控制集中的顶点数称为 G 的**控制数** (dominating number), 记为 $\gamma(G)$.

显然, 若 S 是极小控制集, 则 $V(G-S)$ 是控制集. 因此, $\gamma(G) \leqslant \lfloor \frac{1}{2}v(G) \rfloor$, 如果 G 是连通的. 也显然, 任何极大独立集是控制集, 所以, $\gamma(G) \leqslant \alpha(G)$.

§1.3 树, 图的嵌入和平面图

树 (tree) 是不含圈的连通图. G 的支撑子图称为*支撑树* (spanning tree), 如果它是树. 任何连通图必含支撑树.

树作为最基本的图论模型被广泛应用于许多方面: 信息论, 自动化分类, 数据结构和分析, 人工智能, 算法设计, 运筹学, 组合优化, 电网络理论和网络设计等等.

以树为拓扑结构的网络称为*树网* (tree network). 树网是最常见的, 又是最简单的互连网络, 也是最容易建造和扩充的互连网络. 树网的重要性和人们对它的青睐是由于它的简单的构造和良好的性质. 下面定理的证明参见文献 [318] 中定理 2.1 和定理 2.3.

定理 1.3.1 图 G 是树 $\Leftrightarrow$ G 中任何两顶点之间有唯一路相连 $\Leftrightarrow$ G 是连通的且 $\varepsilon(G) = v(G) - 1$. ∎

每个树至少有两个 1 度点. 事实上, 树中最长路的两个端点必是 1 度点. 指定树中的一个顶点称为*根* (root), 这样的树称为*有根树* (rooted-tree). 有根树中的 1 度点 (根除外) 称为*叶* (leaf), 其余的顶点称为*内部点* (internal vertices). 有根树称为*外向树* (out-tree), 如果它是有向图并且从根到任何叶的路是一条有向路. 有根树中顶点的*深度* (depth), 或者*层* (level) 是从根到该点的路长. 所有叶的最大深度称为该有根树的*高* (height).

有根树称为 *k 叉树* (k-ary tree), 如果它的根的顶点度为 k, 其余内部点的顶点度最多为 $k+1$. k 叉树称为*完全 k 叉树* (complete k-ary tree), 如果它的所有内部点都是 $k+1$ 度点. 图 1.3 中所示的图是根在 x, 且高为 3 的 2 叉外树和完全 2 叉树. 容易计算出高为 h 的完全 2 叉树有 $2^{h+1}-1$ 个顶点.

2 叉树被广泛用于数据结构, 因为它易于存储, 易于处理, 易于找回. 在树型数据中, 许多运算, 比如搜索和存储, 能容易地执行. 而且, 2 叉树还出现在 “divided-and-conquer” 型算法和图论算法的通信模式中. 另外, 2 叉树还用于某些并行结构.

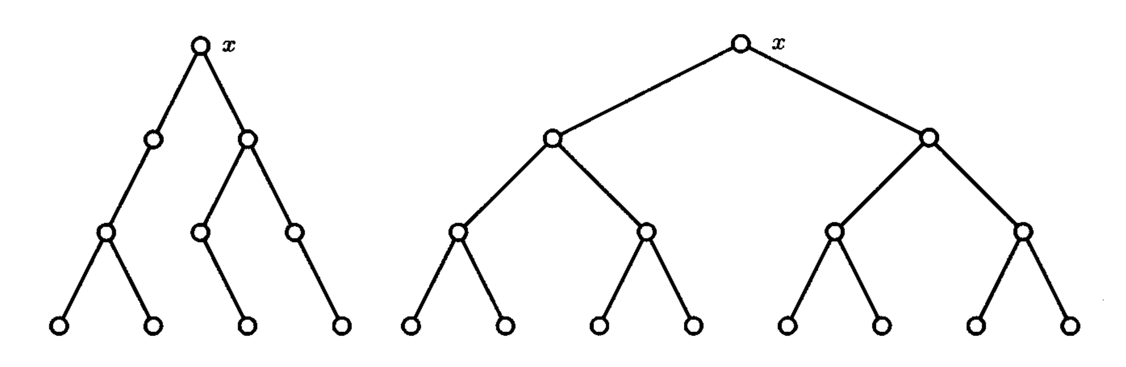


图 1.3 根在 x 且高为 3 的 2 叉外树和完全 2 叉树

正是这些应用, 激发了人们大量的研究兴趣, 将 2 叉树嵌入各种各样的互连网络中去.

在互连网络中, 一个结构能被另一个结构来模拟是重要的. 网络模拟问题能归结为图的嵌入问题. 有许多理由可以说明这样的嵌入是重要的.

正如前面所说, 算法的通信模式可以用图来表示. 因此, 算法在系统中的实现是该算法的通信模式在该系统网络中的嵌入. 许多多处理系统是为"一般目的"而设计的, 这意味着只要时间和空间允许, 任何算法如果能给予合适的编码总是可以在该系统中执行. 存在大量算法, 它们能有效地解决某些应用问题, 并且为该算法的执行有最好的通信模式. 对于这些算法, 为达到希望的性能, 某些拓扑结构的存在性是一个有意义的因素. 因此, 对于这些应用, 被设计的网络最好能在逻辑上提供一个特殊的拓扑结构以确保该算法有效地执行. 另一方面, 有些算法只要稍做修改就可以完全适应另外的拓扑结构, 即对算法稍加修改就能运行. 如果原始算法结构能被嵌入一个新网络, 那么这件事情是容易做到的.

一个给定的问题, 可能有确定的结构, 这种结构导致一个特殊的通信模式. 嵌入这个结构可以从本质上节省通信时间.

在并行处理系统中, 组织处理器的计算能被归结为图的嵌入问题. 假定某个处理过程能自然地分解成若干个并行处理的过程以及子过程之间的通信, 可以得到一个图, 图的顶点代表子过程, 图的边代表子过程之间的通信. 在一个给定的网络中把这些子过程安排到处理器将被归结为图的嵌入问题.

另外, 存在若干应用也能用图的嵌入来模拟. 例如, 如果用图来模拟存储表示和数据结构, 那么为数据结构寻找有效的存储表示就归结为图的嵌入问题. VLSI 电路板的布线问题也归结为图的嵌入问题.

所谓嵌入(embedding) 是一个拓扑结构到另一个拓扑结构的映射, 它保留某些被要求的性质. 文献中讨论了各种类型的嵌入. 这里所讨论的嵌入是指下面的含义.

设 G 和 H 是两个给定的图. 从 G 到 H 的嵌入 (embedding) 是一个从 G 到 H 的同态 (homomorphism). 从 G 到 H 的同态是一个映射 $\phi:\ V(G)\to V(H)$ 使得对任何 $(x,y)\in E(G)$, 它的象 $\phi((x,y))$ 是 H 中一条 $(\phi(x),\phi(y))$ 路.

若存在从 G 到 H 的嵌入, 则称 G 能被嵌入到 H. G 称为客图 (guest graph),

H 称为主图 (host graph). 客图能否被嵌入主图的问题称为图嵌入问题 (graph embedding problem).

嵌入 ϕ 是点对点的 (point-to-point), 如果 ϕ 是单射. 人们关心的嵌入问题, 大多数是点对点的嵌入问题.

显然, 如果 G 同构于 H 的某个子图 T, 那么 G 和 T 之间的任何同构 θ 能被扩充为 G 到 H 的一个嵌入. 这种嵌入称为同构嵌入 (isomorphic embedding). 同构嵌入是最理想的, 因为它是点对点的, 而且当客图被用来表示一个算法的通信模式时, 在主图上运行该算法与客图上运行该算法有相同的速度. 在这种情况下, 主图能以同样的速度有效地模拟客图.

然而, 事实总不是这样, 即使嵌入是点对点的. 在嵌入的定义中, 允许 ϕ 将客图 G 的一条边映射到主图 H 中一条路. 然而, 这种"拉长"必然会影响主图有效地模拟客图.

为了刻画嵌入的优劣, 需要引进下面的概念. 设 ϕ 是客图 G 到主图 H 的嵌入. 在这个嵌入中, G 的边被"拉长"的最大长度称为 ϕ 的膨胀数(dilation), 记为 dil (ϕ), 即

$$\text{dil}\,(\phi)=\max_{(x,y)\in E(G)}\{\ H\ 中\ \phi((x,y))\ 路的长度\}.$$

膨胀数 dil (ϕ) 是度量当 H 按 ϕ 模拟 G 时, 通信有效性的重要参数. 经典的目标是求从 G 到 H 的嵌入 ϕ 使得膨胀数 dil (ϕ) 最小. 显然, 存在从 G 到 H 点对点嵌入 ϕ 使得 dil $(\phi)=1$ 当且仅当 ϕ 是从 G 到 H 中某个子图的同构.

比率 $v(H)/v(G)$ 称为嵌入 G 到 H 的膨胀率 (expansion). 膨胀率是度量当 H 模拟 G 时, 网络 H 的利用率的重要参数.

除了膨胀数和膨胀率外, 还有两个度量嵌入优劣的参数: 嵌入的拥塞和负载. 嵌入的拥塞 (congestion) 是客图中用到主图某一条边的最大次数. 嵌入的负载 (load) 是客图中用到主图某一个顶点的最大次数. 容易看到, 如果嵌入 ϕ 是同构的, 那么它的负载是 1.

例如, 图 1.4 所示的是客图 G 到主图 H 的两个点对点嵌入. 嵌入 ϕ 的膨胀数和拥塞都是 3 (因为 G 中边 26 被拉长到 H 中长为 3 的路, H 中边 56 被 G 用了 3 次), 它的膨胀率和负载都是 1. 嵌入 ϕ' 是一个同构嵌入, 这四个参数都是 1.

膨胀数, 膨胀率, 拥塞和负载界定了嵌入 ϕ 的速度和有效性. 因此, 最好的嵌入是使得膨胀数, 膨胀率, 拥塞和负载都很小的嵌入. 如果这四个参数都是常数, 那么主图能以常数低于原速度来有效地模拟客图.

在嵌入问题中, 平面图是最常用的客图之一. 如果图 G 能被画在平面上使得它们的边不相交, 那么称 G 为平面图 (planar graph). 平面图 G 在平面上的一种画法称为 G 的平面表示 (planar embedding). 不是平面图的图称为非平面图 (non-planar graph). 非平面图是存在的. 例如, K_5 和 $K_{3,3}$ 都不是平面图.

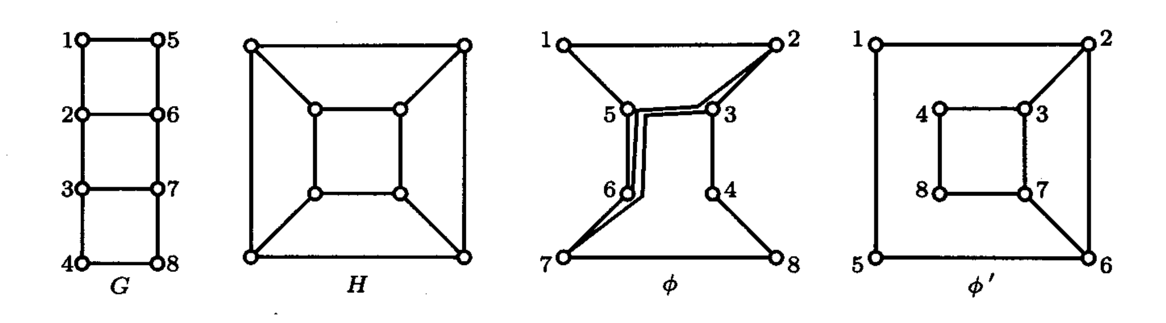


图 1.4 从 G 到 H 的两个嵌入

平面图的某些必要条件是容易得到的. 比如, 若 G 是平面图, 则 $\delta(G) \leqslant 5$, $\varepsilon(G) \leqslant 3v(G) - 6$; 若 G 是 2 部分平面图, 则 $\varepsilon(G) \leqslant 2v(G) - 4$. 然而这些条件都不是充分的. 一个著名的充分且必要条件由 Kuratowski[198] 得到, 一般图论教科书上都称为 Kuratowski 定理: 图 G 是平面图当且仅当它不含 K_5 或者 $K_{3,3}$ 的细分图 (参见文献 [318] 中定理 3.6).

Kuratowski 定理的重要性不仅在于它的理论和应用意义, 更在于它给人一种启示. 它提出图嵌入的思想, 更一般地, 提出通过禁子图 (forbidden subgraphs) 来刻画图的性质的思想.

在许多实际应用中, 需要判断图是否是平面图. 如果是, 则需要求一个平面嵌入. 例如, 在印刷电路板的布线中, 人们感兴趣的是要知道电网络对应的图是否是平面图. 人们已经提出许多解决这个问题的线性算法, 例如, 读者可参见文献 [10] 和文献 [225].

如果 G 不是平面图, 那么, 它的任何平面表示总有某些边必是相交的. 由此导出两个基本的图论概念: 交叉数和厚度. 图 G 的交叉数 (crossing number) 是它的所有平面表示中边交叉的最小数目. G 的厚度 (thickness), 记为 $\vartheta(G)$, 是 G 被分解成边不交支撑平面子图的最小个数. 显然, $\vartheta(G) = 1$ 当且仅当 G 是平面图. 也容易看到, $\vartheta(G) \geqslant \varepsilon(G)/(3v(G) - 6)$.

规模集成电路 (VLSI) 设计者根据设计要求需要把电子元件安置在印刷电路板上 (通常是多层板). 一个基本要求是避免线路交叉, 否则导致短路. 因此, 希望找到一个方法来解决电网络线路交叉问题.

实践中, 交叉的线路必被安置在不同层的电路板中. 有两种方法安置网络中的线路到不同的电路板上. 第一种方法, 当线路交叉出现时, 通过所谓的触点片 (contact cuts) 将其中一条改变它的层. 但太多的触点片会导致面积的增加, 也因此导致电路板有更高的故障概率. 因此, 这种构造方法只适用于线路交叉较少的情形.

如果大量的线路交叉是不可避免的, 那么采用第二种方法是合适的. 将对应的图分解成边不交平面子图的并, 每个平面子图分别嵌在一层中. 因为不用触点片,

这种方法制造费用是用层数来度量的.

大规模集成电路设计者的通常目标是使所用触点片数或者层数尽可能的少. 这两个最小数分别对应图的交叉数和厚度.

不幸的是, 除了完全图和完全 2 部分图等极少数几个图外, 确定图的交叉数和厚度都是非常困难的. Mutzel, Odenthal, Scharbrodt[247] 从图的理论和应用的角度综述图的厚度研究进展. 关于平面图可嵌入理论的更一般讨论可参见文献 [226].

除了交叉数和厚度外, 制约 VLSI 电路的有效布线的因素还有: 印刷电路板每层的规模, 导线的长度和宽度, 并行导线之间的间隔等等. 如果设计者的目标是使这些参数尽可能的小, 那么电路布线问题就是寻找既使得目标函数最优, 又要满足事先给定的条件. 许多作者已经研究了各种各样的电路布线问题, Vancleemput[301] 和 Bhatt, Leighton[32] 已从数学的角度, 特别是利用图论语言对这些问题作了综述.

§1.4 网络传输延迟与图的直径, 路由选择

度量互连网络性能最有用的参数或许是通过该网络将信息从它的源送到目的地的传输延迟 (或者时间延迟). 在存储转发型互连网络中, 信息从它的源到达目的地往往需要经过若干个中间点的存储和转发. 信息的传输延迟或者信号减弱常常与它经过的点数是成比例的. 显然, 信息传输所经过的点数越小, 网络的通信效率就越高. 而且, 处理器之间的互连费用是随着网络处理器之间的物理连线的增加而增大.

图的距离, 平均距离和直径概念在分析互连网络有效性中起了重要作用, 为度量网络的传输延迟提供了度量参数. 这一节回顾这些图论概念以及与信息传输有关的其他图论概念.

设 G 是图, $x,y \in V(G)$. G 中最短 (x,y) 路的长度称为 G 中从 x 到 y 的距离 (distance), 记为 $d(G;x,y)$. 若 G 中不存在 (x,y) 路, 则约定 $d(G;x,y)=\infty$.

显然, 对于无向图, 若 $d(G;x,y)$ 存在, 则 $d(G;y,x)$ 必存在, 而且 $d(G;x,y) = d(G;y,x)$, 这是因为任何 (x,y) 路也是 (y,x) 路, 而且路长相等. 然而, 对于有向图, $d(G;x,y)$ 存在, 而 $d(G;y,x)$ 不一定存在, 即使都存在, 也不一定相等.

G 中任何两顶点之间的最大距离称为 G 的直径 (diameter), 记为 $d(G)$, 即,

$$d(G) = \max\{d(G;x,y):\ x,y \in V(G)\}.$$

例如, 无向路 P_n 的直径 $d(P_n)=n-1$; 无向圈 C_n 的直径 $d(C_n)=\lfloor \frac{1}{2}n \rfloor$; 而有向圈 C_n 的直径 $d(C_n)=n-1$; 完全图 K_n 的直径 $d(K_n)=1$.

显然, 直径 $d(G)$ 是确定的当且仅当 G 是连通的无向图或者是强连通的有向图.

如果图 G 表示存储转发型互连网络的拓扑结构, 信息在每个顶点的存储转发时间都是一样的, 那么图的距离和直径直接刻画了该网络的传输延迟. 为了改进或

者提高网络传输的有效性就必须使对应的图有最小的直径. 正是由于这个原因, 图的直径在文献中已引起了相当多的注意力. 有兴趣的读者可参阅 3 个有关的综述文献 Bermond, Bollobás[22], Bermond 等 [23] 和 Chung[65].

定理 1.4.1 设 G 是强连通有向图. 如果它的阶 n ($\geqslant 2$) 且最大度为 d, 那么

$$d(G)\begin{cases} = n-1, & \text{若 } d=1;\\ \geqslant \lceil \log_d(n(d-1)+1)\rceil - 1, & \text{若 } d\geqslant 2.\end{cases}$$

证明 因为 G 是强连通有向图, 所以直径 $d(G)$ 是确定的. 令 $d(G)=k$. 对于给定的顶点 x, 与 x 距离为 1 的顶点最多有 d 个. 一般地, 与 x 距离为 i 的顶点最多有 d^i 个. 因此,

$$\begin{aligned} n &\leqslant 1+d+d^2+\cdots+d^{k-1}+d^k\\ &=\begin{cases} k+1, & \text{若 } d=1;\\ \dfrac{d^{k+1}-1}{d-1}, & \text{若 } d\geqslant 2.\end{cases}\end{aligned} \tag{1.4.1}$$

当 $d=1$ 时, 由式 (1.4.1) 有 $n\leqslant k+1$. 这意味着 $d(G)=k\geqslant n-1$. 另一方面, 显然有 $d(G)\leqslant n-1$. 所以, $d(G)=n-1$.

当 $d\geqslant 2$ 时, 由式 (1.4.1) 有 $(d-1)n\leqslant d^{k+1}-1$. 这意味着

$$d(G)=k\geqslant \lceil \log_d(n(d-1)+1)\rceil - 1.$$

定理得证. ∎

定理 1.4.2 设 G 是连通的无向图. 如果它的阶 $n(\geqslant 3)$ 和最大度为 $d(\geqslant 2)$, 那么

$$d(G)\geqslant\begin{cases} \lfloor \frac{1}{2}n\rfloor, & \text{若 } d=2;\\ \left\lceil \log_{(d-1)}\dfrac{n(d-2)+2}{d}\right\rceil, & \text{若 } d\geqslant 3.\end{cases}$$

证明 因为 G 是连通的无向图, 所以直径 $d(G)$ 是确定的. 令 $d(G)=k$. 对于给定的顶点 x, 与 x 距离为 1 的顶点最多有 d 个; 与 x 距离为 2 的顶点最多为 $d(d-1)$ 个. 一般地, 与 x 距离为 i 的顶点最多有 $d(d-1)^{i-1}$ 个. 所以

$$\begin{aligned} n &\leqslant 1+d+d(d-1)+\cdots+d(d-1)^{k-1}\\ &=\begin{cases} 2k+1, & \text{若 } d=2;\\ \dfrac{d(d-1)^k-2}{d-2}, & \text{若 } d\geqslant 3.\end{cases}\end{aligned} \tag{1.4.2}$$

当 $d=2$ 时, 由式 (1.4.2) 有 $n\leqslant 2k+1$, 这意味着 $d(G)=k\geqslant \lfloor \frac{1}{2}n\rfloor$.

当 $d \geqslant 3$ 时, 由式 (1.4.2) 有 $(d-2)n \leqslant d(d-1)^k - 2$. 这意味着

$$d(G) = k \geqslant \left\lceil \log_{(d-1)} \frac{n(d-2)+2}{d} \right\rceil.$$

定理得证. ∎

当 $d = 1$ 时, 有向圈 C_{k+1} 的直径为 k. 当 $k = 1$ 时, 完全有向图 K_{d+1} 的直径为 1. 这两类图说明: 当 $d = 1$ 或者 $k = 1$ 时, 式 (1.4.1) 中给出的 n 的上界是可以达到的.

当 $d = 2$ 时, 无向圈 C_{2k+1} 的直径为 k. 当 $k = 1$ 时, 完全图 K_{d+1} 的直径为 1. 这两类图说明: 当 $d = 2$ 或者 $k = 1$ 时, 式 (1.4.2) 中给出的 n 的上界是可以达到的.

式 (1.4.1) 和式 (1.4.2) 中给出的 n 的上界称为 (d,k)-Moore 界. 是否存在图使得它的阶达到 (d,k)-Moore 界的问题将在第 5 章作进一步的讨论.

定理 1.4.3 设 G 是连通的无向图. 如果它的阶为 n, 最小度为 δ, 那么

$$d(G) \leqslant \frac{3n}{\delta+1}.$$

证明 因为对任何 n 阶图 G, 它的直径 $d(G) \leqslant n-1$, $n \geqslant \delta+1$, 所以, 在以下的讨论中, 不妨设 $\delta \geqslant 3$ 且 $d(G) = k \geqslant 4$.

设 $x, y \in V(G)$ 使得 $k = d(G) = d(G; x, y)$, 并设 $P = (x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k)$ 是 G 中最短的 (x,y) 路, 其中 $x_0 = x$ 且 $x_k = y$. 由 P 的最短性知, 任何两顶点 x_{3i} 和 x_{3j} $(i \neq j)$ 有 $N_G(x_{3i}) \cap N_G(x_{3j}) = \emptyset$. 令 $h = \lfloor \frac{1}{3}k \rfloor$. 则

$$n \geqslant \sum_{i=0}^{h} |N_G(x_{3i})| + \sum_{i=0}^{h} |x_{3i}| \geqslant \delta(h+1) + (h+1)$$

$$= (h+1)(\delta+1) = \left(\left\lfloor \frac{1}{3}k \right\rfloor + 1\right)(\delta+1) \geqslant \frac{1}{3}k(\delta+1).$$

这说明定理成立. ∎

定理 1.4.3 对有向图是不成立的. Soares[286] 构造了一个 n 阶, 最小度 δ 的有向图的直径为 $n - 2\delta + 1$, 并对正则有向图改进了定理 1.4.3, 得到对正则有向图和无向图都是紧的上界: $d(G) \leqslant \frac{3n-\delta-3}{\delta+1}$. Knyazev[190] 证明了: 对于无对称边的连通平衡有向图 G, $d(G) \leqslant \frac{5n}{2\delta+2}$, 而且构造了一个图 G 使得 $d(G) > \frac{4n}{2\delta+1} - 4$. 最近, Dankelmann[72] 改进这个上界为 $d(G) \leqslant \frac{4n}{2\delta+1} + 2$. 最后, 介绍 Ore[253] 的结果, 这里给出比较简单的证明 (见 [357]).

定理 1.4.4 设 G 是 n 阶连通 k 直径无向图, 则

$$\varepsilon(G) \leqslant k + \frac{1}{2}(n-k+4)(n-k-1).$$

证明 用 t 表示要得到无向图 G 至少需要从完全图 K_n 中移走的边的数目. 则有:

$$\varepsilon(G) \leqslant \varepsilon(K_n) - t. \tag{1.4.3}$$

令 $P=(x_0,x_1,\cdots,x_k)$ 为 G 中最短路. 由最短性知, 如果 $j-i>1$, 那么, P 中两点 x_i 和 x_j 不相邻. 这就意味着, 为了得到 G, 必须从 K_n 移走至少 $\frac{1}{2}k(k-1)$ 条边. 同样地, 对于不在 P 中的顶点 x, 它不能同时与 P 中距离大于 2 的两顶点同时相邻. 换句话说, P 中至少有 $(k-2)$ 个点不与 x 相邻. 由于 G 中不在 P 上的顶点数为 $(n-k-1)$, 所以至少有 $(n-k-1)(k-2)$ 条边必须从 K_n 中移去以得到 G. 因此

$$t \geqslant \frac{1}{2}k(k-1)+(n-k-1)(k-2). \tag{1.4.4}$$

结合式 (1.4.3) 和式 (1.4.4), 得

$$\begin{aligned}\varepsilon(G) &\leqslant \frac{1}{2}n(n-1)-\frac{1}{2}k(k-1)-(n-k-1)(k-2)\\ &= k+\frac{1}{2}(n-k+4)(n-k-1),\end{aligned}$$

定理得证. ∎

同样地可以证明: 对 n 阶强连通 k 直径有向图 D,

$$\varepsilon(D) \leqslant n(n-k+1)+\frac{1}{2}(k^2-k-4).$$

证明留给读者.

我们已经知道传输延迟是互连网络整体通信效率的一个重要度量. 当互连网络的拓扑结构用图来表示时, 虽然图的直径是网络的传输延迟的有效度量参数, 但直径是图中任何两顶点之间的最大距离. 因此, 网络中某点对之间的大距离必影响网络的通信性能. 换句话说, 图的直径仅是网络通信性能最坏情形的度量. 然而, 在实际应用中, 网络中大距离的顶点对可能很少. 因此, 网络中所有点对之间的距离平均值就比直径更能准确地度量网络的通信性能. 这个事实导致人们对平均距离的研究.

设 G 是 n 阶连通无向图或强连通有向图, 其中 $n \geqslant 2$. G 的**平均距离** (average or mean distance), 记为 $\mu(G)$, 定义为

$$\mu(G)=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{x,y\in V} d(G;x,y).$$

因为 $\mu(G)$ 仅是所有非零距离的算术平均值, 所以 $\mu(G) \geqslant 1$, 等号成立当且仅当 G 是完全图. 要计算平均距离, 首先要计算 G 中所有不同顶点对之间的距离. 为方便起见, 令

$$\sigma(G)=\sum_{x,y\in V} d(G;x,y).$$

例如, 考虑有向圈 $C_n(n \geqslant 3)$ 和 C_n 中固定的顶点 x_0. 因为从 x_0 到任何其他顶点的距离之和为 $1+2+\cdots+n-1=\frac{1}{2}n(n-1)$, 所以,

$$\sigma(C_n)=\frac{1}{2}n^2(n-1), \qquad \mu(C_n)=\frac{1}{2}n.$$

与图的直径一样, 图的平均距离除了它的图论本身意义外, 在网络分析中也发挥着重要作用. 因此, 图的平均距离的研究也吸引了大量的注意力. 有关图的平均距离的研究结果，综述文献可参阅 Plesnik[258]. 这些结果的大部分是通过某些图参数表示的平均距离的上界和下界.

下面定理给出 $\sigma(G)$ 的下界, 它的无向图形式是由 Entringer, Jackson, Slater[93] 得到的; 有向图形式是由 Ng, Teh[248] 得到的. 这里给出的证明属于周涛等 [357].

定理 1.4.5 设 G 是 n 个顶点和 m 条边的图.

(a) 如果 G 是无向图, 那么 $\sigma(G) \geqslant 2n(n-1)-2m$;

(b) 如果 G 是有向图, 那么 $\sigma(G) \geqslant 2n(n-1)-m$;

而且当 $d(G) \leqslant 2$ 时, 等号成立.

证明 考虑无向图 G 是从完全图 K_n 移去 p 条边得到的. 于是,

$$\varepsilon(G)=\frac{1}{2}n(n-1)-p. \tag{1.4.5}$$

设移去的 p 条为 $x_1y_1, x_2y_2, \cdots, x_py_p$. 那么

$$\sigma(G)=\sum_{xy\in E(G)} d(G;x,y)+\sum_{i=1}^{p}\left[d(G;x_i,y_i)+d(G;y_i,x_i)\right]. \tag{1.4.6}$$

显然, 若 $xy \in E(G)$, 则 $d(G;x,y)=d(G;y,x)=1$; 其余情形有 $d_G(x,y)=d_G(y,x) \geqslant 2$. 因此, 从式 (1.4.5), 有

$$\sigma(G) \geqslant 2\varepsilon+4p. \tag{1.4.7}$$

结合式 (1.4.5) 和式 (1.4.7) 得到结论 (a).

同样的, 考虑有向图 D, 有 $\varepsilon(D)=\varepsilon(K_n)-p=n(n-1)-p$. 于是,

$$\begin{aligned}\sigma(D)&=\sum_{(x,y)\in E(D)} d(D;x,y)+\sum_{i=1}^{p} d(D;x_i,y_i)\\ &\geqslant 2\varepsilon+2p=2n(n-1)-\varepsilon.\end{aligned}$$

从证明中可以看出, 最后一个结论明显成立. ∎

作为定理 1.4.5 的应用, 我们考虑几类特殊的图.

(a) 如果 G 是树, 那么 $\varepsilon(G)=n-1$. 于是, $\mu(G) \geqslant 2-\frac{2}{n}$, 达到这个下界的图是星 $K_{1,n-1}$.

(b) 如果 G 是平面图且 $n \geqslant 3$, 那么 $\varepsilon(G) \leqslant 3n-6$. 于是,

$$\mu(G) \geqslant 2 - \frac{6n-12}{n(n-1)},$$

达到这个下界的是直径最多为 2 的最大平面图.

(c) 如果 G 是 2 部分图, 那么当 n 是偶数时, $\varepsilon(G) \leqslant \frac{1}{4}n^2$; 当 n 是奇数时, $\varepsilon(G) \leqslant \frac{1}{4}(n-1)(n+1)$. 于是,

$$\mu(G) \geqslant \begin{cases} \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2(n-1)}, & 若\ n\ 偶数; \\ \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2n}, & 若\ n\ 奇数. \end{cases}$$

完全 2 部分图 $K_{r,s}$ 达到这个下界, 其中 $r = \lfloor \frac{1}{2}n \rfloor$, $s = \lceil \frac{1}{2}n \rceil$.

通过 $v(G)$ 和 $\varepsilon(G)$, 我们得到了 $\mu(G)$ 的紧的下界, 但得到紧的上界好像比较困难. 据作者所知, 前面还没有发现通过 $v(G)$ 和 $\varepsilon(G)$ 来表示 $\mu(G)$ 的紧的上界. 下面, 我们介绍一个利用阶 $v(G)$ 和最小度 $\delta(G)$ 表示的 $\mu(G)$ 的上界, 它由 Kouider 和 Winkler[193] 获得. 证明有一定难度, 有兴趣的读者可以参考原文.

定理 1.4.6 如果 G 是连通的无向图, 它有阶 n 和最小度 δ, 那么

$$\mu(G) \leqslant \frac{n}{\delta+1} + 2.$$

另一个有趣的且值得研究的方向是确定图的平均距离算法复杂性. 求平均距离的最著名的 Fredman[121] 算法要求的时间是 $o(v^2 + v\varepsilon)$. 而确定图的直径的最著名 Floyd[119] 算法要求的时间是 $o(v\varepsilon)$. 确定平均距离的问题是否比确定所有距离问题容易? Chung[66] 认为确定直径, 所有的距离以及平均距离的问题是一个还没有完结的挑战性问题.

在通信网络中, 数据传递必须找到一个路径, 沿着这条路径将每个信息从它的源传递到它的目的地. 沿着这条路径传递信息所要求的时间由信息在该路径两端点的处理时间所决定, 路径的中间点对信息不作任何处理. 就像邮件在投递中间点不必打开信封一样. 因此, 粗略地说, 沿着固定的路径传递数据所需的时间与该路径的长度无关. 这样简单的转发功能有路由转发器来完成, 大大提高网络的整体性能.

对于全连通网络, 这个问题是平凡的, 因为在这种网络中每对顶点之间都有一条连边. 但对于一般的网络, 总不是这样的. 网络设计者必须事先为网络中每对顶点 (x,y) 指定一条路径, 数据沿着这条路径传输从信息源 x 到它的目的地 y. 这些指定的路径集称为网络的路由选择. 由于网络的路由选择的重要性, 在文献中已有相当多的研究. 我们将用图论语言来表述网络的路由选择.

设 G 是 n 阶连通的无向图或者强连通的有向图, x 和 y 是 G 中不同两顶点. $P(G;x,y)$ 表示 G 中 (x,y) 路集. 令

$$\mathscr{P}(G)=\bigcup_{x,y\in V(G)}\mathscr{P}(G;x,y),$$

$$F=\{(x,y):\ x,y\in V(G),x\neq y\}.$$

G 的路由选择 (routing) 定义为映射:

$$\begin{aligned}\rho:\quad F\ &\to \mathscr{P}(G)\\ (x,y)\ &\mapsto \rho(x,y),\end{aligned}$$

其中 $\rho(x,y)\in\mathscr{P}(G;x,y)$ 是 G 中一条 (x,y) 路, 也称为路径 (route). 简单地说, G 中的路由选择是由 G 中 $n(n-1)$ 条路组成的集合.

一般说来, 对于 G 的两顶点 x 和 y, 由 ρ 确定的路径 $\rho(y,x)$ 的逆向路径不一定是 $\rho(x,y)$, 即使 G 是无向图也可能是这样. 设 G 是无向图, ρ 是 G 中的路由选择. 如果对 G 中的每个顶点对 (x,y), 由 ρ 确定的路径 $\rho(x,y)$ 的逆向路径是 $\rho(y,x)$, 即 $\rho(x,y)=\rho(y,x)$, 那么称 ρ 为双向路由选择 (bidirectional routing).

例如, 对于图 1.5 中所示的 6 阶无向图, 它的一个路由选择 ρ 是由如下 14 条路

$$\begin{aligned}&\rho(1,5)=(1,2,5)=(5,2,1)=\rho(5,1);\\&\rho(4,5)=(4,2,5)=(5,2,4)=\rho(5,4);\\&\rho(1,6)=(1,3,6)=(6,3,1)=\rho(6,1);\\&\rho(4,6)=(4,3,6)=(6,3,4)=\rho(6,4);\\&\rho(2,6)=(2,5,6)=(6,5,2)=\rho(6,2);\\&\rho(3,5)=(3,6,5)=(5,6,3)=\rho(5,3);\\&\rho(2,3)=(2,4,3);\quad \rho(3,2)=(3,1,2)\end{aligned}$$

和 16 条边组成. 因为 $\rho(2,3)\neq\rho(3,2)$, 所以它不是双向路由选择.

路由选择是网络设计的组成部分, 确定了路由选择 ρ 的图 G 记为 (G,ρ). 对于给定的路由选择 ρ, 它指定了 G 中 $n(n-1)$ 条路. 对于任何两顶点 x 和 y, 信息从 x 通过指定的路径 $\rho(x,y)$ 传到 y. 注意路径 $\rho(x,y)$ 不一定是最短的 (x,y) 路. 如果由 ρ 确定的所有路都是最短路, 那么称 ρ 为最小的路由选择 (minimum routing). 对于最小路由选择, 有所谓的最小路由选择原理 (minimum principle of routings): 设 ρ 是最小路由选择, z 是 $\rho(x,y)$ 的内点, 则 $\rho(x,z)$ 和 $\rho(z,y)$ 都是 $\rho(x,y)$ 的子路.

寻找路由选择的算法称为路由选择算法 (routing algorithm). 乍一看, 任何求最短路算法都是路由选择算法, 该算法能求最小路由选择. 事实上, 存在许多参数度量路由选择的优劣, 其中某些度量参数将在第 11 章介绍. 我们将看到, “好的”路由选择并不一定是最小的. 这就为设计理想的路由选择算法带来困难. 但无论如何, 对于大规模互连网络, 简单容易的路由选择算法总是必要的.

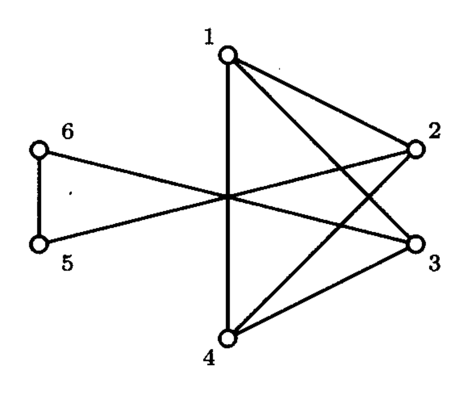


图 1.5 说明路由选择的无向图

§1.5 网络容错性和图的连通度

在互连网络设计中, 最基本的考虑是网络的可靠性. 当用图来表示网络的拓扑结构时, 网络的可靠性常常用图的连通度和边连通度来度量. 这一节简单地回顾图的连通度概念和基本结果, 包括著名的 Menger 定理, Whitney 不等式和 Menger-Whitney 判定准则.

设 x 和 y 是图 G 中不同两顶点. $P_1, P_2, \cdots, P_w$ 是 G 中 w 条 (x,y) 路. 如果它们任何两条没有公共的内部交点, 那么称它们是*内点不交的* (internally disjoint); 如果它们任何两条没有公共的边, 那么称它们是*边不交的* (edge-disjoint).

G 中内点不交的 (x,y) 路的最大条数称为 (x,y)-Menger *数* (Menger number), 记为 $\zeta(G;x,y)$. 同样地, G 中边不交的 (x,y) 路的最大条数称为边 (x,y)-Menger *数* (Menger number for edges), 记为 $\eta(G;x,y)$.

如果存在非空子集 $S \subseteq V(G) \setminus \{x,y\}$ 使得 $G-S$ 中不含 (x,y) 路, 那么称 S 为 G 的 (x,y) *分离集* (vertex separating set), 或者叫*点割* (vertex-cut). 显然, G 中存在 (x,y) 离集当且仅当 $(x,y) \notin E(G)$. 如果 $(x,y) \notin E(G)$, 那么 G 中所有 (x,y) 分离集的最小顶点数目称为 (x,y) *连通度* (connectivity), 记为 $\kappa(G;x,y)$.

如果存在 $\emptyset \neq B \subseteq E(G)$ 使得 $G-B$ 中不含 (x,y) 路, 那么称 B 为 G 中 (x,y) *截集* (edge-cut). 对任何非平凡的连通无向图或者强连通有向图, (x,y) 截总是存在的. G 中所有 (x,y) 截的最小边数称为 G 的 (x,y) *边连通度* (edge-connectivity), 记为 $\lambda(G;x,y)$.

定理 1.5.1 设 G 是连通无向图或者强连通有向图, x 和 y 是 G 中不同两顶点.

(a) 如果 $(x,y) \notin E(G)$, 那么 $\zeta(G;x,y) = \kappa(G;x,y)$;

(b) $\eta(G;x,y) = \lambda(G;x,y)$. ∎

在图论文献中, 定理 1.5.1 通常称为 Menger *定理*[244]. Menger 定理是图论中最基本的结果之一, 也是互连网络拓扑结构设计和分析的基础.

在并行处理系统中, 为了更快地把一个大数据包从结点 x 传到结点 y, 人们往往首先把该数据包分拆成 w 个小数据包. 每个小数据包可以看成是单一的信号, 而且有相同的源 x 和目的地 y. 然后, 沿着 w 条不同的 (x,y) 路同时从 x 传到 y. 为避免信息相互冲突, 这 w 条不同的 (x,y) 路必须是内点不交的或者是边不交的. w 的最大值是就是 $\kappa(G;x,y)$ 或者 $\lambda(G;x,y)$. 利用不交路传输数据不仅缓解了数据拥塞, 加快数据传输, 而且容许由于故障的出现而引起的数据丢失.

如果存在非空子集 $S \subset V(G)$ 使得 $G-S$ 非连通或者非强连通, 那么 S 称为 G 的*点分离集* (vertex-cut). G 的*连通度* (connectivity), 记为 $\kappa(G)$, 定义为 G 中所有点分离集中最小点数, 即,

$$\kappa(G)=\min\{\kappa(G;x,y):\ \forall\ x,y \in V(G)\ (x,y)\notin E(G)\}.$$

含 $\kappa(G)$ 个顶点的点分离集称为 *κ 分离集*.

同样地, 设 B 是 $E(G)$ 的非空子集. 如果 $G-B$ 是非连通的或者非强连通的, 那么 B 称为 G 的边截 (edge-cut). G 的边连通度 (edge-connectivity), 记为 $\lambda(G)$, 定义为所有边截中最小边数, 即,

$$\lambda(G)=\min\{\lambda(G;x,y):\ \forall\ x,y \in V(G)\}.$$

含有 $\lambda(G)$ 条边的截集称为 *λ 截集*. 一个简单有用的事实是: 如果 B 是无向图 G 的 λ 截, 那么存在子集 $X \subset V(G)$ 使得 $B=E_G(X)$, 并且 $G[X]$ 和 $G[\overline{X}]$ 都是连通的. 无向图中的分离集和截集也称为*点割*和*边割*.

如果 G 是非连通的无向图或非强连通的有向图, 那么约定 $\kappa(G)=\lambda(G)=0$; 也约定 $\kappa(K_n)=n-1=\lambda(K_n)$.

如果存在 w 使得 $\kappa(G)\geqslant w$, 那么 G 称为 *w 连通的*; 如果存在 w 使得 $\lambda(G)\geqslant w$, 那么 G 称为 *w 边连通的*.

定理 1.5.2 $\kappa(G)\leqslant\lambda(G)\leqslant\delta(G)$. ∎

这个不等式称为 Whitney 不等式, 它的无向图形式是由 Whitney[309] 首先证明的, 是由 Geller 和 Harary[125] 推广到有向图.

下面的定理给出 w 连通图的判定准则, 属于 Menger[244] 和 Whitney[309], 故称为 *Menger-Whitney 判定准则*.

定理 1.5.3 对任何阶数至少为 $w+1$ 的图 G, $w\geqslant 1$, $x,y\in V(G)$,

(a) $\kappa(G)\geqslant w \Leftrightarrow \zeta(G;x,y)\geqslant w$;

(b) $\lambda(G)\geqslant w \Leftrightarrow \eta(G;x,y)\geqslant w$. ∎

下面的概念常常用在网络分析中. 设 x 是 G 的顶点, $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_w\}$ 是 $G-x$ 中 w 个顶点集. 如果 G 中存在 w 条不交 (除 x 外) 的 (x,y_i) 路 $P_1,P_2,\cdots,P_w$, 那么路集

$$\mathscr{F}_w(x,Y)=\{P_1,P_2,\cdots,P_w\}$$

称为宽度为 w 的 (x,Y) 扇 (fan). 同样地, 如果 G 中存在 w 条不交 (除 x 外) 的 (y_i,x) 路 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_w$, 那么路集

$$\mathscr{F}_w(Y,x)=\{Q_1,Q_2,\cdots,Q_w\}$$

称为宽度为 w 的 (Y,x) 扇. 由 Menger 定理, 立即得到下面的结论.

定理 1.5.4 设 G 是 $w(\geqslant 1)$ 连通图. 则对任何 $x\in V(G)$ 和任何 $Y\subseteq V(G-x)$, $|Y|=w$, G 中存在 (x,Y) 扇 $\mathscr{F}_w(x,Y)$ 和 (Y,x) 扇 $\mathscr{F}_w(Y,x)$. ∎

对于 w 连通无向图, 叙述另一个判定准则. 它由 Lovász[228] 和 Györi[132] 独立证明, 故称为 Lovász-Györi 定理.

定理 1.5.5 设 G 是 $n\geqslant w+1(w\geqslant 1)$ 阶无向图. 则 G 是 w 连通的当且仅当对 G 中任何 w 个不同顶点 $x_1,x_2,\cdots,x_w$ 和 n 的任何 w 划分 $\{n_1,n_2,\cdots,n_w\}$, 存在 $V(G)$ 的划分 $\{V_1,V_2,\cdots,V_w\}$ 使得 $x_i\in V_i$, $|V_i|=n_i$ 且 $G[V_i]$ 是连通的, $i=1,2,\cdots,w$. ∎

Maurer 和 Slater[240] 证明了对于边连通性, 也有类似于定理 1.5.5 的结论.

为系统设计或者选择互连网络拓扑结构, 一个基本的考虑是它的容错性.

任何系统都有两种可能的故障: 硬件发生故障和软件出现错误. 大部分的硬件故障是由物理原因引起的, 比如元件磨损和电磁干扰等. 软件错误是属于设计出错而引起的. 硬件故障对网络性能的影响可以用数学方法来描述, 而软件错误要想用数学方法来描述是困难的.

Avizienis[12] 已简明扼要地定义一个计算机的容错性为"正确地执行指定算法的能力, 无论硬件故障和程序错误是否发生". 然而, 对于大规模超级计算机系统, 它的元件是复杂的处理器, 既不可能出现故障, 也不可能对被执行的算法进行简单的分类. 许多大规模超级计算机系统是为"一般目的"而设计的, 也就是说, 在时间和存储空间许可的范围内, 任何算法都是可以执行的. 确定物理故障对算法的影响也是困难的, 因为这些算法都是由程序或者框图给定的. 因此, Avizienis 关于容错性的定义无法应用到大规模超级计算机系统.

容错系统的性能应该包含两个方面: 计算上的有效性和可靠性. 当系统中的一个元件或者连线发生故障时, 它的职责应该由该系统中其他的元件或者连线来完成. 如果这些元件或者连线仅仅是为了修改系统的可靠性而存在, 而不影响系统的计算性能, 那么这些元件或者连线被称为是冗余的 (redundant). 另一方面, 故障的存在对计算速度是有影响的, 因为运行测试和维修程序需要一定时间, 因而也降低了系统的处理性能. 在大规模超级系统中, 一两个元件或者连线发生故障, 系统会以小的吞吐量继续运行. 当系统故障发生时, 系统仍能保持可接受的低性能运行的能力被认为故障弱化 (graceful degradation).

按照 Esfahanian[97] 的定义, 如果超级计算机系统在故障发生时仍具有功能 (functional), 那么称该系统为容错的 (fault tolerant) 系统. 当考虑 MPS 具有功能

时, 网络拓扑的容错本质上是由应用环境决定的.

有两个基本的功能性准则已引起人们的足够注意. 根据第一个准则, 系统只要它的网络拓扑结构逻辑上包含某个拓扑结构, 那么该系统被认为是有功能. 这就是1.3.2 节介绍的嵌入一个结构到另一个结构的问题. 利用这种功能性准则来达到系统容错性的方法是通过系统的冗余元件和重组来实现的. 这个准则是 Hayes[146] 首先提出的.

第二个功能性准则, 只要网络中任何两个非故障元件之间存在非故障通信路线, 就认为该系统具有功能. 换句话说, 尽管故障出现, 但网络的拓扑结构仍保持连通. 在这本书中, “容错性”总是指这种情形. 这种容错模型的大规模超级计算机系统特别适用于运行这样的并行算法, 它的性能对网络拓扑结构的微小变化几乎不敏感. 但这样的系统一般是容许故障弱化的.

许多作者已提出若干个容错性的度量参数. 这些度量或者是确定性的, 或者是概率性的. 大部分作者利用图论概念来研究容错性的确定性度量, 连通度是最主要的图论概念.

如果图 G 表示互连网络的拓扑结构, 那么 G 的连通度 $\kappa(G)$ (或者边 $\lambda(G)$) 就是导致网络瘫痪的所需的最小元件个数 (或者连线条数). 换句话说, 网络能容许 $\kappa(G)-1$ 个元件或者 ($\lambda(G)-1$ 条连线) 同时发生故障, 而剩余网络仍能继续保持正常运行. 因此, 图 G 的连通度和边连通度越高, 它所代表的互连网络的可靠性越大. 另一方面, 如果 G 是 w 正则 w 连通的, 那么 G 有最优连通度和最小的边数. 因此, w 正则 w 连通图代表了最经济最可靠的网络拓扑结构. 由此可知, 连通度和边连通度是网络容错性最重要的确定性度量参数. 正因为如此, 图的连通度已吸引了相当多的研究注意力. 关于连通度的早期研究结果可参见一篇综述文献 [237].

在网络中每个点或者每条边的故障概率已知的条件下, 当故障发生时, 系统能正常运行的概率是一个主要的概率性度量参数. 设 G 是网络拓扑结构, 并设 G 中每个点 (每条边) 的故障出现概率为 p_v (p_e). 那么, G 的点和边故障概率 $R_v(G,p_v)$ 和 $R_v(G,p_v)$ 可分别表示为:

$$R_v(G,p_v)=\sum_{i=\kappa}^{v}\ell_i p_v^i(1-p_v)^{v-i} \tag{1.5.1}$$

和

$$R_e(G,p_e)=\sum_{i=\lambda}^{\varepsilon}c_i p_e^i(1-p_e)^{\varepsilon-i}, \tag{1.5.2}$$

其中 ℓ_i (c_i) 是 G 中由 i 个顶点 (边) 组成的点分离集 (边截) 的数目, 并且所有点 (边) 的故障出现是相互独立的. 于是, $1-R_v(G,p_v)$ 或者 $1-R_e(G,p_e)$ 是该网络可靠性的度量参数. 计算 $R_v(G,p_v)$ 或者 $R_e(G,p_e)$ 的主要困难是计算 ℓ_i 和 c_i. 当 v 和 ε

相当小时, 可以通过枚举法来计算 ℓ_i 和 c_i. 否则, 只有通过近似算法得到 ℓ_i 和 c_i 的近似值了.

网络容错性的概率性度量是比确定性度量更能模拟实际情况, 但 Ball[15] 已经证明: 具有实际意义的所有概率性度量在计算上是NP 难问题. 有兴趣的读者可参阅综述文献 Boesch[35]. 这本书关心的是网络容错性的确定性度量.

§1.6 网络设计的基本原则

在这一节, 我们首先进一步说明互连网络拓扑结构的重要性, 然后用图论语言介绍一下在互连网络设计过程中所必须遵循的几个基本原则.

超大规模集成 (VLSI, very large scale integrated) 电路技术的出现和现代通信技术的高速发展已给计算机的理论、技术和应用都带来了深刻的革命, 它使人们能构造出更复杂, 更快捷, 而又更经济的高性能计算机, 大规模超级计算机系统和互连网络. 随着科学技术的飞速发展, 需要利用计算机处理的数据越来越大, 随着科学技术, 商业, 电信, 军事等行业竞争的日益加剧, 建造更大规模的超级计算机 (或处理) 系统共同平行交换和处理巨大的数据是势在必行的. 这就要求人们不但要设计出既有效可靠, 又方便经济的网络来, 还要设计出与之匹配的各种支持软件 (包括算法, 一般为并行算法) . 这是对网络设计者提出的严重挑战. 已经证实, 利用现行的硬件技术 (如微电子技术, VLSI, 光缆技术) 构造大规模计算机互连网络和并行超级计算机系统是可能的. 然而, 在设计这样的系统时, 选择什么样的互连网络拓扑至关重要. 互连网络拓扑的选择不但要考虑系统的性能, 更要考虑系统的制造成本. 让我们摘录 W. D. Hillis 在他的著作《The Connection Machine》[160]) 中一段原文来说明这一点.

The most difficult technical problem in the design of a Connection Machine is the design of the general interconnection networks through which the processors communicate. The communications network represents most of the cost of the machine, most of the power dissipation, most of the wiring, and most of the performance limitations. This is in part because we have relatively little experience in designing such networks. So our methods are far from optimal. But it is also because designing such networks is fundamentally hard; the communication network is doing most of the computation.

高性能低成本始终是超大规模网络设计者所必须遵循的两大基本原则, 也是网络设计者所追求的目标. 但影响网络性能和成本的因素很多, 这里只从网络拓扑结构上来考虑. 本节介绍衡量大规模超级计算机系统互连网络的高性能低成本的基本度量和设计这样的网络时所必须遵循的基本原则. 正如我们所知道的, 互连网络的拓扑结构可以用图来表示, 所以用图论的语言来介绍这些基本原则. 按照 Bermond

和 Peyrat[31] 所总结的, 这些原则是:

1. 小的固定顶点度 (small or fixed degree) 即对应的图的最大顶点度是小的, 或者是事先固定的. 图的顶点度对应网络中结点（处理器, 计算机或其他设备等组件）能与其直接连接的结点数目, 这个数目一般是由结点中可利用的输出输入（I/O）端口数目所限制. 每个物理上连接的增加超过了限定的数目, 不但需要改变设备以增加输出输入端口数目, 还需要软件的支持. 这样不但会增加费用, 而且还会影响整个网络的性能. 小顶点度意味着结点处的小数目接口, 导致小的物理连接, 因而不仅使布线容易, 还会降低网络建造成本.

2. 小通信传输延迟 (small transmission delay) 网络中任何结点的信息传到该网络中任何另外结点所花的单位时间要尽可能的少, 即对应的图应具有小的直径或平均距离. 这就要求在信息传输的过程中要尽可能少的经过中间结点. 特别是在存储转发通信系统网络中, 数据存储转发所需的时间要比在通信线上传输时间要多得多. 现代科学, 工程和技术提出的大量重要问题, 除要求系统具有巨大的计算能力外, 还要求在短的时间内给出解. 例如, 图象处理, 雷达信号处理, 气象跟踪和预报, 快速复杂的核或化学反应的控制和空气动力模拟等实时系统都要求有小的传输延迟. 小的传输延迟不但确保网络的有效性, 而且也会降低网络建造成本. 好的网络应有小的直径和小的平均距离.

3. 简单的路由算法 (routing algorithm) 路由选择是数据传输必经之路, 它是决定互连网络性能的重要功能. 路由选择虽然是预先设计好的, 但数据在传输过程中所经过的路径是由路由器自动选择的, 因此简单有效的路由算法是必不可少的. 路由算法是互连网络设计的重要组成部分, 好的网络应包括好的路由算法.

4. 均匀性 (uniformity) 或对称性 (symmetry) 人们希望网络中所有组件都以相同的方式起动和连接, 使得在各结点的容量和连线的负载至少保持某些平衡. 这就要求对应图的顶点度相差较小或者网络拓扑结构应具有某些对称性, 最好是点可迁的, 因为点可迁图满足这两个性质.

5. 高容错性 (fault tolerance) 网络应有一定的容错性, 即容许网络中有若干数目的结点和 (或) 连线发生故障. 但当网络中若干结点和 (或) 连线发生故障时仍能继续有效地运行. 网络故障是不可避免的, 特别是超大规模计算机互连网络和计算机系统. 显然, 发生故障的结点和 (或) 连线的总数不超过最小顶点度. 当同一时间内, 发生故障的结点和 (或) 连线数目不超过固定值时, 网络中剩余结点之间仍能继续有效地运行. 存在许多度量网络容错性的参数, 但最常用最基本的参数是对应图的连通度. 这就要求对应的图具有高的连通度, 即任意两顶点之间存在尽可能多的内点 (或边) 不交的路, 这一要求对并行超级计算机系统尤为重要.

6. 可扩性 (extendability) 所提供的设计方法和利用该方法设计出网络是容易扩充的. 换句话说, 所提供的设计方法应该适用于构造任何给定规模的网络或构造任意多结点的网络, 即能从小网络构造大网络, 并保留小网络一样的性质. 这

样有利于将来扩容和升级以满足更大规模的需要. 由于某些限制, 开始时, 可将网络构造得小一点, 一旦需要添加新用户可以很容易扩充. 这种扩充不需要增加很高的费用, 还应保持原有网络的性质和软件支持. 好的网络应具有简单的扩充性.

7. 可嵌入性 (embeddability) 另外的简单网络拓扑（例如, 总线型网络, 单环网络, 二叉树网络等, 人们已经为这些简单网络设计了大量的有效算法）能嵌入所设计的网络拓扑中. 这是因为解决某些实际应用问题已有固定的算法和运行该算法固定的通信模式. 这些算法也可能只需在子网上运行, 它可以避免大网络固有的缺点（比如大规模网络容错性和有效性差）, 而且增加了可靠性和有效性. 用图论的术语来说, 拟设计的网络所对应的图应能包含一些简单的图（例如, 路, 圈, 二叉树等）作为它的子图, 或者说某些已知网络应以小膨胀数, 小膨胀率, 小拥塞和小负载而嵌入所设计的网络. 这样既有利于以这些简单网络为通信模式的算法的移植和兼容, 也方便那些已习惯于某些算法且能解决问题的用户, 同时减少网络拥塞和负载, 提高网络利用率.

8. 有效的布图算法 超大规模集成电路的布图是超大规模计算机系统设计所遇到的实际问题, 要使布图自动化就必须要有一个简明, 实用的布图算法. 这是超大规模互连网络设计时必须考虑的问题, 而且必须提供这样的算法. 从 1.2 节已经知道布图问题是个复杂的问题, 任何一种布图问题都属于 NPC 问题. 但对于具体互连网络来说, 布图问题的有效算法是可能存在的.

容易看出, 以完全图为拓扑结构的完全连通网具有上面列出的许多性质. 但对于大规模超级计算机系统来说, 这是非常不现实的. 因为随着顶点数的增加, 顶点度也随着增加, 这不但需要大量的经费, 而且任何硬件都难以承受. 总线, 星形, 树形和单环网络结构简单, 比较经济且具有上面列出的大部分性质, 但致命的弱点是可靠性和有效性差.

事实上, 费用和高性能始终是网络设计中一对矛盾. 除此之外, 上面列出的原则相互之间也包含着矛盾. 例如, 不能既要有小的顶点度, 又要有大的连通度. 同样的, 如果固定最大度 d 和直径 k, 那么, 能被互连的组件最大个数由一个关于 d 和 k 的函数 $M(d,k)$ (即 Moore 界, 将在第 5 章讨论) 所控制. 因此, 最优是相对的, 它只是对某个性能度量而言. 一个网络对度量参数甲是最优的, 但对度量参数乙不一定是最优的. 所谓网络的最优设计是对影响网络费用和性能各种因素的一种好的权衡 (这就是文献中经常见到的词 “trade-off” 的含义). 任何好网络的设计实质是各种因素都要均衡考虑的一个妥协方案.

习 题

1.1 证明定理 1.2.2 (a) 和 (b).

1.2 证明定理 1.2.3 当 g 是偶数的情形和定理 1.2.5.

1.3 证明：设 G 是 n 阶连通图, 则 $\gamma(G) \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 且 $\gamma \leqslant \alpha(G)$.

1.4 计算高为 h 的完全 k 叉树的顶点数.

1.5 给出高为 2 的完全 2 叉树到立方体 Q_3 的嵌入 ϕ 使得 $\mathrm{dil}\ \phi = 1$.

1.6 证明：如果 G 的交叉数至多为 5, 那么 $\delta(G) \leqslant 5$.

1.7 证明：设 G 是 n 阶连通平衡有向图.

(a) 若 G 是正则的, 则 $d(G) \leqslant \frac{3n-\delta-3}{\delta+1}$;

(b) 若 G 无对称边, 则 $d(G) \leqslant \frac{5n}{2\delta+2}$;

(c) 若 G 无对称边, 则 $d(G) \leqslant \frac{4n}{2\delta+1}$.

1.8 证明：设 D 是 n 阶 d 直径的强连通有向图, 那么

$$\varepsilon(D) \leqslant n(n-k+1) + \frac{1}{2}(k^2-k-4).$$

1.9 证明：无向圈 C_n 的平均距离为

$$\mu(C_n) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{4}, & \text{若 } n \text{ 是奇数;} \\ \dfrac{n^2}{4(n-1)}, & \text{若 } n \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

1.10 设 G 是 2 连通无向图,

$$\sigma_x(G) = \sum_{y \in V \setminus \{x\}} d(G; x, y), \quad x \in V(G).$$

证明：$\sigma_x(G) \leqslant \lfloor \frac{1}{4} v^2 \rfloor$.

1.11 设 G 是连通的无向图. 证明：若 $x \in V(G)$ 是割点, 则存在 $y \in N_G(x)$ 使得 $\sigma_y(G) > \sigma_x(G)$.

1.12 阅读参考文献 [193], 给出定理 1.4.6 的证明.

1.13 查阅参考文献, 给出定理 1.5.5 的证明.

1.14 设 G 是 n 阶图. 如果对任何 $x, y \in V(G)$ 均有 $d_G(x) + d_G(y) \geqslant n + w - 1$, 那么 G 是 w 连通的.

1.15 证明：如果 G 是 n 阶 k 连通无向图, 那么 G 中距离最多为 2 的点对数至少为 $\min\{2kn, n(n-1)\}$.

第二部分

互连网络拓扑结构设计的基本方法

第 2 章　网络设计的线图方法

从第 1 章的讨论, 我们已经知道, 互连网络的拓扑结构就是图. 所谓互连网络拓扑结构设计实质上是构造满足给定要求的图.

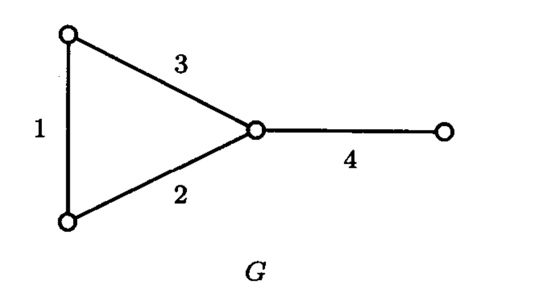
这一章介绍网络设计的线图方法. 线图的概念是由 Harary 和 Norman[144] 于 1960 年首先提出来的. 它是从一个已知图构造另一个更大的图的重要方法. 线图中的许多图论参数, 比如顶点度, 直径, 连通度, Euler 性和 Hamilton 性等都可以很方便地从原始图导出来. 线图是从图中与边有关的性质导出与顶点有关的性质的重要工具. 线图也是图论中重要的研究专题, 一篇综述文献见 Hemminger 和 Beineke[157]. 线图方法被广泛用于互连网络拓扑结构设计, 同时线图在网络拓扑结构分析中也起了重要作用 (见 Fiol 等 [115] 和 Reddy 等 [268]).

§2.1　线图的概念和基本性质

本节介绍线图的定义和它的一些基本性质.

设 $G=(V,E)$ 是无孤立点的简单无向图. G 的线图 (line graph), 记为 $L(G)$, 顶点集为 $E(G)$, 对 G 中任何两条不同的边 e_1 和 e_2, 它们在 $L(G)$ 中相邻当且仅当它们在 G 中相邻.

例如, 图 2.1 所示的是无向图 G 和它的线图 $L(G)$. 下面的定理给出线图的一些基本性质.



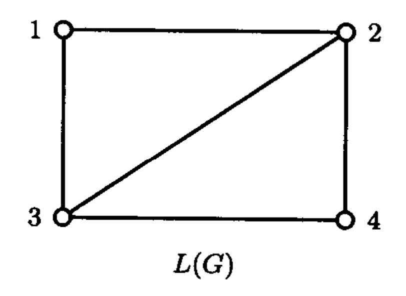


图 2.1　无向图 G 和它的线图 $L(G)$

定理 2.1.1　设 G 是无向图, $L(G)$ 是 G 的线图.

(a) $L(G)$ 是简单图, 且 $v(L(G))=\varepsilon(G)$.

(b) $e=xy\in E(G)$, 有 $d_{L(G)}(e)=d_G(x)+d_G(y)-2$, 因此 $\delta(L(G))=\xi(G)$. 特别地, 若 G 是 d 正则的, 则 $L(G)$ 是 $(2d-2)$ 正则的.

(c) $x\in V(G)$, G 中与 x 关联的边集在 $L(G)$ 中的导出子图是完全图.

(d) $\varepsilon(L(G))=\frac{1}{2}\sum\limits_{x\in V(G)}(d_G(x))^2-\varepsilon(G)$.

(e) 若 G 是连通的, 则 $L(G)\cong G$ 当且仅当 G 是圈.

证明 由线图定义, 结论 (a), (b) 和 (c) 是显然的. 我们证明 (d) 和 (e).

由结论 (c) 知, 对任何 $x \in V(G)$, G 中与 x 关联的边在 $L(G)$ 中的导出子图有

$$\binom{d_G(x)}{2} = \frac{1}{2}d_G(x)(d_G(x)-1)$$

条边. 因此,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(L(G)) &= \frac{1}{2}\sum_{x\in V(G)} d_G(x)(d_G(x)-1)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{x\in V(G)} (d_G(x))^2 - \frac{1}{2}\sum_{x\in V(G)} d_G(x)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{x\in V(G)} (d_G(x))^2 - \varepsilon(G),
\end{aligned}$$

其中最后一个等式成立是根据定理 1.2.1 (b). 于是, 结论 (d) 成立.

下面证明结论 (e). 因为无向圈的线图显然是无向圈, 所以充分性成立. 为证明其必要性成立, 假定 G 是连通的且 $L(G) \cong G$. 由图的同构性质和线图的定义, 有

$$v = v(G) = v(L(G)) = \varepsilon(G) = \varepsilon(L(G)). \tag{2.1.1}$$

由式 (2.1.1) 和结论 (d), 有

$$2v = v + \varepsilon = \frac{1}{2}\sum_{x\in V(G)} (d_G(x))^2. \tag{2.1.2}$$

由式 (2.1.1), (2.1.2) 和 Cauchy 不等式, 得

$$\begin{aligned}
4v = \sum_{x\in V(G)} (d_G(x))^2 &\geqslant \frac{1}{v}\left(\sum_{x\in V(G)} d_G(x)\right)^2\\
&= \frac{1}{v}(2\varepsilon)^2 = \frac{4}{v}\varepsilon^2 = \frac{4}{v}v^2 = 4v.
\end{aligned}$$

这意味着对任何 $x \in V(G)$, 存在正整数 d 使得 $d_G(x) = d$. 从 $v = \frac{1}{2}dv$ 得 $d = 2$. 因为 G 是连通的, 所以 G 是圈. ∎

很自然地, 线图的概念可以推广到有向图. 设 $G = G(V, E)$ 是无孤立点的有向图 (可以有环和平行边). G 的线图 (line digraph), 记为 $L(G)$, 是这样一个有向图: $V(L(G)) = E(G)$, 对 G 中任何两个有向边 a 和 b, 它们在 $L(G)$ 中相邻, 当且仅当 a 的终点是 b 的起点. 有向图的线图, 通常简称为有向线图.

例如, 图 2.2 所示的是有向图 G 和它的线图 $L(G)$. 下面的定理概述了有向线图的基本性质.

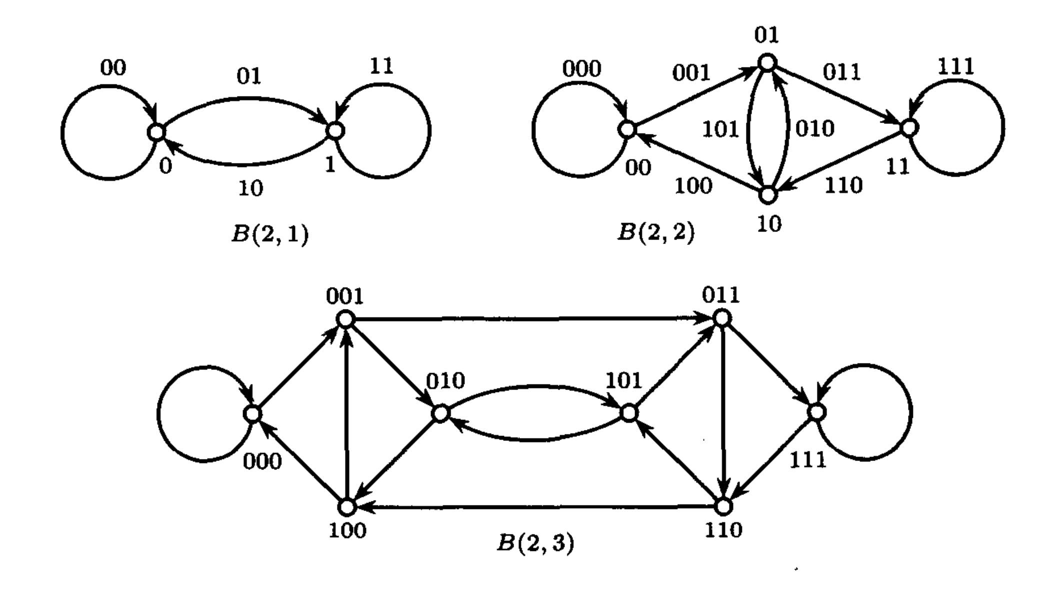


图 2.2 有向图 $B(2,i)$ 和它的线图 $L(B(2,i)) = B(2,i+1)$, $i = 1,2$

定理 2.1.2 设 G 是有向图, $L(G)$ 是它的线图.

(a) $v(L(G)) = \varepsilon(G)$, 而且 $L(G)$ 在顶点 a 处有环当且仅当 a 是 G 的环.

(b) 对任何 $a = (x,y) \in E(G)$, 有 $d^+_{L(G)}(a) = d^+_G(y)$, 且 $d^-_{L(G)}(a) = d^-_G(x)$. 特别地, 若 G 是 d 正则的, 则 $L(G)$ 也是 d 正则的.

(c) 若 G 不含环, 则对任何 $x \in V(G)$, 由 $E^-_G(x)$ 和 $E^+_G(x)$ 在 $L(G)$ 中导出的子图是 2 部划分为 $\{E^-_G(x), E^+_G(x)\}$ 的完全 2 部分有向图, 所有边的方向都是从 $E^-_G(x)$ 到 $E^+_G(x)$.

(d) $\varepsilon(L(G)) = \sum\limits_{x \in V(G)} d^+_G(x) d^-_G(x)$.

(e) 若 G 是强连通的, 则 $L(G) \cong G$ 当且仅当 G 是有向圈.

证明 我们只证明结论 (e), 其余的留给读者作为练习. 因为有向圈的线图仍是有向圈, 所以充分性成立. 为了证明必要性, 假定 G 是强连通有向图, 且 $L(G) \cong G$. 由图的同构性质和有向线图的定义得,

$$v = v(G) = v(L(G)) = \varepsilon(G) = \varepsilon(L(G)). \tag{2.1.3}$$

因为 G 是强连通的, 所以 $d^+_G(x) \geqslant 1$, $d^-_G(x) \geqslant 1$. 这意味着

$$d^+_G(x)\, d^-_G(x) \geqslant 1, \quad \forall\, x \in V(G). \tag{2.1.4}$$

因此, 由结论 (d) 和式 (2.1.4) 及 (2.1.3), 有

$$\varepsilon = \sum_{x \in V(G)} d^+_G(x)\, d^-_G(x) \geqslant \sum_{x \in V(G)} 1 = v = \varepsilon.$$

这意味着 $d^+_G(x) = d^-_G(x) = 1$ 对任何 $x \in V(G)$ 成立. 因为 G 是强连通的, 所以 G 是有向圈. ∎

注： 由线图的定义, 无向图的线图可以看成是有向线图的特殊情形. 因此, 在以下几节的讨论中, 如果没有特别声明, 只考虑有向线图的性质. 这些性质的大多数对无向线图都成立.

§2.2 线图的连通度与直径

鉴于连通度和直径在网络分析中的重要性, 本节讨论线图的连通度和直径与原图连通度和直径的关系.

定理 2.2.1 设 G 是阶数至少为 2 的连通有向图. 则 G 是强连通的当且仅当线图 $L(G)$ 是强连通的.

证明 假定 G 是强连通有向图, $a,b \in E(G)$. 则存在 $x,y,z,u \in V(G)$ 使得 $a=(x,y)$ 且 $b=(z,u)$. 令 P 是 G 中一条 (y,z) 路, $Q=\{a\}\cup P\cup\{b\}$. 那么, Q 的线图 $L(Q)$ 是 $L(G)$ 中一条 (a,b) 路.

反之, 假定 $L(G)$ 是阶数至少为 2 的强连通有向图, $x,y \in V(G)$. 不妨设存在 $a,b \in E(G)$ 使得 $a=(x,z)$ 且 $b=(y,u)\in E(G)$. 令 $W=(a,a_1,a_2,\cdots,d_m,b)$ 是 $L(G)$ 中一条最短 (a,b) 路. 这条路中的顶点, 即 G 中的边构成 G 中一条 (x,u) 链. 因此, G 中有一条 (x,y) 路. 由 $x,y\in V(G)$ 的任意性知, G 是强连通的. ∎

定理 2.2.2 设 G 是阶数至少为 2 的连通有向图, $L=L(G)$ 是 G 的线图. 则

$$\kappa(G)\leqslant\lambda(G)\leqslant\kappa(L)\leqslant\lambda(L).$$

证明 由 Whitney 不等式 (定理 1.5.2), 只需证明 $\kappa(L)\geqslant\lambda(G)$. 由定理 2.2.1, 假定 $\lambda(G)\geqslant 2$.

若 L 是完全图, 则没有什么可证的, 因为在这种情况下, G 和 L 都是 2 阶完全图. 以下假定 L 不是完全图. 任取 L 中顶点 a 和 b 使得 $(a,b)\notin E(L)$. 那么存在 $x,y,z,u\in V(G)$ 使得 $a=(z,x), b=(y,u)$. 考虑顶点 x 和 y. 因为 $(a,b)\notin E(L)$, 所以 $x\neq y$. 由 Menger 定理 (1.5.1), G 中存在 λ 条边不交的 (x,y) 路 $P_1,P_2,\cdots,P_\lambda$ 在图 G 中, 其中 $\lambda=\lambda(G)$. 通过这些路, 我们能容易地构造出 L 中 λ 条内点不交的 (a,b) 路. 由 Menger-Whitney 准则 (定理 1.5.3) 得 $\kappa(L)\geqslant\lambda=\lambda(G)$. ∎

由定理 2.1.2 和定理 1.5.2, 作为定理 2.2.2 的推论, 立刻得到下面的结果.

推论 设 L 是 d 正则有向图 G 的线图. 若 $\kappa(G)=d$, 则 $\kappa(L)=d$; 若 G 含环, 且 $\kappa(G)=d-1$, 则 $\kappa(L)=d-1$. ∎

定理 2.2.3 (Aigner[3]) 设 G 是阶数至少为 2 的强连通有向图, L 是它的线图. 则

$$d(G)\leqslant d(L)\leqslant d(G)+1.$$

而且, $d(G)=d(L)$ 当且仅当 G 是有向圈.

证明 因为 G 是强连通的, 所以由定理 2.2.1 知 $d(G)$ 和 $d(L)$ 都是确定的. 设 x, $y \in V(G)$ 使得 $d(G;x,y) = d(G)$, P 是 G 中最短 (x,y) 路. 令 $a \in E_G^-(x)$, $b \in E_G^-(y) \cap E(P)$, 并令 $Q = a + P$. 则 $L(Q)$ 是 L 中最短 (a,b) 路. 于是,

$$d(L) \geqslant \varepsilon(L(Q)) = \varepsilon(P) = d(G). \tag{2.2.1}$$

另一方面, 设 $a, b \in V(L)$ 使得 $d(L;a,b) = d(L)$. 则必存在 $x, y, z, u \in V(G)$ 使得 $a = (z,x), b = (y,u)$. 于是,

$$d(G) \geqslant d(G;x,y) = d(L;a,b) - 1 = d(L) - 1. \tag{2.2.2}$$

式 (2.2.1) 和式 (2.2.2) 意味着 $d(G) \leqslant d(L) \leqslant d(G) + 1$.

下面证明第二个结论. 若 G 是有向圈, 则由定理 2.1.2 (e) 知 $L \cong G$, 所以 $d(G) = d(L)$. 只需证明: 若 G 不是有向圈, 则 $d(L) = d(G) + 1$. 为此, 令 $d = d(G)$, $x, y \in V(G)$ 使得 $d(G;x,y) = d$. 则 G 中存在长为 d 的 (x,y) 路, 设为 P. 因为 G 是强连通的, 所以 $d_G^-(x) \geqslant 1$, 且 $d_G^+(y) \geqslant 1$.

若存在 $x', y' \in V(G)$ 使得 $a = (x',x)$, $b = (y,y')$ 且 $a \neq b$, 则 $d(L;a,b) = d + 1$. 若不然, 存在 $c \in E(G)$ 使得 $c = (y,x)$. 于是 $P \cup \{c\}$ 是 G 中有向圈, 用 $C = (x_0, x_1, \cdots, x_d, x_0)$ 表示这条有向圈, 其中 $x_0 = x$ 且 $x_d = y$. 因为 G 是强连通的, 但不是有向圈, 所以存在 $x_i \in V(C)$ 和 $z \in V(G)$ 使得 $(x_i, z) \in E(G)$ (可能 z 是某个 x_j $(0 \leqslant j < i)$). 取这样的顶点 x_i 使得 $i (0 \leqslant i \leqslant d)$ 尽可能的大. 则 $d(G; x_{i+1}, x_i) = d$. 令 $a = (x_i, x_{i+1})$ 和 $b = (x_i, z)$. 则 $d(L;a,b) = d+1$. 于是, $d+1 \geqslant d(L) \geqslant d(L;a,b) = d+1$. 这意味着 $d(L) = d+1$. ∎

注: 定理 2.2.1 和定理 2.2.2 对无向图是成立的, 但定理 2.2.2 的推论和定理 2.2.3 对无向图不成立.

§2.3 线图的 Euler 性和 Hamilton 性

下面的定理由 Aigner[3] 和 Kastelegn [185] 独立得到, 它刻画了原始图和线图的 Euler 性和 Hamilton 性之间的关系.

定理 2.3.1 设 G 是连通有向图. 则

(a) $L(G)$ 是 Euler 图当且仅当对每个边 $(x,y) \in E(G)$ 均有 $d_G^-(x) = d_G^+(y)$.

(b) $L(G)$ 是 Hamilton 图当且仅当 G 是 Euler 图.

证明 由定理 2.1.2 (b) 知, 条件 "每个边 $(x,y) \in E(G)$ 均有 $d_G^-(x) = d_G^+(y)$" 意味着 $L(G)$ 是平衡有向图. 所以, 由定理 1.2.6 知结论 (a) 成立. 下面证明结论 (b) 成立.

假定 G 是 Euler 图, C 是 G 中 Euler 迹. 则 C 的线有向图 $L(C)$ 显然是 $L(G)$ 中 Hamilton 圈.

反之, 因为环的存在不影响 Hamilton 圈的存在性, 所以不妨假定 G 无环. 设 H 是 $L(G)$ 中 Hamilton 圈, 则 $L(G)$ 是强连通的. 由定理 2.2.1 知 G 是强连通的, 而且对每个 $x \in V(G)$, H 必经过 $E_G^-(x)$ 中的点到 $E_G^+(x)$ 中的点. 这意味着对每个 $x \in V(G)$ 均有 $|E_G^-(x)| = |E_G^+(x)|$. 因此, 由定理 1.2.6 知, G 是 Euler 图. ∎

注 定理 2.3.1 (b) 中的条件对无向图不是必要的. 例如, 星 $K_{1,3}$ 的线图是 K_3, K_3 是 Hamilton 图, 而 $K_{1,3}$ 不是 Euler 图.

§2.4 多重线图

设 $L(G)$ 是图 G 的线图. 如果 $L(G)$ 是非空的并且没有孤立点, 那么存在 $L(G)$ 的线图 $L(L(G))$. 可以递归地定义 G 的 n 重线图. 对整数 $n \geqslant 1$, G 的 n 重线图 (nth iterated line graph), 记为 $L^n(G)$, 被递归地定义为 $L(L^{n-1}(G))$, 其中 $L^0(G)$ 和 $L^1(G)$ 分别为 G 和 $L(G)$, 并且假定 $L^{n-1}(G)$ 是非空的, 且没有孤立点. 利用上面已获得的结果, 对 $n \geqslant 1$ 用归纳法, 容易证明关于 n 重线图的下列结论, 其详细证明留给读者作为练习.

定理 2.4.1 设 G 是强连通有向图.

(a) 若 G 是 d 正则的, 则 $L^n(G)$ 是 d 正则的, 且有 $d^n v(G)$ 个顶点.

(b) $L^n(G) \cong G$ 当且仅当 G 是有向圈.

(c) 若 G 不是有向圈且 $d(G) = k > 0$, 则 $d(L^n(G)) = k + n$.

(d) 对于 $d\,(\geqslant 1)$ 正则图 G, 若 $\kappa(G) = d$, 则 $\kappa(L^n(G)) = d$; 若 G 含环且 $\kappa(G) = d - 1$, 则 $\kappa(L^n(G)) = d - 1$. ∎

由线图的定义, 线图 $L(G)$ 中顶点 x 表示有向图 G 中边, 比如 (x_0, x_1), 它可以看成是 G 中长为 1 的有向链. 若 G 中没有平行边, 则记 $x = x_0x_1$. 同样地, $L^2(G)$ 中顶点 x 表示 $L(G)$ 中边 (a, b), 且这条边对应 G 两条相邻的边, 比如, $a = (x_0, x_1)$, $b = (x_1, x_2)$. 因此, $L^2(G)$ 中顶点 x 表示 G 中长为 2 的有向链 (x_0, x_1, x_2). 记 $x = x_0x_1x_2$. 注意, (x_0, x_1, x_2) 是链, 它可能不是路. 顶点 x 与另一个顶点 y 相邻当且仅当 y 表示 $L(G)$ 中形如 (b, c) 的边. 所以, $c = (x_2, x_3) \in E(G)$, 且 $y = x_1x_2x_3$.

一般说来, 如果 G 是有向图, 那么由重线图定义, $L^n(G)$ 中顶点 x 表示 G 中长为 n 的有向链 $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$, 记为 $x = x_0x_1\cdots x_n$. 与它相邻的顶点必为 $y = x_1\cdots x_nx_{n+1}$, 其中 $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$. 因此, $L^n(G)$ 中长为 h 的有向路能被表示成 G 的顶点序列 $(x_0x_1\cdots x_nx_{n+1}\cdots x_{n+h})$, 其中 $(x_i, x_{i+1}) \in E(G)$, $i = 0, 1, \cdots, n + h - 1$.

这个事实表明, $L^n(G)$ 中任何两顶点之间最多存在一条长为 $h\,(\leqslant n + 1)$ 的有向路, 因为序列 $(x_0x_1\cdots x_nx_{n+1}\cdots x_{n+h})$ 是 $L^{n+h}(G)$ 的顶点. 利用这个事实, 容易设计出对应网络的简单路由算法 (参见文献 [115]).

作为 n 重线图的应用, 我们构造两类有向图, 它们都是重要的互连网络拓扑结构.

例 2.4.1 用记号 $K_d^+(d \geqslant 2)$ 表示在完全有向图 K_d 的每个顶点处添加一个环后得到的有向图. K_d^+ 也称为花完全有向图 (flowered complete digraph). 这里介绍的第一类重线图是著名的 de Brujin 有向图 (de Brujin digraph). 用 $B(d,n)$ 表示 de Brujin 有向图, 它定义为 K_d^+ 的 $(n-1)$ 重线图 $L^{n-1}(K_d^+)$. 图 2.2 中所示的有向图分别是 $B(2,1)$, $B(2,2)$ 和 $B(2,3)$, 其中 $B(2,1) = K_2^+$, $B(2,2) = L(B(2,1)) = L(K_2^+)$, $B(2,3) = L(B(2,2)) = L^2(K_2^+)$. 由定理 2.4.1, de Brujin 有向图 $B(d,n)$ 是 d 正则的, 阶为 d^n, 直径为 n, 连通度为 $d-1$. 我们将在第 7 章更详细地讨论这类图的性质.

例 2.4.2 另一类重线图是著名的 Kautz有向图 (Kautz digraph). Kautz 有向图, 记为 $K(d,n)$, 定义为 K_{d+1} 的 $(n-1)$ 重线图 $L^{n-1}(K_{d+1})$. 图 2.3 中所示的有向图分别是 $K(2,1)$, $K(2,2)$ 和 $K(2,3)$, 其中 $K(2,1) = K_3$, $K(2,2) = L(K(2,1)) = L(K_3)$ 和 $K(2,3) = L(K(2,2)) = L^2(K_3)$. 由定理 2.4.1, Kautz 有向图 $K(d,n)$ 是 d 正则的, 阶为 $d^{n-1}(d+1)$, 直径为 n, 连通度为 d. Kautz 有向图的其他重要性质将在第 8 章详细讨论.

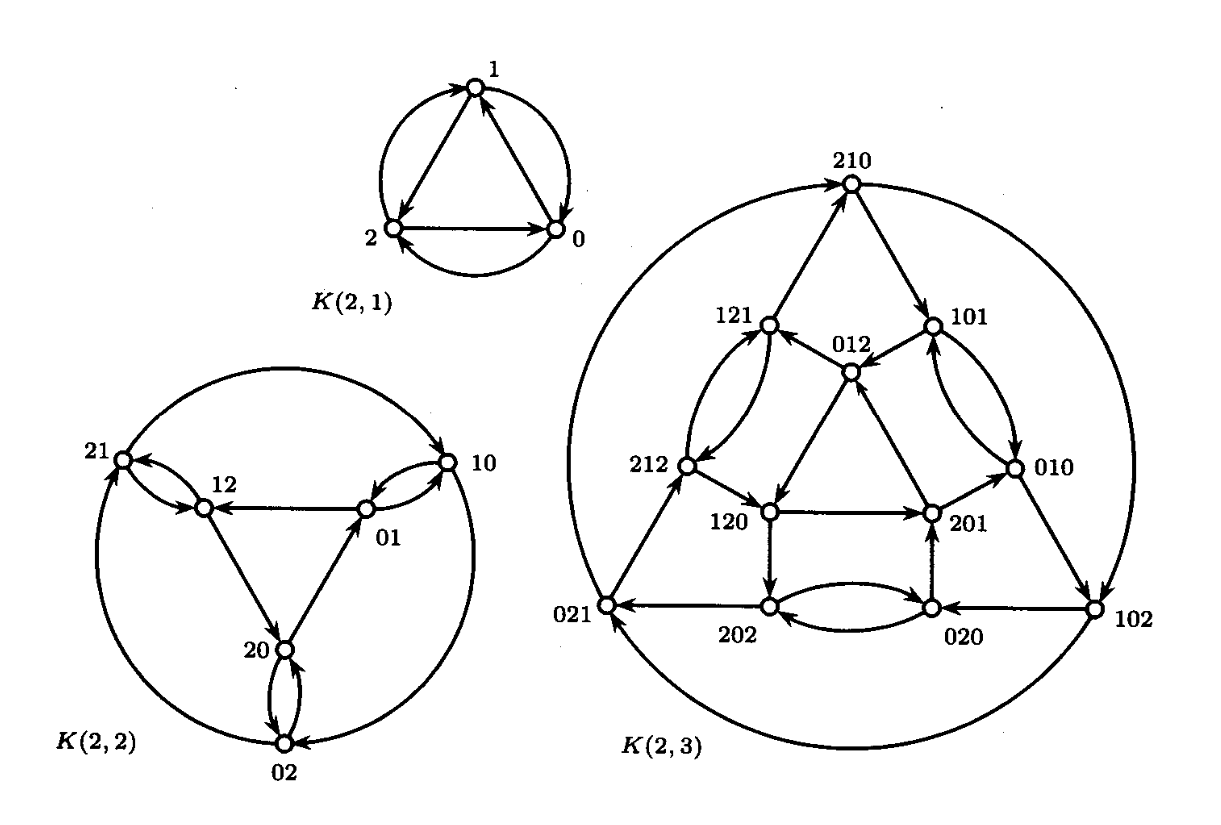


图 2.3 Kautz 有向图 $K(2,1)$, $K(2,2)$ 和 $K(2,3)$

关于重线图的进一步讨论和应用, 有兴趣的读者可参见文献 [115] 和文献 [83].

§2.5 无向线图的边连通度

从定理 2.2.2 的推论知, 对于 d 正则简单有向图 G, 如果 G 的连通度为 d, 那么它的线图 $L(G)$ 的连通度也为 d. 但这个结论对无向图不成立. 这是因为由定理 2.1.1 (b) 知, d 正则无向图的线图是 $(2d-2)$ 正则的. 因此讨论无向图连通度与它的线图连通度之间的关系是有意义的.

设 G 是连通无向图, L 是它的线图 $L(G)$. 为书写方便起见, 用 δ_G 和 δ_L 分别表示 G 和 L 的最小度, 用 λ_G 和 λ_L 分别表示 G 和 L 的边连通度. 下面的关系成立是显然的:

$$\lambda_L \leqslant \delta_L = \xi(G) \leqslant \Delta(G) + \delta(G) - 2,$$

其中 $\xi(G)$ 是 G 的最小边度. 首先, 引进一些记号.

设 $B \subset V(L) = E(G)$ 和 $\overline{B} = V(L) \setminus B$ 使得 $E_L(B) = E_L(B, \overline{B})$ 是 L 中 λ_L 割. 对 $x \in V(G)$, 令

$$\rho(x) = |E_G(x) \cap B|, \quad \overline{\rho}(x) = |E_G(x) \cap \overline{B}|.$$

显然, $d_G(x) = \rho(x) + \overline{\rho}(x)$. 令

$$X = \{x \in V(G) :\ \rho(x) > 0 \text{ 且 } \overline{\rho}(x) > 0\}.$$

则

$$\lambda_L = |E_L(B)| = \sum_{x \in X} \rho(x)\overline{\rho}(x).$$

下面的定理是本节的关键结果, 其他结果都能由此而导出.

定理 2.5.1 (Zamfirescu[354]) 如果 $\lambda_L < \lambda_G \left\lfloor \frac{1}{2}(\lambda_G + 1) \right\rfloor$, 那么 $\lambda_L = \delta_L$.

证明 (反证) 因为由 Whitney 不等式总有 $\lambda_L \leqslant \delta_L$, 所以假定 $\delta_L \geqslant \lambda_L + 1$. 我们将根据 X 是否是 G 的独立集来导出矛盾.

若 X 是 G 的独立集, 则因为

$$\rho(x) + \overline{\rho}(x) = d_G(x) \geqslant \lambda_G, \quad \forall\, x \in X,$$

所以, $\rho(x)$ 和 $\overline{\rho}(x)$ 至少有一个不小于 $\left\lfloor \frac{1}{2}(\lambda_G + 1) \right\rfloor$. 不妨设 $\overline{\rho}(x) \geqslant \left\lfloor \frac{1}{2}(\lambda_G + 1) \right\rfloor$. 注意到 $\sum_{x \in X} \rho(x) \geqslant \lambda_G$, 我们有

$$\begin{aligned}
\lambda_L = |E_L(B)| &= \sum_{x \in X} \rho(x)\overline{\rho}(x) \\
&\geqslant \left\lfloor \frac{1}{2}(\lambda_G + 1) \right\rfloor \sum_{x \in X} \rho(x) \geqslant \left\lfloor \frac{1}{2}(\lambda_G + 1) \right\rfloor \lambda_G > \lambda_L,
\end{aligned}$$

矛盾. 若 X 中存在两个相邻的顶点 x 和 y, 则

$$\begin{aligned}\rho(x)+\overline{\rho}(x)+\rho(y)+\overline{\rho}(y)&=d_G(x)+d_G(y)\\&\geqslant \xi(G)+2=\delta_L+2\geqslant \lambda_L+3.\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}\lambda_L=|E_L(B)|=\sum_{x\in X}\rho(x)\overline{\rho}(x)&\geqslant \rho(x)\overline{\rho}(x)+\rho(y)\overline{\rho}(y)\\&\geqslant (\rho(x)+\overline{\rho}(x)-1)+(\rho(y)+\overline{\rho}(y)-1)\\&=d_G(x)+d_G(y)-2\geqslant \xi(G)=\delta_L\geqslant \lambda_L+1,\end{aligned}$$

矛盾. 因此定理得证. ∎

推论 1 (a) 若 $\delta_L\leqslant \lambda_G\left\lfloor \frac{1}{2}(\lambda_G+1)\right\rfloor$, 则 $\delta_L=\lambda_L$.

(b) 若 $\delta_L\geqslant \lambda_G\left\lfloor \frac{1}{2}(\lambda_G+1)\right\rfloor$, 则 $\lambda_G\left\lfloor \frac{1}{2}(\lambda_G+1)\right\rfloor\leqslant \lambda_L\leqslant \delta_L$.

证明 (a) 由 Whitney 不等式, 我们只需证明 $\delta_L\leqslant \lambda_L$. (反证) 假定 $\delta_L>\lambda_L$. 由定理 2.5.1 得, $\delta_L=\lambda_L<\delta_L$, 矛盾.

(b) 只需证明 $\lambda_G\left\lfloor \frac{1}{2}(\lambda_G+1)\right\rfloor\leqslant \lambda_L$. (反证) 假定 $\lambda_G\left\lfloor \frac{1}{2}(\lambda_G+1)\right\rfloor>\lambda_L$. 由定理 2.5.1 得, $\delta_L=\lambda_L$. 于是,

$$\lambda_G\left\lfloor \frac{1}{2}(\lambda_G+1)\right\rfloor\leqslant \delta_L=\lambda_L<\lambda_G\left\lfloor \frac{1}{2}(\lambda_G+1)\right\rfloor,$$

矛盾. ∎

推论 2 (Chartrand and Stewart[58]) $\lambda_L\geqslant 2\lambda_G-2$.

证明 (反证) 假定 $\lambda_L<2\lambda_G-2$. 则

$$\lambda_G\geqslant 2 \quad 且 \quad \lambda_L<2\lambda_G-2\leqslant \lambda_G\left\lfloor \frac{1}{2}(\lambda_G+1)\right\rfloor.$$

由定理 2.5.1, $\lambda_L=\delta_L$. 于是,

$$2\lambda_G-2\leqslant 2\delta_G-2\leqslant \xi(G)=\delta_L=\lambda_L<2\lambda_G-2,$$

这个矛盾意味着 $\lambda_L\geqslant 2\lambda_G-2$. ∎

推论 3 若 $\lambda_G\neq 2$, 则 $\lambda_L=2\lambda_G-2$ 当且仅当 G 中存在两个相邻的 λ_G 度点.

证明 假定 $\lambda_G\neq 2$ 且 $\lambda_L=2\lambda_G-2$. 则 $\lambda_G>2$ 且

$$\lambda_L=2\lambda_G-2<\lambda_G\left\lfloor \frac{1}{2}(\lambda_G+1)\right\rfloor.$$

由定理 2.5.1, $\lambda_L=\delta_L$. 因此, 存在 $e=xy\in E(G)$ 使得

$$2\lambda_G\leqslant d_G(x)+d_G(y)=\xi(G)+2=\delta_L+2=\lambda_L+2=2\lambda_G.$$

注意到 $d_G(x) \geqslant \lambda_G$ 且 $d_G(y) \geqslant \lambda_G$, 故有 $d_G(x) = d_G(y) = \lambda_G$.

反之, 令 x 和 y 是 G 中两个相邻, 且度为 λ_G 的顶点. 则

$$\lambda_L \leqslant \delta_L = \xi(G) \leqslant d_G(x) + d_G(y) - 2 = 2\lambda_G - 2.$$

另一方面, 由推论 2 得, $\lambda_L \geqslant 2\lambda_G - 2$. 因此, $\lambda_L = 2\lambda_G - 2$. ∎

推论 4 若 $\lambda_G \geqslant 3$. 则 $\lambda_L = 2\lambda_G - 1$ 当且仅当 G 中存在两个相邻的顶点 x 和 y 使得 $d_G(x) = \lambda_G$ 且 $d_G(y) = \lambda_G + 1$.

证明 证明与推论 3 类似, 留给读者作为练习. ∎

定理 2.5.2 (Bauer and Tindell[20]) 若 $\kappa = \kappa(G) \geqslant 2$ 或者 $\lambda_G \geqslant 4$, 则 $\lambda_L \geqslant 2\delta_G - 2$.

证明 设 $x_0 \in X$ 使得

$$\rho(x_0)\overline{\rho}(x_0) = \min\{\rho(x)\overline{\rho}(x) :\ x \in X\}.$$

若 $|X| \geqslant 2$, 则

$$\begin{aligned}\lambda_L = |E_L(B)| &= \sum_{x\in X} \rho(x)\overline{\rho}(x) \geqslant |X|\rho(x_0)\overline{\rho}(x_0)\\ &\geqslant 2\rho(x_0)\overline{\rho}(x_0) \geqslant 2(\rho(x_0) + \overline{\rho}(x_0) - 1)\\ &= 2(d_G(x_0) - 1) \geqslant 2(\delta_G - 1).\end{aligned}$$

因为 $\kappa \geqslant 2$, 所以 $|X| \geqslant 2$. 于是, 我们只需考虑 $\lambda_G \geqslant 4$ 且 $|X| = 1$ 的情形. 为此, 令 $X = \{x\}$. 则 $G - x$ 是不连通的. 不妨设 $\rho(x) \leqslant \overline{\rho}(x)$. 于是, $\rho(x) \geqslant \lambda_G \geqslant 4$, 且

$$d_G(x) = \rho(x) + \overline{\rho}(x) \geqslant 2\lambda_G \geqslant 8.$$

因此, 得

$$\begin{aligned}\lambda_L = |E_L(B)| &= \sum_{x\in X} \rho(x)\overline{\rho}(x) = \rho(x)\overline{\rho}(x)\\ &= \rho(x)(d_G(x) - \rho(x)) \geqslant 4(d_G(x) - 4)\\ &\geqslant 2d_G(x) - 2 \geqslant 2\delta_G - 2.\end{aligned}$$

定理得证. ∎

当结束线图方法的讨论时, 我们必须注意到, 线图作为图论中的重要概念, 它不仅为我们提供了很有用的构图方法和分析工具, 特别是它在关于图的点和边命题之间起了桥梁作用, 而且线图本身也有重要的研究意义. 有兴趣的读者可参见一篇综述文献 [157], 它概述了有关线图研究的早期结果.

习　　题

2.1 构造一个有向图说明定理 2.1.2 (e) 中的“强连通”条件是不可缺少的.

2.2 (a) 证明定理2.2.2 的推论, 设 L 是 d 正则有向图 G 的线图. 若 $\kappa(G)=d$, 则 $\kappa(L)=d$; 若 G 含环, 且 $\kappa(G)=d-1$, 则 $\kappa(L)=d-1$.
(b) 并举例说明 (a) 中的结论对无向图不成立.

2.3 举例说明定理2.2.3 对无向图不成立.

2.4 证明: K_5-e 不是任何图的线图.

2.5 证明: 任何线图都不含4阶导出子图 $K_{1,3}$.

2.6 证明: 线图中任何顶点子集的导出子图是某个图的线图.

2.7 设 $E'\subset E(G)$, $|E|'\geqslant 2$, L' 是 $L(G)$ 的子图使得 $E'=V(L')$. 证明: 如果 L' 强连通, 则 $G[E']$ 也是强连通的. 如果 G 是无向图, 则 $G[E']$ 至少有3 个顶点.

2.8 证明定理2.5.1 的推论4: 若 $\lambda_G\geqslant 3$. 则 $\lambda_L=2\lambda_G-1$ 当且仅当 G 中存在两个相邻的顶点 x 和 y 使得 $d_G(x)=\lambda_G$ 且 $d_G(y)=\lambda_G+1$.

2.9 证明或者否定: $\lambda(G)\geqslant\kappa(L(G))$.

2.10 证明: $\mathrm{Aut}(K_n)$ 不同构于 $\mathrm{Aut}(L(K_n))$ 当且仅当 $n=2$ 或4.

2.11 证明: 若 $\delta(G)\geqslant 4$, 则 $\mathrm{Aut}(G)$ 和 $\mathrm{Aut}(L(G))$ 是同构的.

2.12 证明: 其线图同构的两个树是同构的.

2.13 设 G^c 是图 G 的补图. 若 $G\cong G^c$, 则称 G 是自补的 (self-complementary). 证明: $L(K_{3,3})$ 是自补的.

第 3 章　网络设计的Cayley 方法

这一章介绍互连网络的另一种构造方法, 它是由英国数学家A. Cayley[55] 提出来的, 故叫它Cayley 方法. 由Cayley 方法构造出来的图称为Cayley 图, 它是一类高对称图. Cayley 方法为网络的设计, 分析和改进提供了一类很重要的图论模型. Cayley 方法基于有限群, 故有些文献也称Cayley 方法为群论方法或者代数方法.

这一章首先回顾一下群的基本知识, 然后考虑一类更一般的高对称图 - 点可迁图和边可迁图. 它们有许多漂亮的性质, 因此是一类重要的且理想的互连网络拓扑结构. 接着介绍Cayley 构造方法, 它是构造点可迁图的重要方法, 讨论Cayley 图的基本性质, 最后讨论素阶点可迁图的结构.

§3.1　群的基本知识

本节只简单复习一下本章要用到的群论概念, 记号和结论.

非空集X 和X 上的二元运算$\circ$ 构成的代数结构$\Gamma=(X,\circ)$ 称为群 (group), 如果它满足: (i) 封闭性: 对任何$x,y\in X$, 均有$x\circ y\in X$;

(ii) 结合律: 对任何$x,y,z\in X$, 均有$(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$;

(iii) 单位元: 存在$e\in X$ 使得对任何$x\in X$, 均有$e\circ x=x\circ e=x$;

(iv) 逆元: 对任何$x\in X$, 存在$y\in X$ 使得$x\circ y=y\circ x=e$, x 的逆元记为x^{-1}.

一般称二元运算$\circ$ 为"乘法", 故可以简记$x\circ y$ 为xy; 记xx 为x^2. 通常也简记$\Gamma=(X,\circ)$ 为Γ. 若运算$\circ$ 满足交换律, 则称$\Gamma=(X,\circ)$ 为交换群或Abel 群.

集X 中元素的个数称为Γ 的阶 (order), 记为$o(\Gamma)$. 若X 是有限集, 则称Γ 为有限群. 本章只涉及有限群. 对于$x\in\Gamma$, 使$x^n=e$ 的最小正整数n 称为元素x 的阶.

只含单位元的群称为平凡群 (trivial group) 或单位群 (identity group). 若X 的非空子集S 对X 上的二元运算$\circ$ 也构成群$H=(S,\circ)$, 则称$H=(S,\circ)$ 为$\Gamma=(X,\circ)$ 的子群 (subgroup), 记为$H\subseteq\Gamma$ 或者$H\leqslant\Gamma$.

有限子群判定定理　群$\Gamma=(X,\circ)$ 的非空有限子集$S\subset X$ 构成Γ 的子群$\Longleftrightarrow$ 对任何 $a,b\in S\Longrightarrow a\circ b\in S$. ▮

设$H=(S,\circ)$ 为$\Gamma(X,\circ)$ 的子群, $\Gamma=(X\circ)$ 中包含$H=(S,\circ)$ 的所有子群的交称为由集S 生成的子群 (generating subgroup), 记为$<S>$. 生成集S 称为极小的 (minimal), 如果对任何$h\in S$, $<S\setminus\{h\}>$ 是 Γ 的真子群. 由非单位元素a 生成的子群$\langle a\rangle$ 称为 Γ 的循环子群 (cyclic subgroup). 若$\Gamma=\langle a\rangle$, 则称Γ 为循环群 (cyclic group), 元素a 称为生成元 (generator).

设Z_n 是整数模n 剩余类集, 则它在剩余类加法运算下所构成的群, 仍记为Z_n, 其中0 是单位元, i 的逆元是$n-i$. 因为1 是生成元, 所以这个群为n 阶循环群.

有限集 X 上所有置换(即双射) 在合成运算下构成群, 称为**对称群** (symmetry group), 记为 Sym(X). n 元集上的对称群(有时记为 S_n) 的阶为 $n!$. 对称群的子群称为**置换群** (permutation group). 设 H 是群 Γ 的子群, $x \in \Gamma$,

$$xH = \{xh:\ h \in H\} \quad 和 \quad Hx = \{hx:\ h \in H\}$$

分别称为 H 的**左陪集** (left coset) 和**右陪集** (right coset). H 在 Γ 中左陪集的个数(等于右陪集的个数) 称为 H 在 Γ 中的指数, 记为 $[\Gamma : H]$. 若对任何 $x \in \Gamma$ 均有 $xH = Hx$, 则称 H 是 Γ 的正规子群 (normal subgroup). 设 H 是 Γ 的正规子群, 在 Γ 的左陪集的集 Γ/H 上定义运算 $*$ 如下:

$$xH * yH = (xy)H, \quad \forall\ xH, yH \in \Gamma/H.$$

容易验证 Γ/H 在运算 $*$ 下构成群, 称为 Γ 对 H 的**商群** (factor group). 除单位子群和自身外不含其他正规子群的群称为**单群** (simple group).

Lagrange 定理 设 H 是有限群 Γ 的子群, 则 $o(\Gamma) = [\Gamma : H]o(H)$. ∎

推论 素数阶群必是循环群, 且是单群. ∎

设 $\Gamma = (X, \circ)$ 和 $\Phi = (Y, *)$ 是两个群. 若存在双(满) 射 $\varphi:\ X \to Y$ 且保持运算:

$$\varphi(a \circ b) = \varphi(a) * \varphi(b), \quad \forall\ a, b \in X,$$

则称 φ 为 Γ 到 Φ 的同构(态). 此时称 Γ 和 Φ 同构 (态), 并记 $\Gamma \cong \Phi$ $(\Gamma \sim \Phi)$.

Cayley 定理 任何有限群 $\Gamma = (X, \circ)$ 同构于 X 上的置换群; 任何 n 阶循环群同构于整数模 n 剩余类群 Z_n. ∎

设 φ 为 $\Gamma = (X, \circ)$ 到 $\Phi = (Y, *)$ 的同态, e' 是 Φ 的单位元.

$$\text{Ker}\ \varphi = \{x \in X:\ \varphi(x) = e' \in Y\}$$

称为 φ 的**核** (kernel).

同态定理 设 Γ 和 Φ 都是群. 则 Γ 到 Φ 的任何同态 φ 的核 Ker φ 是 Γ 的正规子群. 反之, 对于 Γ 的任何正规子群 H, 存在 Γ 到 Φ 的同态 π 使得 $H =$Ker π, 而且 $\Phi \cong \Gamma/H$. ∎

若群 Γ 到对称群 Sym(S) 内存在同态 φ, 则称群 Γ 作用在集 S 上. 此时可以在 S 上定义二元关系 R:

$$对\ x, y \in S,\ xRy \Longleftrightarrow 存在\ \pi 使得\ y = \pi(x).$$

容易验证 R 满足关系的三个性质: 自反性, 对称性和传递性, 即 R 是 S 上的等价关系. 于是可用 R 对 S 中元素进行等价分类. 由 $x \in S$ 所确定的等价类

$$S_x = \{y \in S:\ y = \pi(x),\ \pi \in \Gamma\}$$

称为x 的Γ 轨道 (orbit). S_x 中元素的个数称为该轨道的长; 而且

$$\Gamma_x = \{\pi \in \Gamma : \pi(x) = x\}$$

构成Γ 的子群. 该子群称为x 的*稳定子群* (stationary subgroup). 若S 中由R 确定的等价类只有一个, 则称群Γ 作用在集S 上是*可迁的* (transitive), 简称Γ 在S 上可迁. 换句话说, 若Γ 在S 上可迁, 则对任何$x, y \in S$, 存在$\pi \in \Gamma$ 使得$y = \pi(x)$.

设Γ 是有限集S 上的置换群. 若Γ 在S 上可迁, 则称 Γ 为S 的可迁群, 简称可迁群. 容易验证: 若Γ 是S 上的可迁群, 则对$x \in S$, Γ_x 是Γ 的正规子群. 由Lagrange 定理容易证明:

轨道长定理 设群Γ 同构于有限集S 上的置换群, Γ_x 和S_x 分别是任意元素$x \in S$ 的稳定子群和轨道, 则$o(\Gamma) = |S_x|o(\Gamma_x)$. ∎

推论 设Γ 是有限集S 上的可迁群, 则对任何$x \in S$, 有$o(\Gamma) = |S|o(\Gamma_x)$. ∎

若群$\Gamma = (X, \circ)$ 中的所有非单位元的阶都是素数p 的方幂, 则称Γ 为p 群. 设H 是Γ 的子群. 若H 是p 群, 则称H 为Γ 的p 子群. 若Γ 中除H 外没有其他包含H 的p 子群, 则称H 为Γ 的Sylow 子群.

Sylow 定理 设有限群$\Gamma = (X, \circ)$ 的阶$n = p^m s$, 其中p 是素数, p 不能整除s. 则Γ 有p^m 阶Sylow 子群H, 而且Γ 的每个p 子群都含在H 内. ∎

最后, 我们回顾一下n 个有限群$\Gamma_i = (X_i, \circ_i)$ 的笛卡儿乘积$\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \cdots \times \Gamma_n = (X, \circ)$, 其中$X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$. 对于运算$\circ$ 定义为:

$$(x_1x_2\cdots x_n) \circ (y_1y_2\cdots y_n) = (x_1 \circ_1 y_1)(x_2 \circ_2 y_2)\cdots(x_n \circ_n y_n),$$

其中x_i, $y_i \in X_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. Γ 中元素$x_1x_2\cdots x_n$ 的逆元$(x_1x_2\cdots x_n)^{-1} = x_1^{-1}x_2^{-1}\cdots x_n^{-1}$, 单位元是$e = e_1e_2\cdots e_n$, 其中对每个$i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, x_i^{-1} 是$x_i \in X_i$ 在Γ_i 中的逆元, $e_i \in X_i$ 是Γ_i 中的单位元.

例如, 考虑$Z_4 \times Z_2 = \{00, 10, 20, 30, 01, 11, 21, 31\}$. 对于任意$x_1x_2, y_1y_2 \in Z_4 \times Z_2$, $x_1, y_1 \in Z_4$, $x_2, y_2 \in Z_2$, 定义运算

$$(x_1x_2) \circ (y_1y_2) = (x_1 + y_1)(\mathrm{mod}\ 4)(x_2 + y_2)(\mathrm{mod}\ 2).$$

容易验证$Z_4 \times Z_2$ 在上述定义的运算下构成群, 单位元为00.

§3.2 可 迁 图

两个图G 和H 之间的同构是双射 θ: $V(G) \to V(H)$, 它满足保相邻性条件:

$$(x, y) \in E(G) \Leftrightarrow (\theta(x), \theta(y)) \in E(H).$$

图G的**自同构** (automorphism) 是G到自身的同构, 即$V(G)$上保相邻性条件的置换. 容易验证, 图G的所有自同构在复合运算下构成群, 记为$\mathrm{Aut}(G)$. 这个群称为G的**自同构群** (automorphism group).

例如, 完全图K_n的自同构群 $\mathrm{Aut}(K_n) = S_n$; 无向圈C_n的自同构群是$\mathrm{Aut}(C_n)$是$2n$阶的二面体群; 有向圈C_n的自同构群是n阶循环群. 确定一般图的自同构群是困难的.

现在叙述一个简单但很有用的结果.

定理 3.2.1 设G是图, X是$V(G)$的非空子集. 那么对任何$\theta \in \mathrm{Aut}(G)$, 它在$X$上的限制是$G[X]$和$G[\theta(X)]$之间的同构, 其中

$$\theta(X) = \{y \in V(G): \ y = \theta(x), x \in X\}.$$

证明 我们仅需证明G是有向图的情形.

如果$|X| = 1$, 则定理显然成立. 下面假定$|X| \geqslant 2$且$u, v \in X$. 因为θ是G的自同构, 所以

$$(u, v) \in E(G[X]) \Leftrightarrow (\theta(u), \theta(v)) \in E(G).$$

因为 $\theta(u), \theta(v) \in \theta(X)$, 所以

$$(u, v) \in E(G[X]) \Leftrightarrow (\theta(u), \theta(v)) \in E(G[\theta(X)]).$$

这说明θ在X上的限制是$G[X]$和$G[\theta(X)]$之间的同构. ∎

设x和y是G的两个顶点. 如果存在 $\theta \in \mathrm{Aut}(G)$ 使得$y = \theta(x)$, 那么x**相似于** (similar) y. 容易验证"相似"关系是$V(G)$上的等价关系.

如果G中每对顶点都是相似的, 那么称图G为**点可迁的** (vertex-transitive). 换句话说, 如果G是点可迁的, 那么对G的每对顶点x和y, 存在$\theta \in \mathrm{Aut}(G)$使得$y = \theta(x)$.

例 3.2.1 循环图是一类重要的点可迁图.

循环有向图 (circulant digraph), 记为$G(n; S)$, 其中$S \subseteq \{1, 2, \cdots, n-1\}, n \geqslant 2$, 它的顶点集$V = \{0, 1, \cdots, n-1\}$, 边集$E = \{(i, j)$: 存在$s \in S$使得$j - i \equiv s (\mathrm{mod}\ n)\}$. 图 3.1 (a) 中所示的有向图是循环有向图$G(8; \{1, 3\})$. 显然, $G(n; 1)$是有向圈C_n, 而$G(n; \{1, 2, \cdots, n-1\})$是完全有向图$K_n$.

循环无向图 (circulant undirected graph), 记为$G(n; \pm S)$, 其中$S \subseteq \{1, 2, \cdots, \lfloor \frac{1}{2}n \rfloor\}, n \geqslant 3$, 它的顶点集$V = \{0, 1, \cdots, n-1\}$, 边集$E = \{ij$: 存在$s \in S$使得$|j - i| \equiv s (\mathrm{mod}\ n)\}$. 图 3.1 (b) 中所示的无向图是循环无向图$G(8; \pm\{1, 3, 4\})$. 显然, $G(n; \pm 1)$是无向圈C_n, 而$G(n; \pm\{1, 2, \cdots, \lfloor \frac{1}{2}n \rfloor\}$是完全图$K_n$.

循环图是点可迁的. 事实上, 轮换$\pi = (012 \cdots n-1) \in \mathrm{Aut}(G(n; S))$, 且对任何$i, j \in V$ $(i < j)$ 有$\pi^{j-i}(i) = j$.

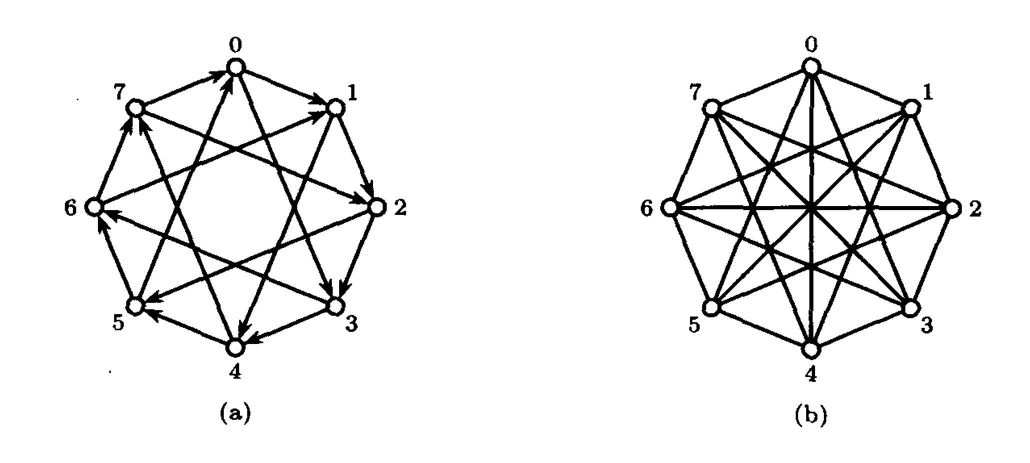


图 3.1 循环图 $G(8;\{1,3\})$ 和 $G(8;\pm\{1,3,4\})$

循环图是一类重要的互连网络拓扑结构, 某些网状互连网络实质上就是循环图对应的网络. 例如, 著名的ILLIAC 型计算机(Barnes 等 [18]), 它的互连网络是由 n^2 处理器组成, 这些处理器被看成是 n 阶方阵中的元素; 每个处理器与它相邻的四个处理器之间直接用双向通信线路相连, 周围的处理器之间环绕连接. 图 3.2 (a) 中所示的是16 处理器的 ILLIAC 型计算机互连网络. 事实上, 它是循环无向图 $G(16;\pm\{1,4\})$, 如图 3.2 (b) 所示. 一般地, n^2 个处理器的ILLIAC 型网络能被表示成循环无向图 $G(n^2;\pm\{1,n\})$. 循环图的性质将在第 9 章作详细讨论.

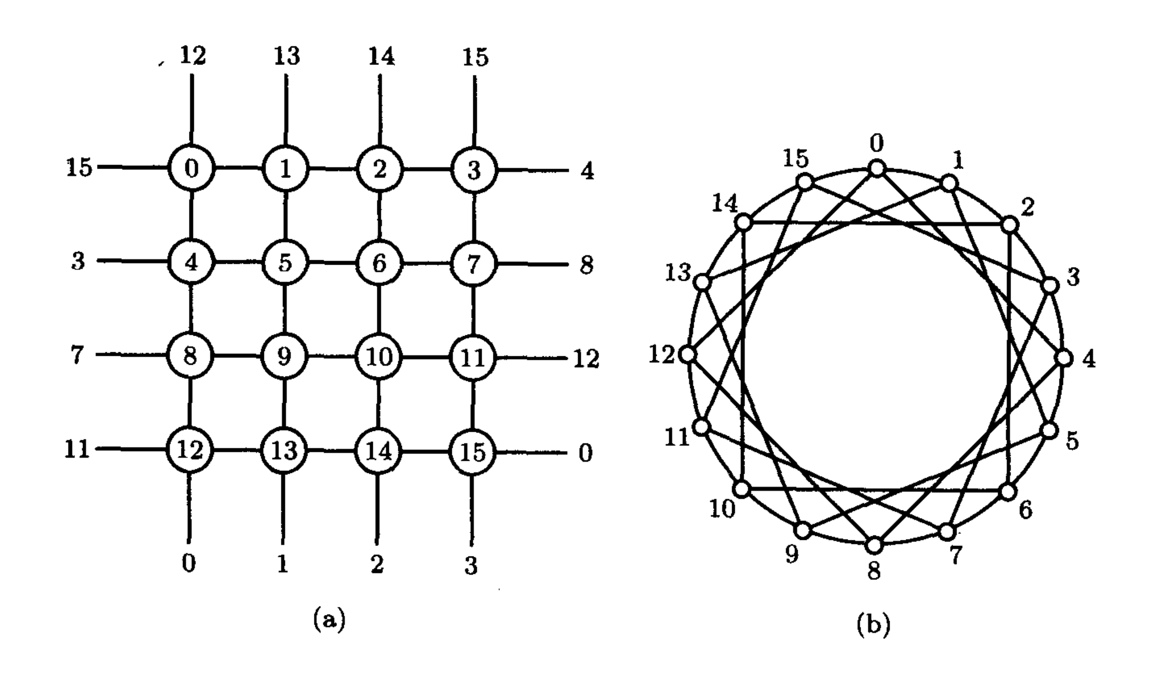


图 3.2 ILLIAC 型网络和它对应的循环图

例 3.2.2 Petersen 图 (见图 3.3) 是点可迁的, 它的自同构群是对称群 S_5. 详细的验证留给读者.

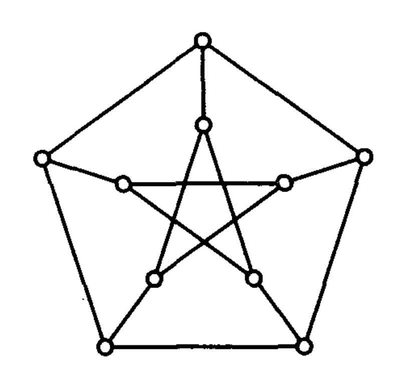


图 3.3 Petersen 图

一般说来, 证实一个任意给定的图是否是点可迁的是困难的. 下面给出点可迁图两个最基本的性质.

定理 3.2.2 设 G 是 n 阶点可迁图. 则

(a) G 是正则的;

(b) G 的所有 $n-1$ 阶子图是同构的.

证明 设 x 和 y 是 G 中任意两个不同的顶点. 因为 G 是点可迁的, 所以存在 $\theta \in \mathrm{Aut}(G)$ 使得 $y=\theta(x)$.

(a) 我们证明 $d_G^+(x)=d_G^-(x)=d_G^-(y)=d_G^+(y)$. 为此, 令

$$F=\{z\in V(G):\ z=\theta(u), u\in N_G^+(x)\},$$

则 $|F|=|N_G^+(x)|$, 且存在 $u\in N_G^+(x)$ 使得对任何 $z\in F$ 均有 $z=\theta(u)$. 由 θ 保相邻性, 得

$$(x,u)\in E(G)\Leftrightarrow(\theta(x),\theta(u))\in E(G)\Leftrightarrow(y,z)\in E(G).$$

这意味着 $z\in N_G^+(y)$. 于是, $F\subseteq N_G^+(y)$.

$$|N_G^+(x)|=|F|\leqslant|N_G^+(y)|.$$

同样地, 存在 $\pi\in\mathrm{Aut}(G)$ 使得 $x=\pi(y)$, 且 $|N_G^+(y)|\leqslant|N_G^+(x)|$. 因此,

$$d_G^+(x)=|N_G^+(x)|=|N_G^+(y)|=d_G^+(y).$$

同样地, 我们能证明 $d_G^-(x)=d_G^-(y)$. 由此和定理 1.2.1 知, 对任何 $x\in V(G)$, 我们得

$$d_G^+(x)=\frac{1}{n}\sum_{y\in V(G)}d_G^+(y)=\frac{1}{n}\sum_{y\in V(G)}d_G^-(y)=d_G^-(x).$$

由 $x\in V(G)$ 的任意性知, G 是正则的.

(b) 设 $X = V(G-x)$, 则

$$\theta(V(G-x)) = \theta(V(G)) \setminus \{\theta(x)\}$$

$$= \theta(V(G)) \setminus \{y\} = V(G) \setminus \{y\} = V(G-y).$$

由定理 3.2.1 知, $G-x \cong G-y$. ∎

在结束这一节之前, 我们对定理 3.2.2 的应用作个注释.

1. 正则性提供了点可迁图的一个必要条件. 因此, 任何非正则图都不是点可迁的. 然而, 正则性不是点可迁图的充分条件.

2. 由正则性和定理 1.2.5, 立刻得到连通的点可迁有向图必是强连通的, 而且是 Euler 图. 然而, 连通的点可迁无向图不一定是 Euler 图. 一个著名的例子是 Petersen 图.

3. 如果互连网络的拓扑结构是点可迁图, 那么性质 (b) 说明该网络中任何点发生故障不影响剩余网络的结构. 换句话说, 从任何点来看该网络都是一样的. 网络的这种性质有利于算法的设计和模拟.

4. 性质 (b) 对进一步分析点可迁图是有用的. 例如, 当考虑点可迁图的直径, 平均距离和连通度时, 只需考察从某个特定的点到任何其他点的情形就可以了.

作为例子, 考虑点可迁图 G 的直径. 设 x 和 u 是 G 的两个顶点使得 $d(G;x,u) = d(G)$, P 是 G 中最短 (x,u) 路. 设 z 是 x 在 P 上的邻点. 则 P 的子路 $P(z,u)$ 是 $G-x$ 中最短 (z,u) 路, 它的长为 $d(G)-1$. 设 y 是 G 中特定的顶点. 由于 G 是点可迁的, 所以存在 $\theta \in \mathrm{Aut}(G)$ 使得 $\theta(x) = y$. 由于 θ 保相邻性知, $(y,\theta(z)) \in E(G)$. 于是 θ 是 $G-x$ 和 $G-y$ 之间的同构. 子路 $P(z,u)$ 的像是 $G-y$ 中最短 $(\theta(z),\theta(u))$ 路, 它的长为 $d(G)-1$. 因此, $\theta(P)$ 也是一条最短 $(y,\theta(u))$ 路. 这意味着 $d(G;y,\theta(u)) = d(G)$.

点可迁图的这一性质能大大简化直径和平均距离的计算. 例如, n 阶点可迁图 G 的平均距离有一个简单的表达式:

$$\mu(G) = \frac{1}{n-1}\sum_{y\in V} d(G;x,y), \quad \forall\, x \in V(G).$$

5. (b) 中叙述的点可迁图的必要条件也是充分的, 证明留给读者.

6. 验证给定图是否是点可迁的是困难的, 但是, 构造一个点可迁图却很容易. 3.5 节将介绍这种构造方法.

与点可迁对应的概念是边可迁. 设 $a = (x,y)$ 和 $b = (u,v)$ 是 G 的两条边. 如果存在 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ 使得 $u = \sigma(x)$ 且 $v = \sigma(y)$, 那么称 a 与 b 是相似的 (similar). 容易验证关系"边相似"是 $E(G)$ 上的等价关系.

如果 G 中每对边都是相似的, 那么称图 G 为*边可迁的* (edge-transitive). 换句话说, 如果 G 是边可迁的, 那么对 G 中任何两条边 $a = (x,y)$ 和 $b = (u,v)$, 存在 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ 使得 $u = \sigma(x)$ 且 $v = \sigma(y)$.

完全图 K_n 和完全 2 部分图 $K_{n,n}$ 既是点可迁的, 也是边可迁的. 图 3.4 中所示的两个无向图, 其中 (a) 是点可迁的, 但不是边可迁的; 而 (b) 是边可迁的, 但不是点可迁的; 更一般地, 当 $m \neq n$ 时, $K_{m,n}$ 是边可迁的, 但不是点可迁的. 这些例子说明点可迁和边可迁是两个相互独立的概念.

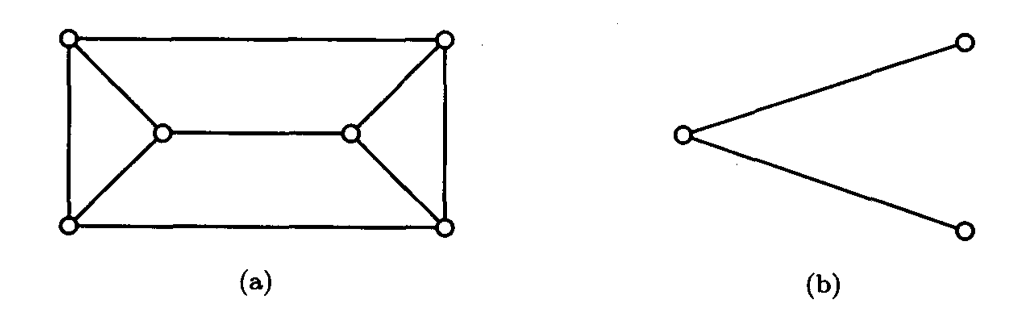


图 3.4 点可迁图和边可迁图

边可迁图不一定是正则的. 但容易证明边可迁图是边正则的, 它的证明留给读者.

定理 3.2.3 设 G 是无孤立点的边可迁图, 则 G 或者是点可迁图, 或者是 2 部分图.

证明 我们对有向图来证明这个定理. 因为图 G 无孤立点, 所以对任意的 $x \in V(G)$, 有 $d_G^+(x)$ 和 $d_G^-(x)$ 不同时为 0. 令

$$V_1 = \{x \in V(G):\ d_G^+(x) \neq 0\}$$

$$V_2 = \{x \in V(G):\ d_G^-(x) \neq 0\}.$$

因为 G 不含孤立点, 所以 $V_1 \cup V_2 = V(G)$. 显然, 如果 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, 则 G 为 2 部分图. 下面假定 $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.

考虑 V_1 中任意两顶点 u 和 w. 我们要证明 u 相似于 w. 由 V_1 的定义, $E_G^+(u) \neq \emptyset$ 且 $E_G^+(w) \neq \emptyset$. 因为 G 是边可迁的, 所以对任何 $e \in E_G^+(u)$ 存在 σ 使得 $\sigma(u) = w$, 这说明 u 相似于 w. 同理可证 V_2 中任何两顶点也相似. 因此, G 中任何两顶点是相似的, 即 G 是点可迁的. ∎

注 定理 3.2.3 对无向图也成立 (Harary[140]), 但上述证明方法不适宜于无向图. 关于无向图的证明留给读者作为练习.

推论 1 设 G 是连通的边可迁图. 如果 G 不是正则的, 那么 G 是 2 部分图. ∎

推论 2 设 G 是连通的奇阶边可迁无向图. 如果 G 是正则的, 那么 G 是点可迁的. ∎

推论 3 设 G 是偶阶连通的边可迁无向图. 如果 G 的每个顶点 x 满足 $d_G(x) = d \geq \frac{1}{2}v(G)$, 那么 G 是点可迁的. ∎

由这三个推论知, 还没有被刻画的边可迁图只有偶阶且正则度为$d < \frac{1}{2}v$ 的图. 无向圈C_6 是边可迁图, 它既是点可迁的, 又是2 部分图. 二十面体, 十二面体和Petersen 图都是边可迁图, 它们是点可迁的, 但不是2 部分图. 并不是所有的正则边可迁图都是点可迁的. 事实上, Folkman[120] 已经证明了一般的结果: 对任何$m \geqslant 5$, 存在$4m$ 阶正则无向图, 它是边可迁的, 但不是点可迁的.

§3.3 图的原子

设G 是强连通有向图, F 是$V(G)$ 的非空真子集. 如果$N_G^+(F)$ 是G 的κ 分离集, 那么F 称为G 的*正分片* (positive fragment). 同样地, 如果$N_G^-(F)$ 是G 的κ 分离集, 那么F 称为G 的*负分片* (negative fragment). 正分片和负分片都称为G 的*分片* (fragment). 顶点数最小的分片称为*原子* (atom). 原子中顶点数称为G 的*原子数* (atomic number), 记为$a(G)$. 如果原子A 是正分片 (负分片), 那么称A 是*正原子* (*负原子*).

在讨论原子性质之前, 对原子的定义作几个注释.

1. 分片和原子的概念对强连通有向图有意义. 故当我们讨论原子性质时总假定所涉及的图是强连通的. 任何非完全图必有原子, 由原子导出的子图必是强连通的, 而且对任何强连通图G 必有

$$1 \leqslant a(G) \leqslant \frac{1}{2}(v(G) - \kappa(G)).$$

2. 如果F 是G 的正原子(或者分片), 那么F 是G 的逆图$\overleftarrow{G}$ (即改变G 中每条有向边的方向后得到的有向图) 的负原子(或者分片). 这个简单事实是很有用的, 因为假定某个有关正原子 (或者分片) 的结论对任何有向图G 成立, 那么通过考虑它的逆图$\overleftarrow{G}$ 知, 这个结论对负原子 (或者分片) 也成立. 反之亦然.

3. 一般说来, 正负原子不一定同时存在.

4. 为方便起见, 我们约定完全图的每个顶点都是原子, 它是正原子, 也是负原子.

5. 分片和原子的概念对无向图来讲是简单的. 例如, 设G 是无向图, F 是$V(G)$ 的非空真子集. 如果$N_G(F)$ 是G 的κ 分离集, 那么称F 为G 的分片.

6. Watkins[306] 首先提出无向图的原子概念, Chaty[59] 推广原子概念到了有向图.

定理 3.3.1(Hamidoune[134]) 设 A 是 G 的正 (负) 原子. 那么对任何 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)\sigma(A)$ 是G 的正 (负) 原子.

证明 若$|A| = 1$, 则结论显然成立. 下面, 假定$|A| > 1$, 并不妨设A 是G 的正

原子. 因为 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ 保相邻性, 所以 $N_G^+(\sigma(A)) = \sigma(N_G^+(A))$. 因此,

$$|N_G^+(\sigma(A))| = |\sigma(N_G^+(A))| = |N_G^+(A)| = \kappa(G).$$

这说明 $\sigma(A)$ 是 G 的正原子. ∎

定理 3.3.2 设 A 和 F 分别是有向图 G 的正原子和正分片. 那么 $A \subseteq F$, 或者 $A \cap F = \emptyset$.

证明 我们只需证明: 如果 $A \cap F \neq \emptyset$, 那么 $A \subseteq F$. (反证) 假定 $A \not\subseteq F$, 我们将导出矛盾. 为此, 令

$$C = N_G^+(A), \quad D = N_G^+(F), \quad H = V(G) \setminus (A \cup C), \quad R = V(G) \setminus (F \cup D).$$

那么,

$$|A| \leqslant |F|, \quad |C| = |D| = \kappa(G), \quad |H| \geqslant |R| \geqslant |A|.$$

因为 $A \cap F \neq \emptyset$, 所以 $N_G^+(A \cap F)$ 是 G 的分离集. 因为 $|A \cap F| < |A|$, 所以 $|N_G^+(A \cap F)| > \kappa(G)$. 因此,

$$|A \cap D| > \kappa - |(C \cap F) \cup (C \cap D)| = |C \cap R|.$$

如果 $H \cap R \neq \emptyset$, 那么,

$$\kappa(G) \leqslant |N_G^-(H \cap R)| \leqslant |C| + |D| - |N_G^+(A \cap F)| < \kappa(G).$$

这个矛盾说明: $H \cap R = \emptyset$. 由于 $|A \cap D| > |C \cap R|$, 所以,

$$|A| \leqslant |R| = |(A \cap R) \cup (C \cap R)| < |A \cap R| + |A \cap D| < |A|,$$

矛盾. 定理得证. ∎

定理 3.3.3 (Watkins[306]) 设 A 和 C 分别是连通无向图 G 的原子和 κ 分离集. 那么 $A \subseteq C$ 或者 $A \cap C = \emptyset$.

证明 设 $A \not\subseteq C$. 因为 C 是 G 的 κ 分离集, 那么存在分片 F 使得 $N_G(F) = C$ 且 $A \cap F \neq \emptyset$. 由定理 3.3.2, 有 $A \subseteq F$. 因此, $A \cap C = \emptyset$. ∎

注 定理 3.3.3 对有向图是不成立的, 参见图 3.5 (b) 和 3.6 节末的注释 3.

作为定理 3.3.2 和定理 3.3.3 的直接推论, 立即得到下面的结果.

定理 3.3.4 强连通有向图中任何两个正 (负) 原子是不交的. 特别地, 连通无向图中任何两个原子是不交的. ∎

注 Mader[236] 证明了定理 3.3.4 对无向图也成立.

下面的结果被称为点可迁图的*原子分解定理* (atomic decomposition theorem), 它的无向图形式由 Watkins[306] 首先证明, 有向图的形式由 Hamidoune[134] 得到.

定理 3.3.5 设G是连通的点可迁图, A是G的正原子. 则

(a) $G[A]$ 是点可迁的.

(b) $V(G)$ 存在划分$\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 使得对每个 $i = 1, 2, \cdots, m (\geqslant 2)$, 均有$G[A_i] \cong G[A]$.

证明 如果$|A| = 1$, 那么结论显然成立. 下面, 假定$|A| > 1$.

(a) 因为G是点可迁的, 所以对任何$x, y \in A$, 存在$\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ 使得$y = \sigma(x)$. 由定理3.3.1 知$\sigma(A)$ 是正原子. 因$y \in \sigma(A) \cap A$, 由定理3.3.4 知$\sigma(A) = A$. 令

$$\Sigma = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(G) : \sigma(A) = A\},$$

显然, Σ 是$\mathrm{Aut}(G)$ 的子群, 且Σ 的元素作用在A是可迁的. 令

$$\Pi = \{\pi \in \Sigma : \pi(x) = x, x \in A\},$$

那么Π 是 Σ 的稳固子群和正规子群. 因此, 由同态定理知, $\Sigma/\Pi \cong \mathrm{Aut}(G[A])$. 这证明了$G[A]$ 是点可迁的.

(b) 因为G是点可迁的, 所以对固定的$y \in A$ 和任意的$x \in V(G)$, 存在$\pi \in \mathrm{Aut}(G)$ 使得$x = \pi(y)$. 因此, 由定理3.3.1 知, $\pi(A)$ 是包含x 的正原子. 由定理3.2.1 知$G[\pi(A)] \cong G[A]$. 如果$x \notin A$, 那么, 由定理3.3.4 知$\pi(A) \cap A = \emptyset$. 这说明$G$至少有两个不同的原子. 因此, 对任何$x \in V(G)$, 存在包含$x$ 的正原子A_x, 且$G[\pi(A_x)] \cong G[A]$.

由于对任何$y \in V(G)$, $y \neq x$, 或者$A_x = A_y$, 或者$A_x \cap A_y = \emptyset$, 所以, 这些正原子$A_1, A_2, \cdots, A_m, m \geqslant 2$ 形成$V(G)$ 的划分, 而且对每个$i = 1, 2, \cdots, m$, 均有$G[A_i] \cong G[A]$. ∎

§3.4 可迁图的连通度和边连通度

这一节利用原子和原子分解定理来讨论可迁图的连通度和边连通度. 给定在这一节的主要结果, 无向图形式分别由 Watkins[306] 和 Mader[236] 得到; 有向图形式由 Hamidoune[135, 136] 得到. 我们首先叙述一个简单但很有用的命题.

定理 3.4.1 设G是强连通有向图. 那么$a(G) = 1 \Leftrightarrow \kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G)$.

证明 不妨设$\delta(G) = \delta^+(G)$.

如果$a(G) = 1$, 那么存在$x \in V(G)$ 是G的正原子. 因此, $N_G^+(x)$ 是G的κ分离集, 且$\kappa(G) = d_G^+(x) = \delta^+(G) = \delta(G)$.

反之, 假定$\kappa(G) = \delta(G) = \delta^+(G)$. 所以存在$x \in V(G)$ 使得$d_G^+(x) = \delta^+(G) = \kappa(G)$. 这意味着$N_G^+(x)$ 是G的κ分离集, $\{x\}$ 是G的正分片. 于是, $a(G) = 1$. ∎

定理 3.4.2 设G是强连通的边可迁有向图. 那么$\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G)$.

证明 由定理3.4.1, 我们只需证明$a(G)=1$. (反证) 假定$a(G)>1$. 设A是G的原子. 不妨设A是正原子. 考虑$x,y\in A$和$z\in N_G^+(A)$使得$(x,y),(y,z)\in E(G)$. 因为G是边可迁的, 所以存在$\sigma\in \mathrm{Aut}(G)$使得$y=\sigma(x)$且$z=\sigma(y)$. 由定理3.3.1知$\sigma(A)$是$G$的正原子. 因为$z\in\sigma(A)$, 但$z\notin A$, 所以$\sigma(A)\neq A$. 另一方面, 因为$y\in A\cap\sigma(A)$, 所以由定理3.3.4知$\sigma(A)=A$. 这个矛盾说明$a(G)=1$. ∎

定理 3.4.3 设G是连通的点可迁图, 那么$\lambda(G)=\delta(G)$.

证明 因为G是连通的点可迁图, 所以由定理3.2.2知G是δ正则的, 其中$\delta=\delta(G)>0$. 因此, 由定理1.2.2(d)知对$V(G)$的任何非空子集X, 有$d_G^+(X)=d_G^-(X)$.

由Whitney不等式, 只需证明$\lambda=\lambda(G)\geqslant\delta$. 为此, 选取$X\subset V(G)$使得$d_G^+(X)=\lambda=d_G^-(X)$, 且$|X|$尽可能地小. 于是, $|X|\leqslant\frac{1}{2}v$, 且$G[X]$是强连通的.

如果$|X|=1$, 那么$\lambda=d_G^+(X)=d_G^-(X)=\delta$. 下面, 假定$|X|\geqslant 2$.

首先证明$G[X]$是点可迁的. 因为G是点可迁的, 所以对任何$x,y\in X$, 存在$\sigma\in\mathrm{Aut}(G)$使得$y=\sigma(x)$. 令$Y=\sigma(X)$, 则$X\cap Y\neq\emptyset$. 由定理3.2.1知$G[X]\cong G[Y]$, 所以$|X|=|Y|$且$d_G^+(X)=\lambda=d_G^+(Y)$. 因为

$$|X\cup Y|=|X|+|Y|-|X\cap Y|\leqslant\frac{1}{2}v+\frac{1}{2}v-1=v-1,$$

所以, $X\cup Y\subset V(G)$. 因为$d_G^+(X\cup Y)\geqslant\lambda$且$d_G^+(X\cap Y)\geqslant\lambda$, 所以, 由定理1.2.2(a)得

$$d_G^+(X\cup Y)+d_G^+(X\cap Y)\leqslant d_G^+(X)+d_G^+(Y)=2\lambda.$$

这意味着$d_G^+(X\cap Y)=\lambda$. 由于$X\cap Y\subseteq X$和X的最小性, 故有$X\cap Y=X$. 由于$|X|=|Y|$, 所以$X=Y$. 令

$$\Sigma=\{\sigma\in\mathrm{Aut}(G):\ \sigma(X)=X\},$$

则Σ是$\mathrm{Aut}(G)$的子群, 它可迁地作用在x上. 这意味着$G[X]$是点可迁的.

设$G[X]$是k正则的. 那么, $0<k\leqslant\delta-1$, 且$k\leqslant|X|-1$. 因为$\lambda=d_G^+(X)=(\delta-k)|X|$, 所以

$$\lambda=(\delta-k)|X|\geqslant(\delta-k)(k+1)=\delta+k(\delta-k-1)\geqslant\delta.$$

定理得证. ∎

确定点可迁图G的连通度$\kappa(G)$是困难的. 下面的定理罗列了有关点可迁图连通度的基本结果.

定理 3.4.4 设G是连通的点可迁图, 且$\delta=\delta(G)$.

(a) $\kappa(G)\geqslant a(G)$;

(b) $\kappa(G)\geqslant\lceil\frac{1}{2}(\delta+1)\rceil$;

(c) 若 G 是没有对称边的有向图, 则 $\kappa(G) \geqslant \lceil \frac{1}{3}(2\delta+1) \rceil$;

(d) 若 G 是素阶的, 则 $\kappa(G) = \lambda(G) = \delta$;

(e) 若 G 是 n 阶无向图, $n \geqslant 2$, 则 $\kappa(G) = n\,a(G)$;

(f) 若 G 是无向图, 则 $\kappa(G) \geqslant \lceil \frac{2}{3}(\delta+1) \rceil$;

(g) 若 G 是无向图且 $\delta = 2, 3, 4, 6$, 则 $\kappa(G) = \delta$.

证明 不妨设 G 是非完全图, 且 A 是 G 的原子 (如果 G 是有向图, 那么设 A 是 G 的正原子). 于是, $|A| = a(G)$.

(a) 设 $G_A = G[A]$. 则由定理 3.3.5 (a) 知 G_A 是点可迁的. 设 G_A 是 r 正则的, 于是 $r < \delta$. 令 $T = N_G^+(A)$. 则

$$d_G^+(A) = |A|(\delta - r) = \sum_{x \in T} |N_G^-(x) \cap A|.$$

取 $y \in T$ 使得 $|N_G^-(y) \cap A|$ 尽可能地大. 则

$$|T||N_G^-(y) \cap A| \geqslant |A|(\delta - r). \tag{3.4.1}$$

另一方面, 由定理 3.3.5 知存在包含 y 的原子 A_y. 因为 $y \notin A$, 所以由定理 3.3.4 知 $A_y \cap A = \emptyset$. 令 $G_{A_y} = G[A_y]$. 则

$$|N_G^-(y) \cap A| \leqslant \delta^-(G) - \delta^-(G_{A'}) = \delta - r. \tag{3.4.2}$$

由 (3.4.1) 和 (3.4.2) 得 $|T| \geqslant |A|$. 因此,

$$\kappa(G) = |N_G^+(A)| = |T| \geqslant |A| = a(G).$$

(b) 由 (a) 得

$$\delta \leqslant \delta(G[A]) + \kappa(G) \leqslant |A| - 1 + \kappa(G) \leqslant 2\kappa(G) - 1.$$

这意味着 $\kappa(G) \geqslant \lceil \frac{1}{2}(\delta+1) \rceil$.

(c) 如果有向图 G 不含对称边, 那么由 (a) 得,

$$\delta \leqslant \delta(G[A]) + \kappa(G) \leqslant \frac{1}{2}(|A| - 1) + \kappa(G) \leqslant \frac{1}{2}(\kappa(G) - 1) + \kappa(G).$$

这意味着 $\kappa(G) \geqslant \lceil \frac{1}{3}(2\delta+1) \rceil$.

(d) 由定理 3.3.5 知, 存在 $V(G)$ 的原子划分 $\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 使得对每个 $i = 1, 2, \cdots, m$, 均有 $G[A_i] \cong G[A]$. 因此, $v(G) = m|A|$, $m \geqslant 2$. 因为 $v(G)$ 是素数, 所以 $a(G) = |A| = 1$. 由定理 3.4.1 知结论 (d) 成立.

(e) 设 G 是无向图, 且 $C = N_G(A)$. 则 C 是 G 的 κ 分离集. 由定理 3.3.5 知, 存在 $V(G)$ 的原子划分 $\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 使得 $G[A_i] \cong G[A]$, $i = 1, 2, \cdots, m$, $m \geqslant 2$.

由定理3.3.3, 或者$C \subseteq A_i$, 或者$C \cap A_i = \emptyset$, $i = 1, 2, \cdots, m$. 这个事实意味着存在正整数n 使得$\kappa = |C| = n|A|$. 如果$|A| = 1$, 那么, 由定理3.4.1 知$\kappa(G) = \delta \geqslant 2$. 于是, $n = \delta \geqslant 2$. 下面, 假定$|A| > 1$. 如果$n = 1$, 那么C 是G 的原子, 且$G[C] \cong G[A]$. 因为G 是点可迁的, 所以A 是G 的κ 分离集. 令F_1 和F_2 是G 的两个分片. 那么, F_1 和F_2 都包含C 的元素, 这意味着$G[C]$ 是不连通的. 这个矛盾意味着$n \geqslant 2$.

(f) 如果G 是无向图, 那么由 (a) 和 (e) 得

$$\delta \leqslant \delta(G[A]) + \kappa(G) \leqslant |A| - 1 + \kappa(G) \leqslant \frac{3}{2}\kappa(G) - 1.$$

这意味着$\kappa(G) \geqslant \lceil \frac{2}{3}(\delta + 1) \rceil$.

(g) 如果G 是无向图, 那么对于$\delta = 2, 3, 4$, 由 (f) 知$\kappa(G) = 2, 3, 4$. 当$\delta = 6$ 时, 由 (f) 和 Whitney 不等式得 $5 \leqslant \kappa(G) \leqslant 6$. 如果$\kappa(G) = 5$, 那么由定理3.4.1 有$a(G) \geqslant 2$. 因此, 由 (e) 知存在整数$n \geqslant 2$ 使得$5 = na(G)$. 但这是不可能的. 于是, 当$\delta(G) = 6$ 时, 有$\kappa(G) = 6$. ∎

§3.5 Cayley 图

设$\Gamma = (X, \circ)$ 是非平凡有限群, S 是X 的非空子集, 且不含Γ 的单位元e. 定义有向图如下:

$$V(G) = \Gamma; \quad (x, y) \in E(G) \Leftrightarrow x^{-1}y \in S, \ \forall\, x, y \in \Gamma.$$

它由Cayley[55] 首先提出, 故称G 为群Γ 关于S 的 Cayley 图 (Cayley graph), 记为$C_\Gamma(S)$.

在给出具体示例之前, 我们对Cayley 图的定义作如下注释.

1. 如果S 含单位元e, 那么对任何$x \in \Gamma$, 均有 $x^{-1}x = e \in S$. 所以集S 不含单位元是Cayley 图$C_\Gamma(S)$ 不含环的充要条件.

2. 对于$x, y \in \Gamma$, 由Cayley 图的定义知$C_\Gamma(S)$ 中存在边$(x, y) \Leftrightarrow$ 存在$s \in S$ 使得$s = x^{-1}y$. 如果$s^{-1} = s$, 那么必有$s = y^{-1}x$, 因此(y, x) 也是$C_\Gamma(S)$ 的边. 在这种情况下, 按通常的习惯, 两条对称有向边(x, y) 和(y, x) 看成一条无向边xy.

3. 文献中, Cayley 图$C_\Gamma(S)$ 的边也可以定义为: $(x, y) \in E(G) \Leftrightarrow xy^{-1} \in S$. 事实上, 取$\Gamma$ 中置换ϕ 使得$\phi(x) = x^{-1}$. 则

$$\begin{aligned}(x, y) \in E(G) &\Leftrightarrow x^{-1}y \in S \Leftrightarrow x^{-1}(y^{-1})^{-1} \in S \\ &\Leftrightarrow (x^{-1}, y^{-1}) = (\phi(x), \phi(y)) \in E(G).\end{aligned}$$

这意味着两个定义是等价的.

4. Cayley 图$C_\Gamma(S)$ 的逆$\overleftarrow{C_\Gamma(S)}$ 仍是Cayley 图, 而且 $\overleftarrow{C_\Gamma(S)} = C_\Gamma(S^{-1})$. 事实上, 由Cayley 图的定义,

$$(x,y)\in E(C_\Gamma(S))\Leftrightarrow x^{-1}y\in S\Leftrightarrow y^{-1}x=(x^{-1}y)^{-1}\in S^{-1}$$
$$\Leftrightarrow (y,x)\in E(C_\Gamma(S^{-1})).$$

5. 如果 $S^{-1}=\{s^{-1}:s\in S\}=S$, 那么由上一个注释得 $\overleftarrow{C_\Gamma(S)}=C_\Gamma(S^{-1})$. 这说明: 如果 $S=S^{-1}$, 那么 Cayley 图 $C_\Gamma(S)$ 是对称有向图, 因而可以看成是无向图.

6. $C_\Gamma(S)$ 是 $|S|$ 正则的. 这是因为对于 $x\in\Gamma$, $(x,y)\in E\Leftrightarrow y=xs,\ s\in S$, 且 $(z,x)\in E\Leftrightarrow z=xs^{-1},\ s\in S$.

7. Cayley 图 $C_\Gamma(S)$ 是完全图 $\Leftrightarrow S=\Gamma-\{e\}$.

8. 如果 $S'\subseteq S$, 那么 $C_\Gamma(S')\subseteq C_\Gamma(S)$.

例 3.5.1 考虑模 n 剩余类加法群 $Z_n(n\geqslant 2)$, 即 n 阶循环群, 0 是单位元, $i^{-1}=n-i$. 如果 $S=\{1\}$, 那么当 $n=2$ 时, $S^{-1}=S$; 当 $n\neq 2$ 时, $S^{-1}\neq S$. 因此 Cayley 图 $C_{Z_2}(\{1\})=K_2$, $C_{Z_n}(\{1\})$ 是长为 n ($\geqslant 3$) 的有向圈 C_n, 而 $C_{Z_n}(\{1,n-1\})$ 是长为 n ($\geqslant 3$) 的无向圈 C_n.

一般地, 若 $S\subseteq\{1,2,\cdots,n-1\},n\geqslant 3$, 则当 $S^{-1}\neq S$ 时, Cayley 图 $C_{Z_n}(S)$ 是循环有向图 $G(n;S)$; 而当 $S^{-1}=S$ 时是循环无向图 $G(n;\pm S)$. 下面, 对有向图情形来证明这一事实.

任取 $i,j\in Z_n=V(G(n;S))$. 由 Cayley 图和循环有向图的定义,

$$\begin{aligned}(i,j)\in E(C_{Z_n}(S))&\Leftrightarrow i^{-1}+j\,(\mathrm{mod}\ n)\in S\Leftrightarrow (n-i)+j\,(\mathrm{mod}\ n)\in S\\&\Leftrightarrow\ \text{存在}\ s\in S\ \text{使得}\ j-i\equiv s\,(\mathrm{mod}\ n)\\&\Leftrightarrow (i,j)\in E(G(n;S)).\end{aligned}$$

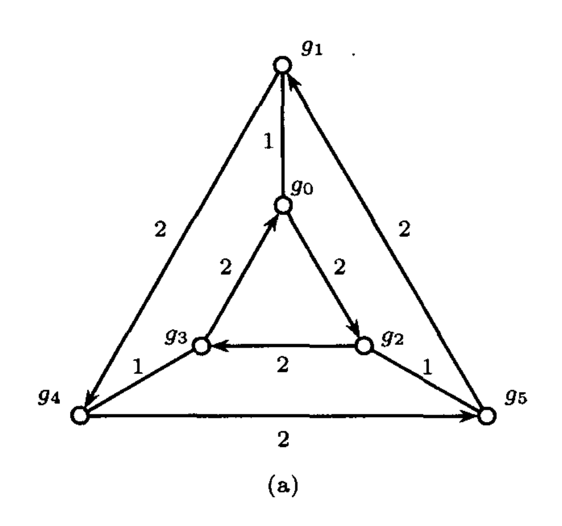
例 3.5.2 设 S_3 是 $X=\{1,2,3\}$ 上的对称群, $S_3=\{g_0,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5\}$, 其中

$$g_0=(1),g_1=(12),g_2=(123),g_3=(132),g_4=(23),g_5=(13).\tag{3.5.1}$$

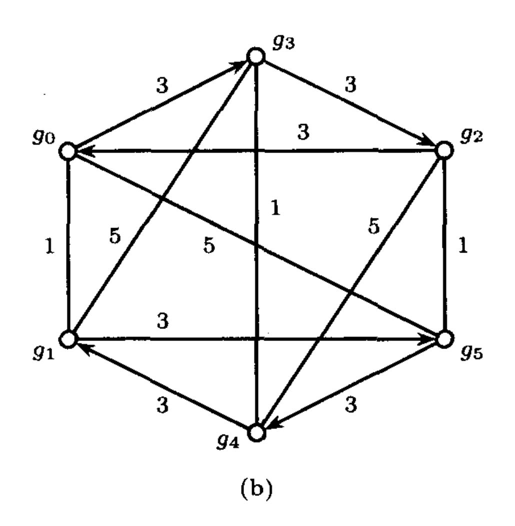
图 3.5 中所示的是 Cayley 图 $C_{S_3}(\{g_1,g_2\})$ 和 $C_{S_3}(\{g_1,g_3,g_5\})$, 其中边 (g_i,g_j) 上的数字 k 表示 $g_i^{-1}g_j=g_k$.

例 3.5.3 (Carlesson 等 [54]) 考虑稍微复杂一点的例子. 用 $(Z_2)^n$ 表示 $Z_2\times Z_2\times\cdots\times Z_2$, 它是 n 个集 $Z_2=\{0,1\}$ 的笛卡儿乘积. 令

$$M=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&1\\1&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&1&0\end{pmatrix}$$



(a)



(b)

图 3.5 Cayley 图 $C_{S_3}(\{g_1, g_2\})$ 和 $C_{S_3}(\{g_1, g_3, g_5\})$

是一个 n 阶方阵. 我们把 $(Z_2)^n$ 中元素 v 看成是一个列向量 v. 令 Mv 中向量加法按模 2 计算. 那么 Mv 也是 $(Z_2)^n$ 中的元素. 定义一个新的代数结构 $\Gamma = ((Z_2)^n \times Z_n, \circ)$ 如下: 对任何 $(x; i), (y; j) \in (Z_2)^n \times Z_n$, 运算"$\circ$"定义为

$$(x; i) \circ (y; j) = (M^j x + y; i + j),$$

其中第一个向量加法是模 2 的 (在 $(Z_2)^n$ 中), 第二个向量加法是模 n 的 (在 Z_n 中). 不难验证这个代数结构 $\Gamma = ((Z_2)^n \times Z_n, \circ)$ 是一个群. 它的单位元是 $(0, 0)$, 逆元 $(x; i)^{-1} = (-M^{n-i}x; n - i)$. 令

$$S = \{(10 \cdots 0; 0),\ (00 \cdots 0; 1),\ (00 \cdots 0; n - 1)\},$$

其中第一个元素是自逆的, 后两个元素是互逆的. 由于 $S^{-1} = S$, 所以 Cayley 图 $C_\Gamma(S)$ 是无向图.

我们将在 10.3 节看到, 这个 Cayley 图 $C_\Gamma(S)$ 就是 n 维立方连通圈 (cube-connected cycle) $CCC(n)$. 图 3.6 中所示的是 Cayley 图 $C_{(Z_2)^3 \times Z_3}(\{100, 001, 002\})$, 它就是 $CCC(3)$.

下面定理给出 Cayley 图是强连通的充分必要条件.

定理 3.5.1 Cayley 图 $G = C_\Gamma(S)$ 是强连通的当且仅当 $\Gamma = \langle S \rangle$, 即 S 是 Γ 的生成集.

证明 ($\Rightarrow$) 只需证明 $\Gamma \subseteq \langle S \rangle$. 假定 y 是 G 的任意顶点. 因为 $G = C_\Gamma(S)$ 是强连通的, 所以对任何 $x \in S$, G 中存在一条 (x, y) 路 $P = (x_0, x_1, \cdots, x_m)$, 其中 $x_0 = x$, $y = x_m$. 因为对每个 $i = 1, 2, \cdots, m$, 有 $(x_{i-1}, x_i) \in E(G)$, 所以存在 $s_i \in S$ 使得 $x_i = x_{i-1}s_i$. 于是, y 能被表示成 $y = xs_1s_2 \cdots s_m \in S$. 由 y 的任意性知, $\Gamma \subseteq \langle S \rangle$.

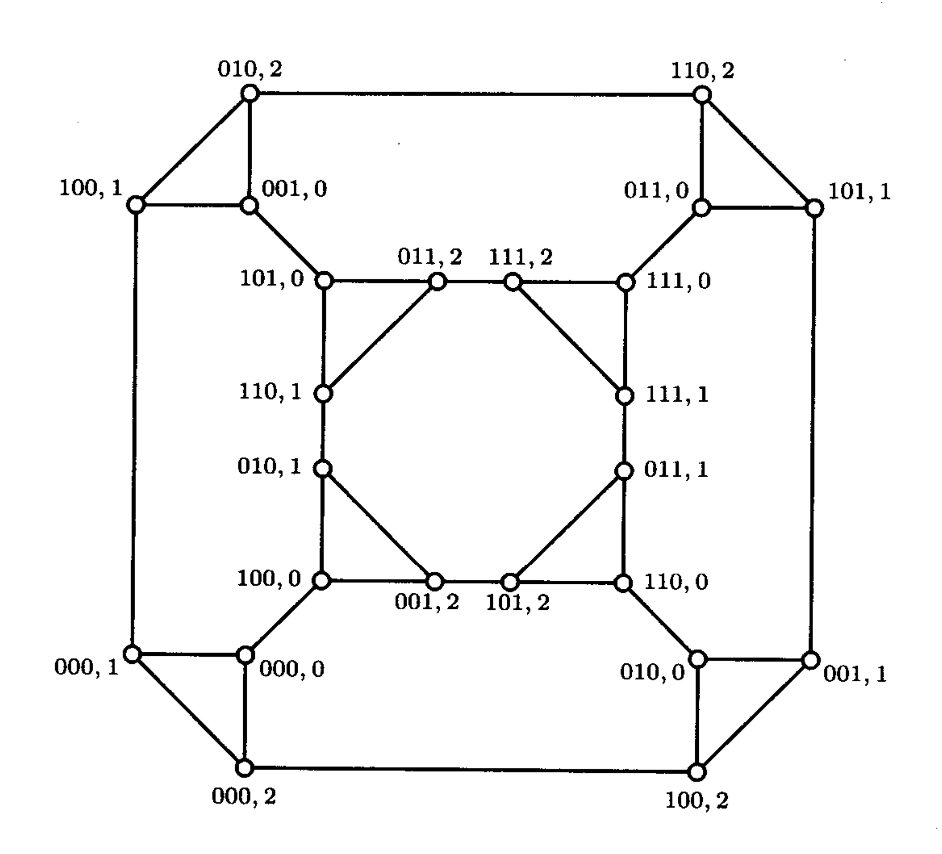


图 3.6 Cayley 图 $C_{(Z_2)^3\times Z_3}(\{100,001,002\})$

(⇐) 为证明 G 是强连通的, 由于 G 是正则的, 所以由定理 1.2.5, 我们只需证明 G 是连通的.

设 x 和 y 是 G 中两个不同的顶点, g_0 是 Γ 的单位元. 因为 $\Gamma=\langle S\rangle$, 所以存在 $g_1,g_2,\cdots,g_m\in S$ 使得 $y=g_1g_2\cdots g_m$. 因为对每个 $i=1,2,\cdots,m$ 有 $g_i=(g_0g_1\cdots g_{i-1})^{-1}(g_0g_1\cdots g_{i-1}g_i)\in S$, 所以 $(g_0g_1\cdots g_{i-1},\ g_0g_1\cdots g_i)\in E(G)$. 于是存在一条 (g_0,y) 路 $P=(g_0,g_0g_1,g_0g_1g_2,\cdots,g_0g_1g_2\cdots g_{m-1},y)$. 这意味着 g_0 与 y 是连通的.

同理可证 g_0 与 x 也是连通的. 因此 x 与 y 是连通的. 由 x 和 y 的任意性知, G 是连通的. ∎

§3.6 Cayley 图的可迁性

这一节证明 Cayley 图是点可迁的. 为叙述方便起见, 首先介绍 Cayley 图的保色自同构概念.

设 $\Gamma=\{g_0,g_1,\cdots,g_{n-1}\}$ 是非平凡有限群, S 是 Γ 的子集, 且不含单位元 g_0. Cayley 图 $C_\Gamma(S)$ 有边 (g_i,g_j) 当且仅当存在 $g_k\in S$ 使得 $g_k=g_i^{-1}g_j$. 那么边 (g_i,g_j) 被染以颜色 k.

例如, 图 3.5 中所示的 Cayley 图, 其边上数字 k 是该边被染的颜色.

$\phi \in \mathrm{Aut}(C_\Gamma(S))$ 称为 $C_\Gamma(S)$ 的**保色自同构** (color-preserving automorphism), 如果对任何 $(g_i, g_j) \in E(C_\Gamma(S))$, 边 (g_i, g_j) 和 $(\phi(g_i), \phi(g_j))$ 有相同的颜色.

例如, 对于图 3.5 中所示的 Cayley 图 $C_{S_3}(\{g_1, g_2\})$, 容易验证由以下定义的置换

$$g_i \mapsto g_1 g_i, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

是保色自同构.

易验证 Cayley 图 $C_\Gamma(S)$ 的所有保色自同构形成 $\mathrm{Aut}\,(C_\Gamma(S))$ 的子群, 称为 $C_\Gamma(S)$ 的**保色自同构群** (color-preserving automorphism group), 记为 $\mathrm{Aut}^{\,c}(C_\Gamma(S))$.

对于 $i = 0, 1, \cdots, n-1$, 定义映射

$$\begin{aligned} \phi_i : \ \Gamma \quad & \to \Gamma \\ g_j \quad & \mapsto \phi_i(g_j) = g_i g_j, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n-1. \end{aligned} \tag{3.6.1}$$

不难验证 ϕ_i 是 Γ 上的置换, 且

$$\phi(\Gamma) = \{\phi_i : \ i = 0, 1, 2, \cdots, n-1\}$$

是置换群.

下面的定理揭示了 Cayley 图保色自同构群的意义.

定理 3.6.1 (König[192]) 设 $\Gamma = \{g_0, g_1, \cdots, g_{n-1}\}$ 是非平凡有限群, S 是它的生成集且不含单位元 g_0. 则

$$\mathrm{Aut}^c(C_\Gamma(S)) = \phi(\Gamma) \cong \Gamma.$$

证明 任取 $\phi_m \in \phi(\Gamma)$, 则 ϕ_m 是 Γ 上的置换. 对任何 $g_i, g_j \in \Gamma$, 边 $(g_i, g_j) \in E(C_\Gamma(S))$ 被染以颜色 k,

$$\begin{aligned} k &\Leftrightarrow g_i^{-1} g_j = g_k \in S \\ &\Leftrightarrow (g_m g_i)^{-1}(g_m g_j) = g_k \in S \\ &\Leftrightarrow \phi_m^{-1}(g_i)\phi_m(g_j) = g_k \in S \\ &\Leftrightarrow (\phi_m(g_i), \ \phi_m(g_j)) \in E(C_\Gamma(S)). \end{aligned}$$

所以, ϕ_m 是 $C_\Gamma(S)$ 的保色自同构. 于是, $\phi_m \in \mathrm{Aut}^c(C_\Gamma(S))$. 这说明

$$\phi(\Gamma) \subseteq \mathrm{Aut}^c(C_\Gamma(S)). \tag{3.6.2}$$

反之, 任取 $\sigma \in \mathrm{Aut}^c(C_\Gamma(S))$. 假定 $\sigma(g_0) = g_m$, 其中 g_0 是 Γ 的单位元. 只需证明 $\sigma = \phi_m$.

任取 $g_j \in \Gamma$. 因为 S 是 Γ 的生成集, 所以由定理 3.5.1 知 Cayley 图 $C_\Gamma(S)$ 是强连通的. 因此, $C_\Gamma(S)$ 中存在一条 (g_0, g_j) 路 $P = (g_{j_0}, g_{j_1}, \cdots, g_{j_p})$, 其中 $g_0 = g_{j_0}$, $g_j = g_{j_p}$. 假定对每个 $i = 1, 2, \cdots, p$, 边 $(g_{j_{i-1}}, g_{j_i})$ 有颜色 k_i. 那么 g_j 能被表示成 $g_j = g_0 g_{k_1} g_{k_2} \cdots g_{k_p}$, 其中 $g_{k_i} \in S$, $i = 1, 2, \cdots, p$. 由于 σ 是保色自同构当且仅当 $\sigma(gh) = \sigma(g)h$ 对每个 $g \in \Gamma$ 和 $h \in S$ 成立. 反复应用这个事实, 得

$$\sigma(g_j) = \sigma(g_0) g_{k_1} g_{k_2} \cdots g_{k_p} = \sigma(g_0) g_j = g_m g_j = \phi_m(g_j).$$

这说明 $\sigma = \phi_m \in \phi(\Gamma)$. 由 $\sigma \in \mathrm{Aut}^c(C_\Gamma(S))$ 的任意性,

$$\mathrm{Aut}^c(C_\Gamma(S)) \subseteq \phi(\Gamma). \tag{3.6.3}$$

由 (3.6.2) 和 (3.6.3) 得, $\mathrm{Aut}^c(C_\Gamma(S)) = \phi(\Gamma)$.

下面证明 $\Gamma \cong \phi(\Gamma)$. 为此, 定义映射

$$\begin{aligned} \Phi: \ \Gamma \ &\to \phi(\Gamma) \\ g_k \ &\mapsto \Phi(g_k) = \phi_k, \ k = 0, 1, 2, \cdots, n-1. \end{aligned}$$

容易验证 $\Phi : \Gamma \to \phi(\Gamma)$ 是双射. 为证明 Φ 是同构, 只需证明 Φ 是保运算的. 对任意的 $g_i, g_j \in \Gamma$, 令 $g_i g_j = g_k$. 因为对任何 $g_h \in \Gamma$, 有

$$\begin{aligned} \phi_k(g_h) = g_k g_h = (g_i g_j) g_h = g_i(g_j g_h) = \phi_i(g_j g_h) \\ = \phi_i(\phi_j(g_h)) = \phi_i \phi_j(g_h). \end{aligned}$$

因此, $\phi_k = \phi_i \phi_j$. 于是,

$$\Phi(g_i g_j) = \Phi(g_k) = \phi_k = \phi_i \phi_j = \Phi(g_i)\Phi(g_j).$$

这意味着 Φ 是保运算的. 于是证明了 $\Gamma \cong \phi(\Gamma)$. ∎

定理 3.6.2　Cayley 图 $C_\Gamma(S)$ 是点可迁的.

证明　设 g_i, g_j 是 $V(C_\Gamma(S)) = \Gamma$ 中任意两个元素, 并设 $g_k = g_j g_i^{-1}$. 则

$$\phi_k(g_i) = g_k g_i = (g_j g_i^{-1}) g_i = g_j.$$

这说明存在 $\phi_k \in \mathrm{Aut}^c(C_\Gamma(S)) \subseteq \mathrm{Aut}(C_\Gamma(S))$ 使得 $\phi_k(g_i) = g_j$. 这意味着 $C_\Gamma(S)$ 是点可迁的. ∎

几个注释.

1. Cayley 提供了构造连通的点可迁图的简单方法, 这种构造方法仅依赖于有限群和它的不含单位元的生成集. Cayley 方法被广泛应用于大规模高对称的互连网络拓扑结构的设计.

2. Cayley 图是点可迁的, 但点可迁图并不一定都是 Cayley 图. 一个著名的例子是 Petersen 图 (见图 3.3).

3. 考虑图 3.5 (b) 中所示的Cayley 图. 设$G = C_{S_3}(\{g_1, g_3, g_5\})$, $A = \{g_0, g_1\}$. 则$N_G^+(A) = \{g_3, g_5\}$. 由定理3.4.4 (b) 知它的连通度$\kappa(G) \geqslant 2 = |N_G^+(A)|$. 因此, A 是G 的正分片. 因为$\kappa(G) = 2 < 3 = |S|$, 由定理3.4.1 知$a(G) \geqslant 2$. 这说明A 是G 的正原子. 注意到 $N_G^-(A) = \{g_2, g_3, g_4, g_5\}$. 这说明$A$ 不是G 的负原子. 令$B = \{g_2, g_5\}$. 则$N_G^+(B) = \{g_0, g_4\}$. 因此, B 也是G 的正原子. $N_G^+(A) \cap B = \{g_5\}$. 这说明定理3.3.3 对有向图是不成立的.

§3.7 Cayley 图的原子与连通度

作为特殊的点可迁图, Cayley 图满足原子分解定理3.3.5 和有关连通度的结果(定理3.4.4). 这一节讨论Cayley 图的原子和连通度的进一步结果.

定理 3.7.1 设$G = C_\Gamma(S)$ 是Cayley 图, A 是G 中含Γ 单位元的原子. 则A 是Γ 的子群. 而且A 是由 $S \cap A$ 生成的当且仅当$|A| \geqslant 2$.

证明 不妨设A 是G 的正原子. 如果$|A| = 1$, 那么$A = \{e\}$ 是平凡群, 其中e 是Γ 的单位元. 下面假定$|A| \geqslant 2$. 由定理3.6.1, 有

$$\Gamma \cong \phi(\Gamma) = \mathrm{Aut}^c(C_\Gamma(S)) \subseteq \mathrm{Aut}(C_\Gamma(S)).$$

对任何$g_i, g_j \in A$, 存在$\phi_i \in \mathrm{Aut}^c(C_\Gamma(S))$ 使得$\phi_i(g_j) = g_i g_j$. 这意味着右变换ϕ_i: $g_j \to g_i g_j$ 是G 的自同构. 因此, 由定理3.3.1 知$\phi_i(A) = g_i(A)$ 是G 的正原子. 因为$\phi_i(e) = g_i$, 所以$g_i \in A \cap g_i(A)$. 由定理3.3.4 知, $A = g_i(A)$. 于是, $g_i g_j \in A$. 这意味着群乘积运算在A 中是封闭的. 所以, A 是Γ 的子群.

如果A 由$S \cap A$ 生成, 那么$S \cap A \neq \emptyset$. 因为A 含单位元, 而S 不含单位元, 所以$|A| \geqslant 1 + |S \cap A| \geqslant 2$.

反之, 假定$|A| \geqslant 2$. 首先证明$S \cap A \neq \emptyset$. 事实上, 因为$G[A]$ 是强连通的, 所以存在两个不同的元素 $x, y \in A$ 使得$(x, y) \in E(G[A]) \subset E(G)$. 由Cayley 图的定义, $(x, y) \in E(G) \Leftrightarrow x^{-1}y \in S$. 因此, 存在$s \in S$ 使得$s = x^{-1}y$. 因为A 是子群, 所以$s = x^{-1}y \in S \cap A$.

为了证明A 是由$S \cap A$ 生成, 只需证明A 中每个元素能表示成$S \cap A$ 中一系列元素的乘积. 设x 是A 中任意元素. 因为$G[A]$ 是强连通的, 所以, $G[A]$ 中存在一条有向路$(x_0, x_1, \cdots, x_k)$, 其中x_0 是Γ 的单位元, 且$x_k = x$. 由Cayley 图的定义, 对每个$i = 0, 1, \cdots, k-1$, $(x_i, x_{i+1}) \in E(G) \Leftrightarrow x_i^{-1}x_{i+1} \in S$, 所以存在$s_{i+1} \in S$ 使得$x_{i+1} = x_i s_{i+1}$. 因此, $x = x_0 s_1 s_2 \cdots s_k = s_1 s_2 \cdots s_k$. 因为$A$ 是群, 所以$s_{i+1} = x_i^{-1}x_{i+1} \in A$. 因此, 对每个$i = 0, 1, 2, \cdots, k-1$, 有 $s_{i+1} = x_i^{-1}x_{i+1} \in S \cap A$. 这说明$A$ 是由$S \cap A$ 生成. ∎

例 3.7.1 (Zemor[355]) 作为定理3.7.1 的应用, 介绍一个很有趣的例子. 这个例子说明存在只有正原子而没有负原子的Cayley 图.

考虑$X=\{1,2,3,4\}$上的对称群S_4. 设$a=(12)$, $b=(134)$. 容易验证$\{a,b\}$是S_4的生成集, 且$ab=(1342)$. 设$S=\{a,b,ab\}$, 则Cayley 图$G=C_{S_4}(S)$是强连通的. 考虑$F=\{e,a\}$, 其中e是S_4的单位元. 则F是S_4的子群. 由Cayley 图的定义知, $N_G^+(F)=\{b,ab\}$. 这意味着$\kappa(G)\leqslant|N_G^+(F)|=2$. 另一方面, 由定理2.2.12 (b) 知, $\kappa(G)\geqslant\frac{1}{2}(|S|+1)=2$. 所以, $\kappa(G)=2$. 于是, F是G的正分片. 因为$\kappa(G)=2<3=|S|$, 所以由定理3.4.1 知, 对G的任何原子A均有$|A|\geqslant 2$. 因此, $F=\{e,a\}$是包含单位元的正原子. 然而, 由于$N_G^-(F)=\{b^{-1},ab^{-1},b^{-1}a,ab^{-1}a\}$, 所以$|N_G^-(F)|=4>2=\kappa(G)$. 这说明$F$不是$G$的负原子.

假定G有负原子, 并设A是包含单位元e的负原子, $|A|=2$. 由定理3.7.1 知, A必有形式$A=\{e,c\}$. 因为A是子群, 所以c是S_4中的二阶元. 因为任何原子都是强连通的, 所以A是强连通的. 因此(e,c)是一条有向边, 即, $c\in S$. 于是, $c=a$且$A=F$. 这与F不是负原子矛盾. 这证明了G没有负原子. 于是, 逆图$\overleftarrow{G}=C_{S_4}(S^{-1})$没有正原子.

例 3.7.2 Hamidoune[138] 证明了任何Abel 群的Cayley 图必含正原子和负原子. 事实上, 设$G=C_\Gamma(S)$是某Abel 群Γ的Cayley 图, 其中S是Γ的生成集, A是G的正原子. 为了证明A也是G的负原子, 只需证明$|N_G^-(A)|=|N_G^+(A)|$. 为此, 任取$y\in N_G^+(A)$. 则存在$a\in A$使得$(a,y)\in E(G)$. 由Cayley 图的定义, 存在$s\in S$使得$s=a^{-1}y$. 因为Γ是Abel 群, 所以$s=a^{-1}y=ya^{-1}$. 因此, 由Cayley 图的定义知, $(y^{-1},a^{-1})\in E(G)$. 因为A是群, 所以$a^{-1}\in A$. 但$y^{-1}\notin A$, 所以$y^{-1}\in N_G^-(A)$, $|N_G^+(A)|\leqslant|N_G^-(A)|$. 同理可证$|N_G^-(A)|\leqslant|N_G^+(A)|$.

现在讨论Cayley 图的连通度. 显然, Cayley 图$C_\Gamma(S)$的连通度依赖于生成集S的选取. 一个自然的问题是: 生成集S应具有怎样的性质才能确保Cayley 图$C_\Gamma(S)$有最大的连通度. 许多作者, 如 Akers, Kirshnamurthy[6,7], Alspach[8], Godsil[126] 和 Hamidoune[137], 在这方面做了许多研究, 参见综述文章 Tindell[295]. 这里给出其中一个最基本的性质, 其无向图形式和有向图形式分别由 Godsil[126] 和Hamidoune[137] 得到.

群Γ的生成集S称为极小的 (minimal), 如果对任何$s\in S$, $S\setminus\{s\}$不能生成Γ.

定理 3.7.2 如果S是群Γ的极小生成集且不含单位元, 那么$\kappa(C_\Gamma(S))=|S|$.

证明 设$G=C_\Gamma(S)$是群Γ关于生成集S的Cayley 图. (反证) 假定$\kappa(G)<|S|$. 那么$a(G)\geqslant 2$. 设A是G中含单位元e的原子, 不妨设A是正原子. 则由定理3.7.1 知, A是由$S\cap A$生成的Γ的子群.

令$H=S\setminus A$. 因为$S\setminus H\subseteq A\setminus\{e\}$, 所以, 如果$|H|\leqslant 1$, 那么由定理3.4.4(a) 有

$$\kappa(G)\geqslant|A|=|A\setminus\{e\}|+1\geqslant|S\setminus H|+1\geqslant|S|.$$

这与假定$\kappa(G)<|S|$矛盾. 因此, $|H|\geqslant 2$. 首先证明下列不等式

$$|N_G^+(A)|\geqslant|A||H|. \tag{3.7.1}$$

为此, 首先证明 $AH \subseteq N_G^+(A)$. 任取 $x \in AH$, 则存在 $h \in H$ 和 $a \in A$ 使得 $x = ah$. 因为由定理 3.7.1 知, A 是 Γ 的子群, 所以 $a^{-1} \in A$, 且 $a^{-1}x = h \in H \subset S$. 由 Cayley 图的定义知, $x \in N_G^+(a) \subset N_G^+(A)$.

因此, 为了证明不等式 (3.7.1), 我们只需证明对任何两个不同的 $x, y \in H$ 均有 $Ax \cap Ay = \emptyset$. (反证) 假定存在两个不同的 $x, y \in H$ 使得 $Ax \cap Ay \neq \emptyset$. 那么存在两个不同的元素 $a, b \in A$ 使得 $ax = by$. 因为 A 是群, 所以 $a^{-1} \in A$. 于是 $x = a^{-1}by \in S$. 因为由定理 3.7.1 知, A 是由 $S \cap A$ 生成, 所以 a^{-1} 能被表示成 $S \cap A$ 中一系列元素的乘积. 因此, $x = a^{-1}by$ 能被表示成 $S \setminus \{x\}$ 中一系列元素的乘积. 这矛盾于 S 的极小性. 于是不等式 (3.7.1) 成立.

由不等式 (3.7.1) 得,

$$d_G^+(e) = |S| \geqslant \kappa(G) + 1 = |N_G^+(A)| + 1 \geqslant |A||H| + 1. \tag{3.7.2}$$

另一方面,

$$d_G^+(e) = |S| \leqslant |A| - 1 + |H|. \tag{3.7.3}$$

由 (3.7.2) 和 (3.7.3) 得,

$$|A||H| + 1 \leqslant d_G^+(e) \leqslant |A| - 1 + |H|.$$

这意味着 $(|H| - 1)(|A| - 1) + 1 \leqslant 0$. 但这是不可能的, 因为 $|H| \geqslant 2$ 且 $|A| \geqslant 2$. ∎

易见使得 $|S| = \kappa(C_\Gamma(S))$ 的生成集 S 不必是极小的.

例 3.7.3 (Alspach[8]) 作为定理 3.7.2 的应用, 考虑群 $\Gamma = Z_4 \times Z_2$. 设 $S = \{10, 11, 20, 30, 31\}$, 则 $S = S^{-1}$. Cayley 图 $G = C_\Gamma(S)$ 是无向图, 而且同构于图 3.1 中的循环图 $G(8; \pm\{1, 3, 4\})$. 集 $S' = \{10, 11, 30, 31\}$ 是 Γ 的极小生成集. 由定理 3.7.2 知, $\kappa(G) \geqslant \kappa(C_\Gamma(S')) = |S'| = 4$. 令 $A = \{00, 20\}$ (即图中点集 $\{0, 4\}$), 则 $N_G^+(A) = \{10, 11, 30, 31\}$ (即图中点集 $\{1, 3, 5, 7\}$), 且 $\kappa(G) \leqslant |N_G^+(A)| = 4$. 这说明 $\kappa(G) = 4$. 这个例子表明定理 3.4.4 (g) 对 $\delta = 5$ 是不成立的.

§3.8 素阶点可迁图

从上面几节的讨论, 素阶点可迁图有许多优良的性质, 比如, 简单的原子划分和最大的连通度. 这一节讨论素阶点可迁图的结构.

定理 3.8.1 设 $p(\geqslant 2)$ 是素数, G 是 p 阶非空图, Z_p 是模 p 剩余类加法群. 那么 G 是点可迁的当且仅当存在非空集 $S \subset Z_p \setminus \{0\}$ 使得 $G \cong C_{Z_p}(S)$.

证明 ($\Leftarrow$) 设 $G \cong C_{Z_p}(S)$, 则 G 是 Cayley 图. 由定理 3.6.2 知, G 是点可迁的.

($\Rightarrow$) 设 p 是素数, G 是 p 阶点可迁图. 要证明存在非空集 $S \subset Z_p \setminus \{0\}$ 使得 $G \cong C_{Z_p}(S)$. 只需选择非空集 $S \subset Z_p \setminus \{0\}$, 并建立 G 和 $C_{Z_p}(S)$ 之间的同构.

对任何 $x \in V(G)$, 令 $(\mathrm{Aut}(G))_x = \{\pi \in \mathrm{Aut}(G) : \pi(x) = x\}$. 则 $(\mathrm{Aut}(G))_x$ 是 $\mathrm{Aut}(G)$ 中 x 的稳定子群. 因为 G 是点可迁的, 所以对任何 $x \in V(G)$, 我们有

$$\begin{aligned} o(\mathrm{Aut}(G)) &= |V(G)|o((\mathrm{Aut}(G))_x = p \cdot o((\mathrm{Aut}(G))_x) \\ &= p|o((\mathrm{Aut}(G)). \end{aligned}$$

另一方面, 因为 $o(\mathrm{Aut}(G)) = p(p-1)!$, 而且 $(p-1)!$ 都不能被 p 整除, 所以由 Sylow 定理知, $\mathrm{Aut}(G)$ 有 p 阶 Sylow 子群 P. 因为 p 是素数, P 是 p 阶循环群, 所以 $P \cong Z_p$.. 令 $\alpha \in P$ 是群 P 的生成元. 则 $P = \langle\alpha\rangle = \{1, \alpha, \cdots, \alpha^{p-1}\}$, 其中 $1 = \alpha^p$ 是 P 的单位元. 因此, α 无固定点. 令 $x_0 \in V(G)$. 则 $x_0, \alpha(x_0), \cdots, \alpha^{p-1}(x_0)$ 是 G 中 p 个不同的顶点. 令 $x_i = \alpha^i(x_0), \quad i = 0, 1, 2, \cdots, p-1$. 则 $V(G) = \{x_0, x_1, \cdots, x_{p-1}\}$. 令

$$S = \{\beta \in P : \ \beta(x_0) \in N_G^+(x_0)\}.$$

则因为 G 是非空的, 所以 $1 \notin S$, 且 $S \neq \emptyset$.

为了证明 $G \cong C_{Z_p}(S)$, 只需证明 $C_P(S) \cong G$. 为此, 定义映射

$$\begin{aligned} \phi : \ P \quad &\to V(G) \\ \alpha^i \quad &\mapsto \phi(\alpha^i) = \alpha^i(x_0) = x_i, \quad i = 0, 1, \cdots, p-1. \end{aligned}$$

容易验证映射 $\phi : P \to V(G)$ 是双射. 下面只需证明 $\phi : P \to V(G)$ 保相邻性即可. 由 Cayley 图的定义知, 对任何 $\alpha^i, \alpha^j \in P$, 有

$$\begin{aligned} (\alpha^i, \alpha^j) \in E(C_P(S)) &\Leftrightarrow \exists \beta \in S \text{ 使得 } (\alpha^i)^{-1}\alpha^j = \beta \\ &\Leftrightarrow \alpha^j = \alpha^i \beta. \end{aligned}$$

令 $\beta(x_0) = y \in N_G^+(x_0)$. 则由 $\alpha^i \in \mathrm{Aut}(G)$ 保相邻性, 有

$$\begin{aligned} (\alpha^i, \alpha^j) \in E(C_P(S)) &\Leftrightarrow (\phi(\alpha^i), \phi(\alpha^j)) = (\alpha^i(x_0), \alpha^i\beta(x_0)) \\ &\qquad = (\alpha^i(x_0), \alpha^i(y)) = \alpha^i(x_0, y) \in E(G) \\ &\Leftrightarrow (x_0, y) \in E(G). \end{aligned}$$

定理得证. ∎

定理 3.8.1 的无向图形式是由 Turner[296] 首先发现的, 由 Elspas, Turner[92] 和 Chao, Wells[57] 独立地推广到有向图.

因为循环图 $G(n; S)$ 和 $G(n; \pm S)$ 是加法群 Z_n 关于 S 的 Cayley 图 $C_{Z_n}(S)$, 所以我们可以将定理 3.8.1 重新叙述如下.

设 $p\,(\geqslant 2)$ 是素数，且 G 是 p 阶非空图. 那么，G 是点可迁的当且仅当存在非空集 $S \subset \{1, 2, \cdots, p-1\}$, 如果 G 是有向图，那么 $G \cong G(p; S)$; 如果 G 是无向图，那么 $G \cong G(p; \pm S)$.

Cayley 图的最大优点是它的构造简单性和点可迁性. 正是因为这些优点，Cayley 图已被广泛用于互连网络拓扑结构的设计中. 以后，我们将看到，许多著名的互连网络的拓扑结构都是 Cayley 图 (也见 Annexstein 等 [10]). 另一方面，许多作者通过各种各样的群已获得许多具有良好性质的大规模 Cayley 图. 有兴趣的读者可参见 Carlsson 等 [54] 和 Brunat 等 [48].

习 题

3.1 分别构造一个正则的无向图和有向图使得它们都不是点可迁的.

3.2 证明: n 阶图是点可迁的当且仅当它的所有 $(n-1)$ 阶子图都是同构的.

3.3 证明: 边可迁无向图是边正则的.

3.4 证明: 无孤立点的边可迁无向图 G, 或者是点可迁图，或者是 2 部分图. 同时证明定理 3.2.3 的推论 1, 推论 2 和推论 3.

3.5 设 $L(G)$ 是 G 的线图. 证明或者否定下面的论述.

(a) 如果 G 是边可迁的，那么 $L(G)$ 是点可迁的.

(b) 如果 $L(G)$ 是点可迁的，那么 G 是边可迁的.

3.6 写出边原子定义.

(a) 利用边原子证明定理 3.3.4 和定理 3.3.5;

(b) 利用 (a) 来证明定理 3.4.3.

3.7 证明: Petersen 图的自同构群是对称群 S_5, 是点可迁的，但不是 Cayley 图.

3.8 设 $\Gamma = Z_4 \times Z_2$, $S = \{10, 11, 20, 30, 31\}$. 证明: Cayley 图 $C_\Gamma(S)$ 同构于循环无向图 $G(8; \pm\{1, 3, 4\})$.

3.9 设 Γ 是 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 上的对称群，$a = (12)$, $b = (134)$ 是 Γ 中两元素. 画出 Cayley 图 $G = C_\Gamma(S)$, 其中 $S = \{a, b, ab\}$.

3.10 证明: 立方体 Q_3 是 Cayley 图.

第 4 章　网络设计的笛卡儿乘积方法

这一章介绍网络设计的第三种方法: 笛卡儿乘积方法. 笛卡儿乘积是从若干特定的小网络构造大网络的有效方法. 由这种方法构造出来的网络包含特定的小网络作为它的子网络, 而且保留这些小网络的许多好性质, 比如, 正则性, 连通性, 点可迁性, Euler 性, Hamilton 性等. 特别地, Cayley 图的笛卡儿乘积仍是 Cayley 图. 许多图论参数, 比如, 顶点度, 直径, 连通度等, 都可以很方便地计算出来. 因此, 笛卡儿方法成为设计大规模互连网络的重要方法.

§4.1　图的笛卡儿乘积

我们先考虑无向图的笛卡儿乘积.

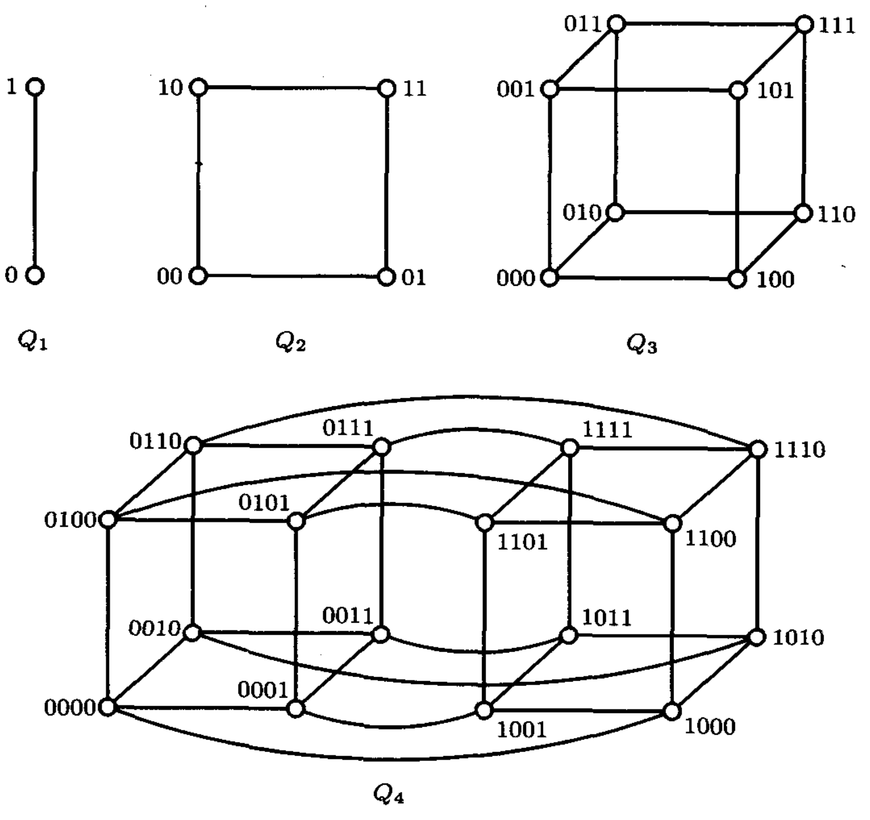


图 4.1　超立方体网络 Q_n, 其中 $Q_1 = K_2, Q_i = K_2 \times Q_{i-1}$, $i = 2, 3, 4$

设 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$ 是两个无向图. G_1 和 G_2 的笛卡儿乘积 (Cartesian product) 是无向图, 记为 $G_1 \times G_2$, 其中 $V(G_1 \times G_2) = V_1 \times V_2$, 两个不同的顶点 x_1x_2 和 y_1y_2 (其中 $x_1, y_1 \in V(G_1)$, $x_2, y_2 \in V(G_2)$) 相邻当且仅当或者 $x_1 = y_1$ 且 $x_2y_2 \in E(G_2)$, 或者 $x_2 = y_2$ 且 $x_1y_1 \in E(G_1)$. G_1 和 G_2 称为 $G_1 \times G_2$ 的因子.

例如, 图 4.1 中所示的笛卡儿乘积, 其中 $Q_1 = K_2$, $Q_i = K_2 \times Q_{i-1}$, $i = 2, 3, 4$.

定理 4.1.1　无向图 G_1 和 G_2 的笛卡儿乘积 $G_1 \times G_2$ 有下列基本性质.

(a) $v(G_1 \times G_2) = v(G_1)v(G_2)$.

(b) 对任何 $xy \in V(G_1 \times G_2)$, 其中 $x \in V(G_1)$ 且 $y \in V(G_2)$,

$$d_{G_1 \times G_2}(xy) = d_{G_1}(x) + d_{G_2}(y).$$

特别地, 如果 G_1 和 G_2 分别是 r_1 正则和 r_2 正则的, 那么 $G_1 \times G_2$ 是 $r_1 + r_2$ 正则的.

(c) $\varepsilon(G_1 \times G_2) = v(G_1)\varepsilon(G_2) + v(G_2)\varepsilon(G_1)$.

(d) 对任何 $y \in V(G_2)$, $G_1 \cong G_1 \times \{y\} \subseteq G_1 \times G_2$; 对任何 $x \in V(G_1)$, $G_2 \cong \{x\} \times G_2 \subseteq G_1 \times G_2$.

证明 由笛卡儿乘积图的定义知, 性质 (a) 和 (d) 显然成立. 下面证明 (b) 和 (c) 中的等式.

(b) 设 $xy \in V(G_1 \times G_2)$, 其中 $x \in V(G_1)$, $y \in V(G_2)$. 那么,

$$\begin{aligned} d_{G_1 \times G_2}(xy) &= |N_{G_1}(x) \times \{y\}| + |\{x\} \times N_{G_2}(y)| \\ &= d_{G_1}(x) + d_{G_2}(y). \end{aligned}$$

(c) 由 (b) 和定理 1.2.1 (b), 有

$$\begin{aligned} \varepsilon(G_1 \times G_2) &= \frac{1}{2} \sum_{xy \in V_1 \times V_2} d_{G_1 \times G_2}(xy) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{xy \in V_1 \times V_2} (d_{G_1}(x) + d_{G_2}(y)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{xy \in V_1 \times V_2} d_{G_1}(x) + \frac{1}{2} \sum_{xy \in V_1 \times V_2} d_{G_2}(y) \\ &= \sum_{y \in V_2} \left(\frac{1}{2} \sum_{x \in V_1} d_{G_1}(x) \right) + \sum_{x \in V_1} \left(\frac{1}{2} \sum_{y \in V_2} d_{G_2}(y) \right) \\ &= \sum_{y \in V_2} \varepsilon(G_1) + \sum_{x \in V_1} \varepsilon(G_2) \\ &= v(G_1)\varepsilon(G_2) + v(G_2)\varepsilon(G_1). \end{aligned}$$

定理得证. ∎

现在考虑有向图的笛卡儿乘积. 设 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$ 是两个有向图. G_1 和 G_2 的笛卡儿乘积 (Cartesian product), 记为 $G_1 \times G_2$, 是有向图, 其中 $V(G_1 \times G_2) = V_1 \times V_2$. 存在一条从顶点 x_1x_2 到顶点 y_1y_2 的有向边 (其中 $x_1, y_1 \in V(G_1)$, $x_2, y_2 \in V(G_2)$) 当且仅当或者 $x_1 = y_1$ 且 $(x_2, y_2) \in E(G_2)$, 或者 $x_2 = y_2$ 且 $(x_1, y_1) \in E(G_1)$.

例如, 图 4.2 所示的有向图是有向圈 C_3 和有向圈 C_4 的笛卡儿乘积 $C_3 \times C_4$.

定理 4.1.2 有向图 G_1 和 G_2 的笛卡儿乘积 $G_1 \times G_2$ 有下列基本性质.

(a) $v(G_1 \times G_2) = v(G_1)v(G_2)$.

(b) 对任何 $xy \in V(G_1 \times G_2)$, 其中 $x \in V(G_1)$ 且 $y \in V(G_2)$, 有

$$d^+_{G_1 \times G_2}(xy) = d^+_{G_1}(x) + d^+_{G_2}(y),$$

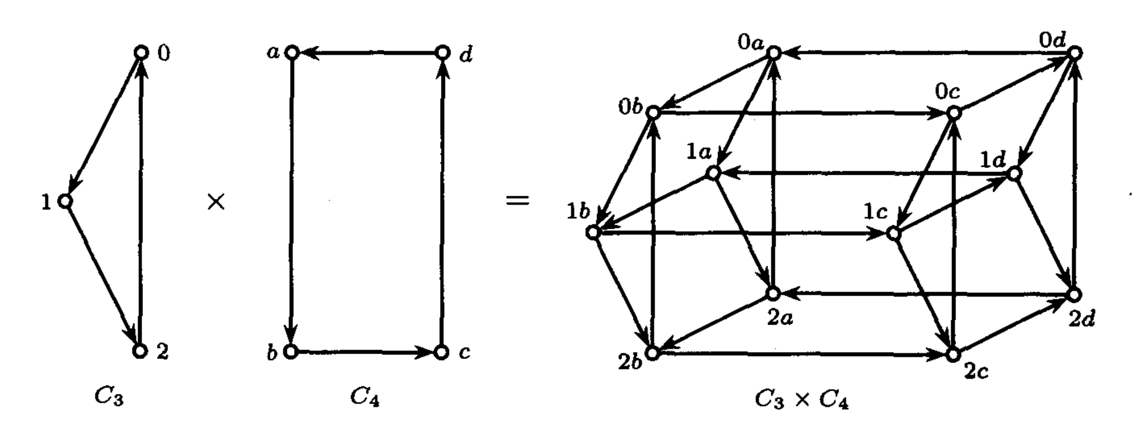


图 4.2 有向圈 C_3 和有向圈 C_4 的笛卡儿乘积 $C_3 \times C_4$

$$d^-_{G_1 \times G_2}(xy) = d^-_{G_1}(x) + d^-_{G_2}(y).$$

特别地, 如果 G_1 和 G_2 分别是 r_1 正则和 r_2 正则的, 那么 $G_1 \times G_2$ 是 $r_1 + r_2$ 正则的.

(c) $\varepsilon(G_1 \times G_2) = v(G_1)\varepsilon(G_2) + v(G_2)\varepsilon(G_1)$.

(d) 对任何 $y \in V(G_2)$, $G_1 \cong G_1 \times \{y\} \subseteq G_1 \times G_2$; 对任何 $x \in V(G_1)$, $G_2 \cong \{x\} \times G_2 \subseteq G_1 \times G_2$.

证明 证明同定理 4.1.1 的证明, 留给读者作为练习. ∎

我们对笛卡儿乘积图作一些注释.

1. 我们虽然分别给出了无向图的笛卡儿乘积和有向图的笛卡儿乘积, 但如果把无向图视为对称有向图, 那么它们本质上是一样的. 这说明, 对有向图的笛卡儿乘积成立的结论, 对无向图的笛卡儿乘积也同样成立. 因此, 在以下的讨论中, 只需讨论有向图的笛卡儿乘积.

2. 容易观察到, 作为图的运算, 在同构的意义下, 图的笛卡儿乘积满足交换律和结合律. 即, $G_1 \times G_2 = G_2 \times G_1$, $(G_1 \times G_2) \times G_3 = G_1 \times (G_2 \times G_3)$. 这一性质的证明很简单. 为此, 定义映射

$$\varphi:\ V_1 \times V_2 \longrightarrow V_2 \times V_1$$
$$x_1x_2 \mapsto x_2x_1, \quad \forall\, x_1 \in V_1, x_2 \in V_2.$$

显然, 映射 φ 是双射. 只需证明 φ 是保相邻性的. 事实上, 设 $x_1, y_1 \in V_1$ 且 $x_2, y_2 \in V_2$. 由笛卡儿乘积图的定义, 有

$$\begin{aligned}
&(x_1x_2, y_1y_2) \in E(G_1 \times G_2)\\
&\quad\Leftrightarrow x_1 = y_1, (x_2, y_2) \in E(G_2)\\
&\qquad\text{或 } (x_1, y_1) \in E(G_1), x_2 = y_2\\
&\quad\Leftrightarrow (x_2x_1, y_2y_1) \in E(G_2 \times G_1)\\
&\quad\Leftrightarrow (\varphi(x_1x_2), \varphi(y_1y_2)) \in E(G_2 \times G_1).
\end{aligned}$$

这说明图的笛卡儿乘积满足交换律. 同样地可以证明, 图的笛卡儿乘积也满足结合律, 详细证明留给读者.

3. 设 $G_i = (V_i, E_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是无向图. 由笛卡儿乘积的交换律和结合律, 可以定义 n 个无向图 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 的笛卡儿乘积为 $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$, 其中 $V(G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n) = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$. 两顶点 $x_1x_2\cdots x_n$ 和 $y_1y_2\cdots y_n$ 相邻当且仅当两向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 有且仅有一个坐标不同, 比如, $x_i \neq y_i$, 且 $x_iy_i \in E(G_i)$.

4. 类似地可以定义 n 个有向图 $G_i = (V_i, E_i)$ $(i = 1, 2 \cdots, n)$ 的笛卡儿乘积为 $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$. 从顶点 $x_1x_2\cdots x_n$ 到顶点 $y_1y_2\cdots y_n$ 有一条有向边当且仅当两向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 有且仅有一个坐标不同, 比如, $x_i \neq y_i$, 且 $(x_i, y_i) \in E(G_i)$.

5. 笛卡儿乘积满足交换律和结合律这一性质能大大简化有关图的笛卡儿乘积性质的证明.

例如, 应用结合律和归纳法容易证明, 图的笛卡儿乘积的下列性质, 详细的留给读者.

设 $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ 和 $x = x_1x_2\cdots x_n \in V(G)$, 其中 $x_i \in V(G_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 如果 G 是有向图, 那么

$$d^+_G(x) = d^+_{G_1}(x_1) + d^+_{G_2}(x_2) + \cdots + d^+_{G_n}(x_n),$$

$$d^-_G(x) = d^-_{G_1}(x_1) + d^-_{G_2}(x_2) + \cdots + d^-_{G_n}(x_n).$$

如果 G 是无向图, 那么

$$d_G(x) = d_{G_1}(x_1) + d_{G_2}(x_2) + \cdots + d_{G_n}(x_n).$$

例 4.1.1 超立方体网络是一类著名的网络, 它可以通过笛卡儿乘积得到. n 维*超立方体* (n-dimensional hypercube), 简称 n *立方体* (n-cube), 记为 Q_n, 是 n 个 2 阶完全图 K_2 的笛卡儿乘积 $K_2 \times K_2 \times \cdots \times K_2$. 图 4.1 中所示的是 Q_1, Q_2, Q_3 和 Q_4. 由图的笛卡儿乘积的性质, 立即得到超立方体 Q_n 是 n 正则的, 有 2^n 个顶点和 $n2^{n-1}$ 条边. 超立方体的其他性质将在第 6 章作详细讨论.

6. 笛卡儿乘积的下面的性质和记号在某些命题的证明中是有用的.

由 $G_1 \times G_2$ 的定义, 如果 $P = (x_1, v_1, v_2, \cdots, v_m, y_1)$ 是 G_1 中一条 (x_1, y_1) 路, 那么对任何 $b \in V(G_2)$, $(x_1b, v_1b, v_2b, \cdots, v_mb, y_1b)$, 记为 Pb, 是 $G_1 \times G_2$ 中从顶点 x_1b 到顶点 y_1b 的路.

同样地, 如果 $W = (x_2, u_1, u_2, \cdots, u_\ell, y_2)$ 是 G_2 中一条 (x_2, y_2) 路, 那么对任何 $a \in V(G_1)$, $(ax_2, au_1, au_2, \cdots, au_\ell, ay_2)$, 记为 aW, 是 $G_1 \times G_2$ 中从顶点 ax_2 到顶点 ay_2 的路.

设 $x = x_1x_2$, 且 $y = y_1y_2$. 如果 x 和 y 是 $G_1 \times G_2$ 中不同两顶点, 那么 $Q = Px_2 \cup y_1W$ 是 $G_1 \times G_2$ 中一条 (x, y) 路. 这样的路可以表示为

$$x = x_1x_2 \overset{Px_2}{\rightarrow} y_1x_2 \overset{y_1W}{\rightarrow} y_1y_2 = y$$

且 Q 的长为 P 和 W 的长之和.

§4.2 笛卡儿乘积图的直径和连通度

这一节讨论笛卡儿乘积图的直径和连通度. 首先讨论笛卡儿乘积的直径.

引理 4.2.1 设 $x = x_1x_2$, $y = y_1y_2 \in V(G_1 \times G_2)$, 其中 $x_1, y_1 \in V(G_1)$, $x_2, y_2 \in V(G_2)$. 令 P 是 G_1 中最短 (x_1, y_1) 路, W 是 G_2 中最短 (x_2, y_2) 路. 那么 $Px_2 \cup y_1W$ 是 $G_1 \times G_2$ 中一条最短 (x, y) 路. 因此, $d(G_1 \times G_2; x, y) = d(G_1; x_1, y_1) + d(G_2; x_2, y_2)$.

证明 不妨设 $x_1 \neq y_1$, $x_2 \neq y_2$. (反证) 设 $Q = (x_1x_2, u_1u_2, \cdots, v_1v_2, y_1y_2)$ 是 $G_1 \times G_2$ 中最短 (x, y) 路. 则由 Q 中顶点的第一个坐标 $x_1, u_1, \cdots, v_1, y_1$ 按照原来的顺序 (去掉其中的重复点) 确定的路 P' 是 G_1 中一条 (x_1, y_1) 路. 同样地, 由 Q 中顶点的第二个坐标 $x_2, u_2, \cdots, v_2, y_2$ 按照原来的顺序 (去掉其中的重复点) 确定的路 W' 是 G_2 中一条 (x_2, y_2) 路. 于是

$$\begin{aligned} \varepsilon(Px_2 \cup y_1W) &> \varepsilon(Q) = \varepsilon(P') + \varepsilon(W') \\ &\geqslant \varepsilon(P) + \varepsilon(W) \\ &= \varepsilon(Px_2 \cup y_1W), \end{aligned}$$

矛盾. ∎

定理 4.2.2 $d(G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n) = d(G_1) + d(G_2) + \cdots + d(G_n)$.

证明 由笛卡儿乘积的结合律和归纳法, 只需证 $d(G_1 \times G_2) = d(G_1) + d(G_2)$.

一方面, 取 $x = x_1x_2$, $y = y_1y_2 \in V(G_1 \times G_2)$, $x_1, y_1 \in V(G_1)$, $x_2, y_2 \in V(G_2)$ 使得 $d(G_1 \times G_2) = d(G_1 \times G_2; x, y)$. 由引理 4.2.1,

$$\begin{aligned} d(G_1 \times G_2) &= d(G_1 \times G_2; x, y) \\ &= d(G_1; x_1, y_1) + d(G_2; x_2, y_2) \\ &\leqslant d(G_1) + d(G_2). \end{aligned}$$

另一方面, 取 $x_1, y_1 \in V(G_1), x_2, y_2 \in V(G_2)$ 使得 $d(G_i) = d(G_i; x_i, y_i), i = 1, 2$. 令 $x = x_1x_2, y = y_1y_2$, 由引理 4.2.1,

$$\begin{aligned} d(G_1 \times G_2) &\geqslant d(G_1 \times G_2; x, y) \\ &= d(G_1; x_1, y_1) + d(G_2; x_2, y_2) \\ &= d(G_1) + d(G_2). \end{aligned}$$

定理得证. ▮

对于无向图, Day 和 Al-Ayyoub[73] 给出了定理 4.2.2 的证明.

现在讨论笛卡儿乘积的连通度. 下面的结果分别由许多作者独立得到, 无向图形式首先由 Sabidussi[274] 给出证明, 另一个证明见 Chiue 和 Shiech[63]. 这里给出徐俊明 [317] 的证明.

定理 4.2.3 如果对每个 $i=1,2,\cdots,n$, 均有 $\kappa(G_i)>0$, 那么

$$\kappa(G_1\times G_2\times\cdots\times G_n)\geqslant\kappa(G_1)+\kappa(G_2)+\cdots+\kappa(G_n).$$

证明 由笛卡儿乘积的结合律和数学归纳法, 我们只需证明

$$\kappa(G_1\times G_2)\geqslant\kappa(G_1)+\kappa(G_2).$$

设 $\kappa(G_i)=w_i\,(i=1,2)$, x 和 y 是 $G_1\times G_2$ 中任意两个不同的顶点. 由 Menger-Whitney 准则 (定理 1.5.3), 只需证明 $G_1\times G_2$ 中存在 w_1+w_2 条内点不交的 (x,y) 路. 令 $x=x_1x_2$, $y=y_1y_2$, 其中 $x_1,y_1\in V(G_1)$, $x_2,y_2\in V(G_2)$.

如果 $x_1\neq y_1$, 因为 G_1 是 w_1 连通的, 所以由 Menger 定理知 G_1 中存在 w_1 条内点不交的 (x_1,y_1) 路 $P_1,P_2,\cdots,P_{w_1}$. 设 P 是 G_1 中最短 (x_1,y_1) 路. 不妨设 P_1 的第一条边在 P 上. 于是, $\varepsilon(P_i)\geqslant 2$, $i=2,3,\cdots,w_1$. 设 v_i 是 P_i 上从 x_1 到 y_1 的第一个内部点 (如果 $(x_1,y_1)\in E(G_1)$, 则设 $v_1=y_1$). 那么点 v_i 分离 P_i 为两段子路 a_i 和 P'_i, 其中 $a_i=(x_1,v_i)$, 而 P'_i 是 P_i 中从 v_i 到 y_1 的一段. 于是, (x_1,y_1) 路 P_i 可以表示成

$$P_i=x_1\xrightarrow{a_i}v_i\xrightarrow{P'_i}y_1,\quad i=2,3,\cdots,w_1.$$

同理, 若 $x_2\neq y_2$, 则 G_2 中存在 w_2 条内点不交 (x_2,y_2) 路 $W_1,W_2,\cdots,W_{w_2}$. 设 W 是 G_2 中最短 (x_2,y_2) 路, 并设 W 的第一条边与 W_1 公共. 令 u_j 是 W_j $(j=1,2,\cdots,w_2)$ 上从 x_2 到 y_2 的第一个内部点 (如果 $(x_2,y_2)\in E(G_2)$, 则令 $u_1=y_2$). 那么 W_j 可以表示成

$$W_j=x_2\xrightarrow{b_j}u_j\xrightarrow{W'_j}y_2,\ j=2,3,\cdots,w_2,$$

其中 $b_j=(x_2,u_j)$, 而 W'_j 是 W_j 上从 u_j 到 y_2 的一段.

设 $V=\{v_1,\cdots,v_{w_1}\}$, $U=\{u_1,\cdots,u_{w_2}\}$. 因为 G_i 是 w_i 连通的, $i=1,2$, 由定理 1.5.4 知, G_1 中存在 (V,x_1) 扇 $F_{w_1}(V,x_1)=\{T_1,T_2,\cdots,T_{w_1}\}$, G_2 中存在 (U,x_2) 扇 $F_{w_2}(U,x_2)=\{U_1,U_2,\cdots,U_{w_2}\}$.

应用上面的记号, 在 $G_1\times G_2$ 中构造 w_1+w_2 条内点不交的 (x_1x_2,y_1y_2) 路 R_1, $R_2,\cdots,R_{w_1+w_2}$ 如下.

如果 $y_1 \neq x_1$, 且 $y_2 \neq x_2$, 那么令

$$\begin{cases} R_1 = x_1x_2 \xrightarrow{Px_2} y_1x_2 \xrightarrow{y_1W_1} y_1y_2, \\ R_i = x_1x_2 \xrightarrow{a_ix_2} v_ix_2 \xrightarrow{v_iW} v_iy_2 \xrightarrow{P_i'y_2} y_1y_2, \ i = 2, \cdots, w_1, \\ R_{w_1+1} = x_1x_2 \xrightarrow{x_1W} x_1y_2 \xrightarrow{P_1y_2} y_1y_2, \\ R_{w_1+j} = x_1x_2 \xrightarrow{x_1b_j} x_1u_j \xrightarrow{Pu_j} y_1u_j \xrightarrow{y_1W_j'} y_1y_2, \ j = 2, \cdots, w_2. \end{cases} \tag{4.2.1}$$

如果 $y_1 = x_1$, 且 $y_2 \neq x_2$, 那么令

$$\begin{cases} R_i = x_1x_2 \xrightarrow{a_ix_2} v_ix_2 \xrightarrow{v_iW} v_iy_2 \xrightarrow{T_iy_2} x_1y_2 = y_1y_2, \\ \qquad i = 1, 2, \cdots, w_1 \\ R_{w_1+j} = x_1x_2 \xrightarrow{x_1W_j} x_1y_2 = y_1y_2, \ j = 1, 2, \cdots, w_2. \end{cases} \tag{4.2.2}$$

如果 $y_1 \neq x_1$, 且 $y_2 = x_2$, 那么令

$$\begin{cases} R_i = x_1x_2 \xrightarrow{P_ix_2} y_1x_2 = y_1y_2, \ i = 1, 2, \cdots, w_1, \\ R_{w_1+j} = x_1x_2 \xrightarrow{x_1b_j} x_1u_j \xrightarrow{Pu_j} y_1u_j \xrightarrow{x_1U_j} y_1x_2 = y_1y_2, \\ \qquad j = 1, 2, \cdots, w_2. \end{cases} \tag{4.2.3}$$

易验证, 路 $R_1, R_2, \cdots, R_{w_1+w_2}$ 在 $G_1 \times G_2$ 中是内点不交的. 定理得证. ∎

推论 如果 $\kappa(G_i) = \delta(G_i) > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 那么

$$\kappa(G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n) = \kappa(G_1) + \kappa(G_2) + \cdots + \kappa(G_n).$$

证明 设 $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$. 由定理 4.1.1 或者定理 4.1.2, 有

$$\delta(G) = \delta(G_1) + \delta(G_2) + \cdots + \delta(G_n).$$

于是, 由 Whitney 不等式和定理 4.2.3 得

$$\delta(G) \geqslant \kappa(G) \geqslant \kappa(G_1) + \kappa(G_2) + \cdots + \kappa(G_n) = \delta(G),$$

即, $\kappa(G) = \kappa(G_1) + \kappa(G_2) + \cdots + \kappa(G_n)$. ∎

该推论有许多应用. 例如, 因为 $d(K_2) = 1 = \kappa(K_2)$, 所以由定理 4.2.2 和该推论, 立即得到超立方体 Q_n 的直径和连通度.

定理 4.2.4 $d(Q_n) = n = \kappa(Q_n)$. ∎

关于笛卡儿乘积图边连通度, 也有类似于定理 4.2.3 的结果.

定理 4.2.5 如果对每个 $i = 1, 2, \cdots, n$, 均有 $\lambda(G_i) > 0$, 那么

$$\lambda(G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n) \geqslant \lambda(G_1) + \lambda(G_2) + \cdots + \lambda(G_n).$$ ∎

最近, 徐俊明和杨超 [346] 完全确定了笛卡儿乘积图的连通度和边连通度. 在介绍这些结果之前, 我们叙述两个引理, 证明很简单, 留给读者作为练习.

引理 4.2.6 设 p, q, a, b 是整数且 $1 \leqslant a \leqslant p-1, 1 \leqslant b \leqslant q-1$. 那么 $a(q-b)+b(p-a) \geqslant p+q-2$. ▮

引理 4.2.7 设 G 是有向图, $S \subseteq V(G)$. 那么 $|S \cup N_G^+(S)| \geqslant \delta^+(G)+1$, $|S \cup N_G^-(S)| \geqslant \delta^-(G)+1$. ▮

定理 4.2.8 对任何两个非平凡强连通有向图 G_1 和 G_2,

$$\kappa(G_1 \times G_2) = \min\{\kappa_1 v_2, \kappa_2 v_1, \delta_1^+ + \delta_2^+, \delta_1^- + \delta_2^-\}$$

证明 设 $G = G_1 \times G_2$. 由定理 4.1.2, 显然有

$$\kappa(G) \leqslant \min\{\delta^+(G), \delta^-(G)\} = \min\{\delta_1^+ + \delta_2^+, \delta_1^- + \delta_2^-\}.$$

如果 G_2 不是完全有向图并设 S_0 是 G_2 的最小点分离集, 那么, $V_1 \times S_0$ 是 G 的点分离集, 这意味着 $\kappa(G) \leqslant \kappa_2 v_1$; 如果 G_2 是完全图, 那么 $\kappa_2 = \delta_2^+$, 因此, $\kappa(G) \leqslant \delta_1^+ + \delta_2^+ \leqslant \delta_2^+(\delta_1^+ + 1) \leqslant \kappa_2 v_1$. 由对称性, 同样地能证明 $\kappa(G) \leqslant \kappa_1 v_2$.

余下的是要证明

$$\kappa(G) \geqslant \min\{\kappa_1 v_2, \kappa_2 v_1, \delta_1^+ + \delta_2^+, \delta_1^- + \delta_2^-\}.$$

由于 G_1 和 G_2 都是非平凡的, 所以容易看到 G 不是完全图. 设 S 是 G 的最小点分离集, 那么存在 $G-S$ 的强连通分支 C 使得它的内邻点 $N_{G-S}^-(C) = \emptyset$.

为了证明叙述方便, 我们临时定义一个术语. G 中两顶点 x_1x_2 和 y_1y_2 称为平行的, 如果 $x_2 = y_2$ 或者 $x_1 = y_1$. 我们考虑两种情形。

情形 1: C 中顶点不与 $G-S$ 中其他分支顶点平行.

设 $A = \{x \in V_1:$ 存在 $y \in V_2$ 使得 $xy \in V(C)\}$ 且 $B = \{y \in V_2:$ 存在 $x \in V_1$ 使得 $xy \in V(C)\}$. 因为 C 中顶点不与 $G-S$ 中其他顶点平行, 所以 $1 \leqslant |A| \leqslant v_1 - 1$, $1 \leqslant |B| \leqslant v_2 - 1$, 而且 $(V_1 - A) \times B$ 和 $A \times (V_2 - B)$ 都在 S 中. 令 $a = |A|, b = |B|$. 由引理 4.2.6 得

$$\begin{aligned} \kappa(G) = |S| &\geqslant |(V_1 - A) \times B| + |A \times (V_2 - B)| \\ &= (v_1 - a)b + a(v_2 - b) \\ &\geqslant v_1 + v_2 - 2 \\ &\geqslant \max\{\delta_1^+ + \delta_2^+, \delta_1^- + \delta_2^-\}. \end{aligned}$$

情形 2: C 中存在顶点与 $G-S$ 中其他分支顶点平行.

不妨假定 $H = \{x_1\} \times G_2$ 中存在点被含在 $G-S$ 的强连通分支 C 和 C' 中. 设 $V_1 = \{x_1, x_2, \cdots, x_{v_1}\}$, $S_i = S \cap (\{x_i\} \times V_2)$. 注意到, 如果 $\{x_i\} \times V_2$ 包含 $G-S$ 中

至少两个分支中的顶点, 那么 $|S_i| \geqslant \kappa_2$; 如果 $\{x_i\} \times V_2 \subseteq S$, 那么 $|S_i| = v_2 > \kappa_2$. 因此, 如果对每个 $x_i \in V_1$, $\{x_i\} \times V_2$ 或者包含至少两个分支中的顶点，或者不含任何分支中的顶点, 那么

$$\kappa(G) = |S| = \sum_{i=1}^{v_1} |S_i| \geqslant v_1\kappa_2.$$

在以下的讨论中, 假定存在 $x_k \neq x_1$ 使得 $\{x_k\} \times G_2$ 仅含 $G - S$ 的某个强连通分支中顶点. 选取这样的 x_k 使得 $|S_k|$ 尽可能地小.

子情形 2.1: $\{x_k\} \times G_2$ 包含 C 中的顶点.

令 $F = V(H) - (V(C) \cap V(H)) - S_1$. 因为 $G - S$ 的另一个强连通分支 C' 也包含 H 中顶点, 所以 $F \neq \emptyset$. 设 P 是 G_1 中最短的有向 (x_1, x_k) 路, 我们断言

$$\sum_{x_{t_i} \in V(P - x_1)} |S_{t_i}| \geqslant |F|.$$

若不然, 存在 $z \in V_2$ 使得 $P \times \{z\}$ 是 $G - S$ 中从分支 C' 到分支 C 的有向路, 矛盾于 $N^-_{G-S}(C) = \emptyset$. 同样的理由得 $N^+_H(F) \subseteq S_1$. 因此, 由引理 4.2.7 得,

$$\begin{aligned}\sum_{x_{t_i} \in V(P)} |S_{t_i}| &= |S_1| + \sum_{x_{t_i} \in V(P - x_1)} |S_{t_i}| \\ &\geqslant |N^+_H(F)| + |F| \\ &\geqslant \delta^+_2 + 1.\end{aligned}$$

设 $x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots, x_{r_{\delta^+_1 - 1}}$ 是 G_1 中 x_1 不在 P 中的 $(\delta^+_1 - 1)$ 个外邻点. 如果对每个 $j = 1, 2, \cdots, \delta^+_1 - 1$ 均有 $|S_{r_j}| \geqslant 1$, 那么有

$$\begin{aligned}\kappa(G) = |S| &\geqslant \sum_{j=1}^{\delta^+_1 - 1} |S_{r_j}| + \sum_{x_{t_i} \in V(P)} |S_{t_i}| \\ &\geqslant (\delta^+_1 - 1) + (\delta^+_2 + 1) \\ &= \delta^+_1 + \delta^+_2.\end{aligned}$$

现在, 不妨假定 $S_{r_1} = \emptyset$. 那么 $\{x_{r_1}\} \times G_2$ 含在 $G - S$ 的某强连通分支 C'' 中. 注意到分支 C 和 C' 都含 H 中顶点, 不妨设 $x_1 y \in V(C')$. 如果 $C'' = C$, 那么 $(x_1 y, x_{r_1} y) \in E(G)$, 即 $x_1 y \in N^-_{G-S}(C)$, 矛盾. 因此, $C'' \neq C$. 由 x_k 的选取知, $|S_k| \leqslant |S_{r_1}| = 0$. 这意味着 $\{x_k\} \times G_2$ 包含在 C 中. 因此, 对每个 $y_i \in V_2 (1 \leqslant i \leqslant v_2)$, $G_1 \times \{y_i\}$ 既包含 C 中顶点也包含 C'' 中顶点. 这个事实意味着, 如果令 $S^i = S \cap (G_1 \times \{y_i\})$, 那么 $|S^i| \geqslant \kappa_1$. 于是,

$$\kappa(G) = |S| = \sum_{i=1}^{v_2} |S^i| \geqslant v_2\kappa_1.$$

子情形 2.2: $\{x_k\}\times G_2$ 含在异于 C 的分支 C' 中.

设 $D=V(C)\cap V(H)$, Q 是 G_1 中最短有向 (x_k,x_1) 路. 类似于子情形 2.1 的证明, 有

$$\sum_{x_{s_i}\in V(Q-x_1)}|S_{s_i}|\geqslant|D| \quad \text{且} \quad N_H^-(D)\subseteq S_1.$$

设 $x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_{\delta_1^- -1}}$ 是 G_1 中 x_1 不在 Q 中的 $(\delta_1^- -1)$ 个内邻点. 如果对每个 $j=1,2,\cdots,\delta_1^- -1$ 均有 $|S_{i_j}|\geqslant 1$, 那么有

$$\begin{aligned}\kappa(G)=|S|&\geqslant\sum_{j=1}^{\delta_1^- -1}|S_{i_j}|+(|S_1|+\sum_{x_{s_i}\in V(Q-x_1)}|S_{s_i}|)\\&\geqslant(\delta_1^- -1)+(|N_H^-(D)|+|D|)\\&\geqslant(\delta_1^- -1)+(\delta_2^- +1)\\&=\delta_1^- +\delta_2^-.\end{aligned}$$

于是, 不妨假设 $|S_{i_1}|=|S_k|=0$. 则 $\{x_{i_1}\}\times G_2$ 仅含 $G-S$ 的某强连通分支中的顶点. 这个强连通分支必是 C, 否则, $\{x_2\}\times G_2$ 中有 $D\subseteq V(C)$ 的内邻点, 矛盾. 对每个 $y_i\in V_2(1\leqslant i\leqslant v_2)$, $G_1\times\{y_i\}$ 既包含 C 中顶点 (如 $x_{i_1}y_i$) 也包含 C' 中顶点 (如 x_ky_i). 因此,

$$\kappa(G)=|S|\geqslant\sum_{i=1}^{v_2}|S^i|\geqslant v_2\kappa_1.$$

综上所述, $\kappa(G)\geqslant\min\{\kappa_1v_2,\kappa_2v_1,\delta_1^+ +\delta_2^+,\delta_1^- +\delta_2^-\}$ 得证. 定理证毕. ∎

推论 对任何两个非平凡连通无向图 G_1 和 G_2,

$$\kappa(G_1\times G_2)=\min\{\kappa_1v_2,\kappa_2v_1,\delta_1+\delta_2\}.$$ ∎

定理 4.2.9 对任何两个非平凡强连通有向图 G_1 和 G_2,

$$\lambda(G_1\times G_2)=\min\{\lambda_1v_2,\lambda_2v_1,\delta_1^+ +\delta_2^+,\delta_1^- +\delta_2^-\}$$

证明 仅需要证明: $\lambda(G_1\times G_2)\geqslant\min\{\lambda_1v_2,\lambda_2v_1,\delta_1^+ +\delta_2^+,\delta_1^- +\delta_2^-\}$.

设 $G=G_1\times G_2$, B 是 G 的最小边截集, C 是 $G-B$ 的强连通分支且 $N_{G-S}^-(C)=\emptyset$. 设 $V_1=\{x_1,x_2,\ldots,x_{v_1}\}$ 并不妨设 $H=\{x_1\}\times G_2$ 包含 C 和其他分支中顶点. 令 $B_i=E(\{x_i\}\times G_2)\cap B$, $B_{ij}=E_G(\{x_i\}\times V_2,\{x_j\}\times V_2)\cap B$. 如果对每个 $i=1,2,\ldots,v_1$, $\{x_i\}\times G_2$ 包含 $G-B$ 中至少两个强连通分支中的顶点, 那么

$$\lambda(G)=|B|\geqslant\sum_{i=1}^{v_1}|B_i|\geqslant v_1\lambda_2.$$

现在假定存在 k 使得 $\{x_k\}\times G_2$ 仅包含一个强连通分支 C' 中的顶点.

如果$C' = C$, 那么令 $P = x_{t_0}x_{t_1}\dots x_{t_h}$ 是 G_1 中最短有向(x_{t_0}, x_{t_h}) 路, 其中$x_{t_0} = x_1$, $x_{t_h} = x_k$. 令 $F = V(H) - V(C) \cap V(H)$. 我们断言

$$\sum_{i=1}^{h} |B_{t_{i-1}t_i}| \geqslant |F|.$$

若不然, 存在$z \in V_2$ 使得Pz 是$G - B$ 中从 F 到C 的有向路, 矛盾. 同样的理由, $E_H(F, D) \subseteq B_1$, 其中$D = V(C) \cap V(H)$. 这意味着,

$$|B_1| \geqslant |E_H(F, D)| \geqslant |N_H^+(F)|.$$

不妨设$x_2, x_3, \cdots, x_{\delta_1^+}$ 是G_1 中顶点x_1 不在P 上的$\delta_1^+ - 1$ 个外邻点. 如果对每个$i = 2, 3, \cdots, \delta_1^+$ 均有 $|B_i| \geqslant 1$, 那么

$$\begin{aligned}\lambda(G) = |B| &\geqslant |B_1| + \sum_{i=1}^{h} |B_{t_{i-1}t_i}| + \sum_{i=2}^{\delta_1^+} |B_i| \\ &\geqslant |N_H^+(F)| + |F| + (\delta_1^+ - 1) \\ &\geqslant (\delta_2^+ + 1) + (\delta_1^+ - 1) \\ &= \delta_1^+ + \delta_2^+.\end{aligned}$$

现在, 不妨假定$|B_2| = 0$. 那么x_2G_2 仅含在一个强连通分支中, 设这个分支为C'. 显然, $C' \neq C$, 因为$N_{G-S}^-(C) = \emptyset$. 因此, 对任何 $y_i\,(1 \leqslant i \leqslant v_2) \in V_2$, $G_1 \times \{y_i\}$ 包含不同分支的顶点, 如 $x_2y_i \in V(C')$, $x_ky_i \in V(C)$. 于是,

$$\lambda(G) = |B| \geqslant \sum_{i=1}^{v_2} |B \cap E(G_1 \times \{y_i\})| \geqslant v_2\lambda_1.$$

如果$C' \neq C$, 用同样的方法, 通过考虑有向(x_k, x_1) 路和x_1 的内邻点, 能够证明: $\lambda(G) \geqslant \delta_1^- + \delta_2^-$ 或者$\lambda(G) \geqslant v_2\lambda_1$. ∎

推论 对任何两个非平凡连通无向图G_1 和G_2,

$$\lambda(G_1 \times G_2) = \min\{\lambda_1 v_2, \lambda_2 v_1, \delta_1 + \delta_2\}.$$ ∎

§4.3 笛卡儿乘积图的其他性质

这一节讨论笛卡儿乘积图的另外性质, 如点可迁性, 可嵌入性, Hamilton 性, Euler 性和2 部分性等, 这些性质在互连网络设计和分析中是很有用的.

定理 4.3.1 如果 $G_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 是点可迁的, 那么 $G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$ 是点可迁的.

证明 设 $G=G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$, 并设 $x=x_1x_2\cdots x_n$ 和 $y=y_1y_2\cdots y_n$ 是 G 的任意两个不同顶点, 其中 $x_i,y_i\in V(G_i)$ $(i=1,2\cdots,n)$. 因为 G_i 是点可迁的, 所以存在 $\sigma_i\in \mathrm{Aut}(G_i)$ 使得 $\sigma_i(x_i)=y_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 容易验证由下面定义的映射

$$\phi(x_1x_2\cdots x_n)=\sigma_1(x_1)\sigma_2(x_2)\cdots\sigma_n(x_n)$$

是 $\mathrm{Aut}(G)$ 中的元素, 且 $\phi(x)=y$. 因此, G 是点可迁的. ∎

由定理 4.3.1, 立即可知超立方体 Q_n 是点可迁的, 因为 $Q_n=K_2\times\cdots\times K_2$ 且 K_2 是点可迁的.

下面的结果很简单, 但在图的嵌入问题中起着重要作用, 证明留给读者.

定理 4.3.2 设 $G=G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$ 且 $G'=G_1'\times G_2'\times\cdots\times G_n'$. 如果 $G_i\subseteq G_i'$, $i=1,2,\cdots,n$, 那么 $G\subseteq G'$. ∎

定理 4.3.3 设 G_1 和 G_2 是无向图. $G_1\times G_2$ 是 Hamilton 图当且仅当 G_1 和 G_2 之一是 Hamilton 图, 而另一个含 Hamilton 路.

证明 不妨设 G_1 是 Hamilton 图, G_2 含 Hamilton 路. 令 $C_n(n\geqslant 3)$ 是 G_1 中 Hamilton 圈, $P_m(m\geqslant 1)$ 是 G_2 中 Hamilton 路. 因为 C_n 是 G_1 的支撑子图, P_m 是 G_2 的支撑子图, 那么由定理 4.3.2 知, $C_n\times P_m$ 是 $G_1\times G_2$ 的支撑子图.

显然, 我们只需证明 $C_n\times P_m$ 含 Hamilton 圈. 我们对 $m\geqslant 1$ 用数学归纳法. 当 $m=1$ 时, 结论显然成立. 假定 $C_n\times P_{m-1}$ 含 Hamilton 圈. 为了证明 $C_n\times P_m$ 含 Hamilton 圈, 令

$$C_n=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ n\geqslant 3,$$

$$P_m=(y_1,y_2,\cdots,y_m),\ P_{m-1}=(y_1,y_2,\cdots,y_{m-1}),\ m\geqslant 2.$$

那么 $C_n\times P_{m-1}$ 和 $C_n\times\{y_m\}$ 都是 $C_n\times P_m$ 的子图. 由归纳假设, 令 H_1 和 H_2 分别是 $C_n\times P_{m-1}$ 和 $C_n\times\{y_m\}$ 中的 Hamilton 圈. H_1 中存在相邻两顶点 $x=x_iy_{m-1}$ 和 $y=x_{i+1}y_{m-1}$, H_2 中存在相邻两顶点 $u=x_iy_m$ 和 $v=x_{i+1}y_m$. 于是

$$H_1\cup H_2-\{xy,uv\}+\{xu,yv\}$$

是 $C_n\times P_m$ 中一条 Hamilton 圈. 定理得证. ∎

作为该定理的直接推论, Hamilton 图的笛卡儿乘积仍是 Hamilton 图. 应用归纳法立即知: 当 $n\geqslant 2$ 时, 超立方体 Q_n 是 Hamilton 图.

§4.4 Cayley 图的笛卡儿乘积

由定理 3.6.2 知, Cayley 图是点可迁的. 由定理 4.3.1 知, 点可迁图的笛卡儿乘

积仍是点可迁的. 一个自然的问题是: Cayley 图的笛卡儿乘积是否还是 Cayley 图? 回答是肯定的.

定理 4.4.1 Cayley 图的笛卡儿乘积仍是 Cayley 图. 更精确地讲, 设 $G_i = C_{\Gamma_i}(S_i)$ 是有限群 $\Gamma_i = (X_i, \circ_i)$ 关于集 S_i 的 Cayley 图, 那么 $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ 是群 $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \cdots \times \Gamma_n$ 关于集

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} \{e_1 \cdots e_{i-1}\} \times S_i \times \{e_{i+1} \cdots e_n\},$$

的 Cayley 图 $C_\Gamma(S)$, 其中 e_i 是 Γ_i 的单位元, $i = 1, 2, \cdots, n$.

证明 只需证明定理对 $n = 2$ 成立. 此时, $G = G_1 \times G_2$, $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$, 且 $S = (\{e_1 \times S_2) \cup (S_1 \times \{e_2\})$. 任取 $X_1 \times X_2$ 中两个元素 x_1x_2 和 y_1y_2, 其中 $x_i, y_i \in X_i$, $i = 1, 2$. 我们只需证明

$$(x_1x_2, y_1y_2) \in E(G) \Leftrightarrow (x_1x_2)^{-1} \circ (y_1y_2) \in S.$$

由有向图笛卡儿乘积的定义, 我们有

$$(x_1x_2, y_1y_2) \in E(G) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1,\ (x_2, y_2) \in E(G_2), & \text{或者}, \\ x_2 = y_2,\ (x_1, y_1) \in E(G_1) \end{cases}$$

因为 $G_i = C_{\Gamma_i}(S_i)$, 所以

$$(x_i, y_i) \in E(G_i) \Leftrightarrow x_i^{-1} \circ_i y_i \in S_i,\ i = 1, 2.$$

于是,

$$\begin{aligned} x_1 = y_1,\ (x_2, y_2) \in E(G_2) \Leftrightarrow & \\ (x_1x_2)^{-1} \circ (y_1y_2) &= (x_1^{-1}x_2^{-1}) \circ (y_1y_2) \\ &= (x_1^{-1} \circ_1 y_1)(x_2^{-1} \circ_2 y_2) \\ &= (x_1^{-1} \circ_1 x_1)(x_2^{-1} \circ_2 y_2) \\ &= e_1(x_2^{-1} \circ_2 y_2) \in \{e_1\} \times S_2 \subseteq S. \end{aligned}$$

同样地, 有

$$\begin{aligned} x_2 = y_2,\ (x_1, y_1) \in E(G_1) \Leftrightarrow & \\ (x_1x_2)^{-1} \circ (y_1y_2) &= (x_1^{-1}x_2^{-1}) \circ (y_1y_2) \\ &= (x_1^{-1} \circ_1 y_1)(x_2^{-1} \circ_2 y_2) \\ &= (x_1^{-1} \circ_1 y_1)(x_2^{-1} \circ_2 x_2) \\ &= (x_1^{-1} \circ_1 y_1)e_2 \in S_1 \times \{e_2\} \subseteq S. \end{aligned}$$

这些说明 $G = G_1 \times G_2$ 是群 $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ 关于子集 $S = (S_1 \times \{e_2\}) \cup (\{e_1\} \times S_2)$ 的 Cayley 图 $C_\Gamma(S)$. 定理得证. ∎

定理 4.4.1 很有用, 因为它提供了从一些小阶 Cayley 图构造大阶 Cayley 图的方法.

作为应用, 我们列举几个例子.

例 4.4.1 考虑加法群 Z_n, 单位元 $e = 0$, 逆元 $i^{-1} = n - i$. Cayley 图 $C_{Z_2}(\{1\})$ 是 K_2. 对 $n \geqslant 3$, Cayley 图 $C_{Z_n}(\{1, n-1\})$ 是一个无向圈 C_n; Cayley 图 $C_{Z_n}(\{1\})$ 是一个有向圈 C_n.

例 4.4.2 考虑群 $Z_2 \times Z_n$ $(n \geqslant 3)$. 它的运算定义为:

$$(x_1x_2) \circ (y_1y_2) = (x_1 + y_1)(\text{mod } 2)(x_2 + y_2)(\text{mod } n),$$

其中 $x_1, y_1 \in \{0, 1\}$, $x_2, y_2 \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$.

如果令

$$S = (\{1\} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \{1, n-1\}) = \{10, 01, 0(n-1)\},$$

那么 $S = S^{-1}$, 其中第一个元素是自逆的, 另外两个元素是互逆的. 于是, Cayley 图 $C_{Z_2 \times Z_n}(S)$ 是无向图, 由定理 4.4.1 知, 这个 Cayley 图是 $K_2 \times C_n$.

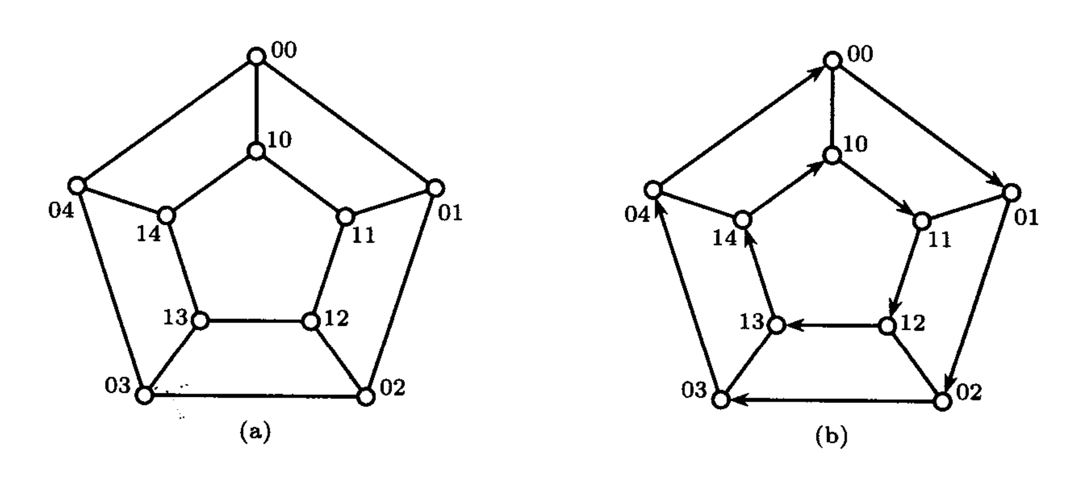


图 4.3 Cayley 图 $C_{Z_2 \times Z_5}(\{10, 01, 04\})$ 和 $C_{Z_2 \times Z_5}(\{10, 01\})$

图 4.3 (a) 中所示的 Cayley 图 $C_{Z_2 \times Z_5}(\{10, 01, 04\})$ 是 $K_2 \times C_5$.

如果令

$$S = (\{1\} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \{1\}) = \{10, 01\},$$

那么 $S^{-1} \neq S$, Cayley 图 $C_{Z_2 \times Z_n}(S)$ 是一个有向图, 由定理 4.4.1 知, 这个 Cayley 图是 $K_2 \times C_n$, 其中 C_n 是有向圈.

图 4.3 (b) 中所示的 Cayley 图 $C_{Z_2 \times Z_5}(\{10, 01\})$ 是 $K_2 \times C_5$. 这个例子说明 Cayley 有向图可以不是 Hamilton 图.

例 4.4.3 考虑群 $\Gamma = Z_2 \times Z_2 \times \cdots \times Z_2$, 其运算定义为:

$$(x_1 \cdots x_n) \circ (y_1 \cdots y_n) = (x_1 + y_1)(\text{mod}2) \cdots (x_n + y_n)(\text{mod}2),$$

其中 $x_i, y_i \in \{0,1\}$, $e_i = 0$, $i = 1,2,\cdots,n$. 令

$$\begin{aligned} S &= \bigcup_{i=1}^{n} \{e_1 \cdots e_{i-1}\} \times S_i \times \{e_{i+1} \cdots e_n\} \\ &= \{100\cdots 00, 010\cdots 00, \cdots, 000\cdots 01\}, \end{aligned}$$

其中 $S_i = \{1\}$, $i = 1,2,\cdots,n$. 不难看到 S 中所有元素都是自逆的, 即有 $S^{-1} = S$. 于是, Cayley 图 $C_\Gamma(S)$ 是无向图, 由定理 4.4.1 知, 这个图是 $K_2 \times K_2 \times \cdots \times K_2$. 它就是超立方体 Q_n.

习 题

4.1 证明定理 4.1.2.

4.2 构造两个连通图 G_1 和 G_2 使得 $\kappa(G_1 \times G_2) > \kappa(G_1) + \kappa(G_2)$.

4.3 证明:

(a) 两个 Euler 图的笛卡儿乘积仍是 Euler 图;

(b) 两个 2 部分图的笛卡儿乘积仍是 2 部分图.

4.4 证明定理 4.3.2: 设 $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ 且 $G' = G'_1 \times G'_2 \times \cdots \times G'_n$. 如果 $G_i \subseteq G'_i$, $i = 1,2,\cdots,n$, 那么 $G \subseteq G'$.

4.5 设 G_1 和 G_2 的平均距离分别为 m_1 和 m_2. 研究 $G_1 \times G_2$ 的平均距离.

4.6 证明或者否定: 两个边可迁图的笛卡儿乘积仍是边可迁图.

4.7 证明或者否定: 边可迁图的线图是点可迁图.

4.8 G_1 和 G_2 的字典乘积记为 $G_1[G_2]$, 它的顶点集为 $V(G_1) \times V(G_2)$, $x = (x_1, x_2)$ 与 $y = (y_1, y_2)$ 相邻如果 $x_1y_1 \in E(G_1)$ 或者 $x_1 = y_1$ 且 $x_2y_2 \in E(G_2)$.

(a) 画出 $C_n[K_2]$, $n \geqslant 4$.

(b) 证明或者否定: 两个点可迁 (边可迁, Cayley) 图的字典乘积仍是点可迁 (边可迁, Cayley) 图.

第 5 章　优化设计中的一个基本问题

互连网络的设计有两个固有的基本限制: 网络中每个元件的接口数是有限的; 为确保通信, 数据传输过程中通过的中间点数必须是尽可能地小. 当注意到这两个限制时, 设计者希望网络能连接尽可能多的点. 一个自然的, 必须首先弄清楚的基本问题是: 在这两个限制条件下, 网络最多能连接多少个点? 用图论的语言, 这个问题可以叙述为:

求最大度为 d, 直径最多为 k 的图的最大阶数.

这就是图论中著名的 (d,k) 图问题 ((d,k)-graph problem). 由于 (d,k) 图问题在互连网络设计中的潜在应用, 它已吸引了许多科研工作者的研究兴趣.

在这一章, 我们向读者介绍有关 (d,k) 图问题的基本讨论. 最后讨论图的阶数, 最大度, 直径与连通度直径的关系.

§5.1　(d,k) 无向图问题

设 d 和 k 是两个给定的正整数. 无向图称为 (d,k) 图 ((d,k)-graph), 如果它的最大度为 d 且直径最多为 k. (d,k) 图中的最大阶记为 $n(d,k)$. 从 (1.4.2) 有

$$n(d,k) \leqslant m(d,k) = \begin{cases} 2k+1, & d=2; \\ \dfrac{d(d-1)^k-2}{d-2}, & d>2. \end{cases}$$

$m(d,k)$ 被称为 (d,k)-Moore 界 (Moore bound), 达到这个界的无向图称为 (d,k)-Moore 图.

$m(2,k)=2k+1$, 无向圈 C_{2k+1} 是 $(2,k)$-Moore 图. 因此, $n(2,k)=m(2,k)=2k+1$.

$m(d,1)=d+1$, 完全无向图 K_{d+1} 是 $(d,1)$-Moore 图. 因此, $n(d,1)=m(d,1)=d+1$.

$m(3,2)=10$, 著名的 Petersen 图是 $(3,2)$-Moore 图. 因此, $n(3,2)=m(3,2)=10$.

一个自然的问题是: 对于给定的 $d\geqslant 3$ 且 $k\geqslant 2$, 除 Petersen 图外, 是否还存在 (d,k)-Moore 图? 如果存在, 找出这样的图来.

为了回答这个问题, 我们首先叙述 (d,k)-Moore 图的性质. 它虽然简单, 但很有用, 其证明留给读者.

定理 5.1.1　设 G 是 (d,k)-Moore 图. 那么

(a) G 是连通的 d 正则图;

(b) G 中不存在长小于或者等于 k 的圈;

(c) G 中任何两不同顶点 x 和 y 之间仅存在一条长最多为 k 的 xy 路. ∎

定理 5.1.2 (Hoffman 和 Singleton[161]) 对于 $d \neq 2, 3, 7, 57$, 不存在 $(d, 2)$-Moore 图.

证明 (反证) 假定 G 是 $(d, 2)$-Moore 图, 它的阶 $n = m(d, 2)$. 由定理 5.1.1 知 G 是 d 正则的. 设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(G)$ 是 G 的关联矩阵. 则 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称方阵, 它的对角线元素全是 0. 因为 G 是 d 正则的连通图, 所以 d 是 $\boldsymbol{A}$ 的 1 重特征值. 设 $\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位阵, $\boldsymbol{J}$ 是 n 阶全 1 方阵. 那么, $\boldsymbol{J}$ 的一重特征值为 n, 其余的 $n-1$ 个特征值均为 0. 由于 $d(G) = 2$, 所以由定理 1.2.7 和定理 5.1.1 (c) 知, $\boldsymbol{A}^2$ 的所有主对角线元素均为 d, 其余元素为 0 或者 1, 而且 (i, j) 元素为 0 当且仅当对应的两顶点在 G 中相邻, 即 $\boldsymbol{A}$ 中 (i, j) 元素为 1. 因此,

$$\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} - (d-1)\boldsymbol{I} = \boldsymbol{J}. \tag{5.1.1}$$

这表明 $\boldsymbol{J}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的多项式. 于是, $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{J}$ 有相同的特征向量. 设 $\boldsymbol{x}$ 是属于特征值 d 的特征向量. 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = d\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{J}\boldsymbol{x} = n\boldsymbol{x}.$$

对于特征向量 $\boldsymbol{x}$, 式 (5.1.1) 给出关系 $d^2 + 1 = n$.

设 $\boldsymbol{y}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 r 的特征向量. 那么

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = r\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{J}\boldsymbol{y} = 0.$$

由式 (5.1.1) 的关系式

$$r^2 + r - (d-1) = 0.$$

因此, $\boldsymbol{A}$ 有两个不同的特征值:

$$r_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{4d-3}\,), \quad r_2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{4d-3}\,).$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称方阵, 所以它仅有实特征值. 因此, r_1 和 r_2 都是实数.

如果 r_1 和 r_2 都是无理数, 那么, 它们的重数都是 $\frac{1}{2}(n-1)$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 的所有主对角线元素都是 0, 所以, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹, 即 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值之和为 0, 即

$$0 = d + \frac{1}{2}(n-1)(r_1 + r_2) = d - \frac{1}{2}d^2. \tag{5.1.2}$$

满足式 (5.1.2) 的 d 的值仅有一个, 即 $d = 2$. 此时, $n = d^2 + 1 = 5$, 且对应的 $(2, 2)$-Moore 图是无向圈 C_5.

如果r_1 和r_2 都是有理数, 那么存在整数s 使得$s^2=4d-3$. 于是,

$$r_1=\frac{1}{2}(s-1), \qquad r_2=-\frac{1}{2}(s+1).$$

设r_1 的重数为t. 那么, $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值之和

$$d+t\frac{s-1}{2}+(n-1-t)\frac{-s-1}{2}=0.$$

由关系式$n=1+d^2$ 和$s^2=4d-3$ 得

$$s^5+s^4+6s^3-2s^2+(9-32t)s=15. \tag{5.1.3}$$

因为满足方程(5.1.3) 的解s 是整数, 所以S 是15 的因子. 这些可能的解为:

$$\begin{aligned}
&s=\pm 1, && t=0, && d=1, && n=2;\\
&s=\pm 3, && t=5, && d=3, && n=10;\\
&s=\pm 5, && t=28, && d=7, && n=50;\\
&s=\pm 15, && t=1729, && d=57, && n=3250.
\end{aligned}$$

由于不存在最大度为1 直径最多为2 的无向图, 所以定理得证. ∎

(7, 2)-Moore 界$m(7,2)=50$. Hoffman 和Singleton[161] 发现了一个(7, 2)-Moore 图. 于是, $n(7,2)=m(7,2)=50$. 而且, 他们还证明了(3, 2)-Moore 图和(7, 2)-Moore 图都是唯一的.

(57, 2)-Moore 界$m(57,20)=3250$. 是否存在(57, 2)-Moore 图? 这是迄今还没有解决的问题.

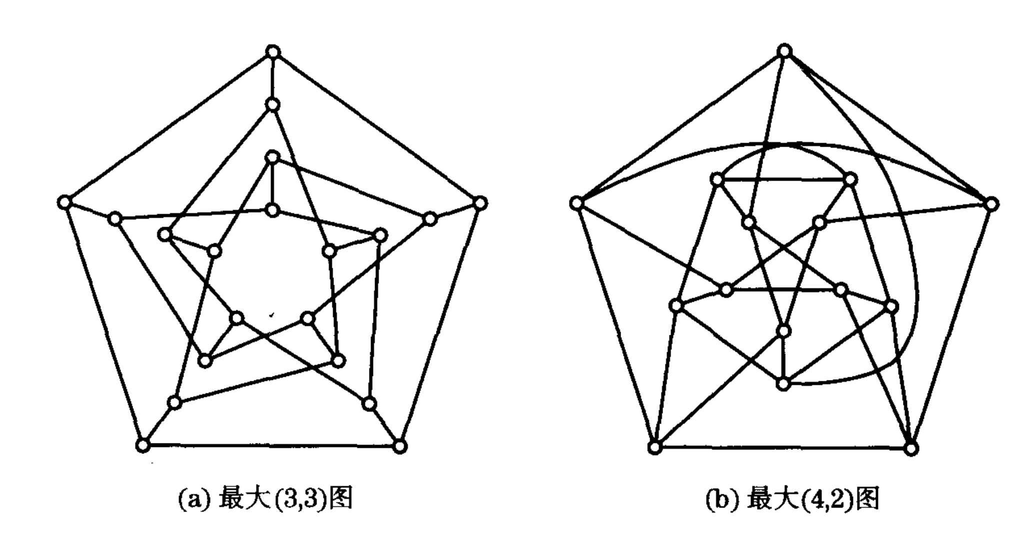
Bannai, Ito[16] 和Damerell[71] 独立地证明了: 除了上面提到的, 不存在另外的(d,k)-Moore 图. 后来, Bannai 和Ito[17] 进一步证明了: 对于$k\geqslant 3$, 不存在阶为$m(d,k)-1$ 的(d,k) 无向图. 这个结果意味着

$$n(d,k)\leqslant m(d,k)-2, \qquad k\geqslant 3. \tag{5.1.4}$$

据作者所知, 式(5.1.4) 中给出$n(d,k)$ 的上界是目前最好的上界.

(d,k) 无向图称为最大的 (maximum), 如果它的阶是$n(d,k)$. 显然, (d,k)-Moore 图是最大的. 由式(5.1.4) 知$n(3,3)\leqslant 20$, 一个20 阶的(3, 3) 图见图 5.1 (a). 于是, 它是最大的(3, 3) 图, 且$n(3,3)=20$. 容易得到$n(4,2)=15$, 一个最大的(4, 2) 图见图 5.1 (b). 由定理5.1.2 和定理1.2.1 (b) 得$n(5,2)\leqslant 24$. 阶数为24 的(5, 2) 图的构造留给读者作为练习. 于是, $n(5,2)=24$.

对于给定的$d\geqslant 2$ 和$k\geqslant 3$, 确定$n(d,k)$ 的值是相当难的. 目前已知的非 Moore 界仅有几个值: $n(3,3)=20$, $n(4,2)=15$ 和$n(5,2)=24$ 是Elspas[91] 于1964 年首先确定的.



(a) 最大(3,3)图 (b) 最大(4,2)图

图 5.1 两个著名的最大 (d,k) 图

另一方面, 几十年来, 人们对 $n(d,k)$ 的下界也进行了深入地研究. 获得 $n(d,k)$ 的下界是通过构造其阶数尽可能大的 (d,k) 无向图. 为了构造这样的图, 人们发现了许多构图方法. 新的构图方法的出现, 导致新下界的建立. 有大量的文献综述了这些方法, 如, Bermond 等 [26, 27], Campbell 等 [51], Dinneen 和 Hafner[77], Comellas 和 Gómez[69]. 在这些文献中, 他们以列表的方式报道了新的下界. 热衷于这方面研究的作者还建立了专业网站, 及时报道最新研究成果. 有兴趣的读者也可参见网站:

$$http://www-mat.upc.es/grup_de_grafs/table_g.html$$

从这个网站, 我们下载了关于 $n(d,k)$ 的下界直到 2006 年 8 月的最新研究成果, 其中 $3 \leqslant d \leqslant 10$, $2 \leqslant k \leqslant 10$.

$d\backslash k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	10	20	38	70	132	192	330	576	1250
4	15	41	96	364	740	1296	3243	7575	17703
5	24	72	210	624	2772	5516	17030	53352	164720
6	32	110	390	1404	7917	19282	75157	29025	1212117
7	50	168	672	2756	11988	52768	233700	1124990	5311572
8	57	253	1100	5060	39806	130017	714010	4039704	17823532
9	74	585	1550	8200	76288	270192	1485498	10423212	31466244
10	91	650	2223	13140	13830	561957	4019736	17304400	104058822

§5.2 (d,k) 有向图问题

将 (d,k) 图问题推广到有向图是相当自然的事情. 有向图称为 (d,k) 有向图 ((d,k)-digraph), 如果它有最大度 d 且直径最多为 k. 同样地, 我们问: (d,k) 有向图的最大阶是多少? 用 $\overrightarrow{n}(d,k)$ 表示 (d,k) 有向图的最大阶. 从式 (1.4.1) 知,

$$\vec{n}(d,k) \leqslant \vec{m}(d,k) = \begin{cases} k+1, & d=1; \\ \dfrac{d^{k+1}-1}{d-1}, & d>1. \end{cases}$$

$\vec{m}(d,k)$ 称为有向 (d,k)-Moore 界, 达到这个界的 (d,k) 有向图称为 (d,k)-Moore 有向图.

例如, $\vec{m}(1,k) = k+1$, 有向圈 C_{k+1} 是 $(1,k)$-Moore 有向图. 于是, $\vec{n}(1,k) = \vec{m}(1,k) = k+1$.

$\vec{m}(d,1) = d+1$, 完全有向图 K_{d+1} 是 $(d,1)$-Moore 有向图. 于是, $\vec{n}(d,1) = \vec{m}(d,1) = d+1$.

下面的定理给出了 (d,k)-Moore 有向图的基本性质, 其证明留给读者.

定理 5.2.1 设 G 是 (d,k)-Moore 有向图. 那么

(a) G 是连通的 d 正则简单图;

(b) G 中不存在长小于或者等于 k 的有向圈;

(c) 对于 G 中任何两个不同的顶点 x 和 y, 存在唯一的长最多为 k 的 (x,y) 路;

(d) $\vec{m}(d,k+1) = d\,\vec{m}(d,k)+1$. ∎

与无向图的情形一样, 我们能提出这样的问题: 对于给定的 $d \geqslant 2$ 和 $k \geqslant 2$, 是否存在 (d,k)-Moore 有向图? 下面的定理否定地回答了这个问题. 这个结果由 Plesnik 和 Znom[259] 首先获得, 由 Bridges 和 Toueg[46] 重新发现.

定理 5.2.2 对于给定的 $d \geqslant 2$ 和 $k \geqslant 2$, 不存在 (d,k)-Moore 有向图.

证明 设 G 是 (d,k)-Moore 有向图, 它的阶 $n = \vec{m}(d,k)$. 由定理 5.2.1 知, G 是 d 正则简单图. 设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(G)$ 是 G 的邻接矩阵. 则 d 是 $\boldsymbol{A}$ 的一重特征值. 这 r 是 $\boldsymbol{A}$ 的异于 d 的特征值. 由定理 5.2.1 (b), (c) 和定理 1.2.7 得,

$$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{J}. \tag{5.2.1}$$

式 (5.2.1) 意味着 $\boldsymbol{J}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的多项式. 因此, $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{J}$ 有相同的特征向量. 设 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 r 的特征向量. 由于 0 是 $\boldsymbol{J}$ 的 $n-1$ 重特征值, 所以

$$\boldsymbol{A}X = r\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{J}\boldsymbol{x} = 0.$$

由式 (5.2.1) 得关系式

$$1+r+r^2+\cdots+r^k = 0. \tag{5.2.2}$$

式 (5.2.2) 说明 r 是 $k+1$ 重单位根, 即 $r^{k+1}=1$. 设 $r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 个异于 d 的特征值. 由定理 5.2.1 (b) 和定理 1.2.7 知, $\boldsymbol{A}^i (1 \leqslant i \leqslant k)$ 的所有主对角线元素都是 0. 因此, 它们的和

$$\mathrm{Tr}\boldsymbol{A}^i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k.$$

这说明 $\boldsymbol{A}^i$ 的所有特征值之和

$$d^i + \sum_{j=1}^{n-1} r_j^i = 0, \quad i = 1, 2 \cdots, k. \tag{5.2.3}$$

因为 $r_j\overline{r}_j = |r_j|^2 = 1 = r_j^{k+1}$, 所以 $r_j^{-1} = \overline{r}_j = r_j^k$, 其中 $\overline{r}_j$ 是 r_j 的共轭复数. 考虑式 (5.2.3) 中的 $i = 1$ 和 $i = k$, 得

$$-d = \sum_{j=1}^{n-1} r_j, \qquad -d^k = \sum_{j=1}^{n-1} r_j^k.$$

在上面第一式子两边取共轭, 并注意到 $\overline{r}_j = r_j^{-1} = r_j^k$, 于是得

$$-d = \sum_{j=1}^{n-1} r_j^{-1} = \sum_{j=1}^{n-1} r_j^k = -d^k.$$

上式成立当且仅当或者 $k = 1$ 或者 $d = 1$. 这与我们的假定矛盾. 定理得证. ∎

在 2.5 节, 我们构造了一类 (d, k) 有向图 $K(d, k)$, 叫 Kautz 有向图. Kautz 有向图 $K(d, k)$ 有 $d^k + d^{k-1}$ 个顶点. 由这个图和定理 5.2.2 说明: 对于 $d \geqslant 2$ 和 $k \geqslant 2$, $\overrightarrow{n}(d, k)$ 由下列不等式界定.

$$d^{k-1} + d^k \leqslant \overrightarrow{n}(d, k) \leqslant d + d^2 + \cdots + d^{k-1} + d^k. \tag{5.2.4}$$

(d, k) 有向图 G 称为最大的, 如果它有阶 $\overrightarrow{n}(d, k)$. 由式 (5.2.4) 给出的 $\overrightarrow{n}(d, k)$ 的下界, 容易证明: 任何最大的 (d, k) 有向图必是 d 正则的.

由式 (5.2.4), 我们立即得到 $\overrightarrow{n}(d, 2) = d + d^2$. 达到这个界的有向图是 $K(d, 2)$. 因此, $K(d, 2)$ 是最大的 $(d, 2)$ 有向图.

对于 $d \geqslant 3$, 式 (5.2.4) 中 $\overrightarrow{n}(d, k)$ 的下界是迄今为止所得到的最好下界.

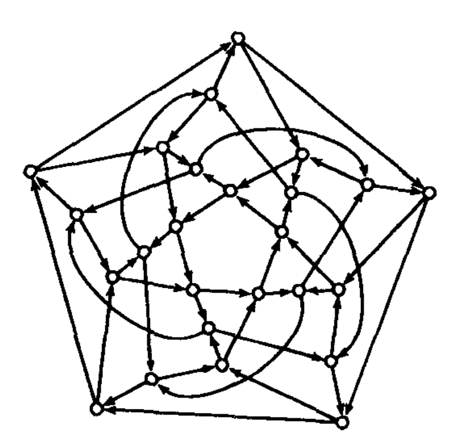


图 5.2 25 阶 (2, 4) 有向图

Foil 等 [117] 通过计算机搜索, 发现了一个 25 阶的 (2,4) 有向图, 见图 5.2 所示. 这个图表明 $\vec{n}(2,4) \geqslant 25$. 通过考虑线图, 我们不难得到

$$\vec{n}(d,k) \geqslant d\ \vec{n}(d,k-1).$$

因此, 对于 $k \geqslant 4$, 有

$$\vec{n}(2,k) \geqslant 2^{k-4}\ \vec{n}(2,4) \geqslant 25 \cdot 2^{k-4}.$$

与无向图的情形一样, 一个相当自然的问题是问: 对于 $k \geqslant 3$, 式 (5.2.4) 中给出的 $\vec{n}(d,k)$ 上界是否能达到? Miller 和 Fris[245] 证明了不存在这样的 $(2,k)$ 有向图. Baskoro 等 [19] 证明了: 如果 k 是奇数, 那么不存在这样的 $(3,k)$ 有向图.

§5.3 直径与连通度之间的关系

在网络规模和元件接口给定的条件下, 为了实现互连网络的高可靠性和有效性, 网络设计者试图找到具有最小直径且有最大连通度的图. 然而, 直径和连通度之间的关系是什么? 本小节将讨论这个问题.

为叙述方便起见, 记阶 n, 最大度 d, 直径 k 和连通度 κ 的有向图为 (n,d,k,κ) 有向图. 关于这些参数之间关系的基本结果首先由 Imase 等 [180] 获得. 虽然他们的结果已被改进 [316], 但他们在其证明中使用的方法是有用的. 我们叙述他们的结果为下面的定理.

定理 5.3.1 设 G 是强连通 (n,d,k,κ) 有向图. 如果 $d \geqslant 2$ 且 $\kappa \leqslant n-2$, 那么

$$n \leqslant \kappa\left(\frac{d^k-1}{d-1}+d\right).$$

证明 设 G 是强连通 (n,d,k,κ) 有向图, $d \geqslant 2$ 且 $\kappa \leqslant n-2$. 那么存在 κ 点割 U 和 $V(G-U)$ 的划分 $\{X,Y\}$ 使得 $E_G(X,Y)=\emptyset$.

设 $x \in X$ 且 $y \in Y$. 那么 G 中任何 (x,y) 路必含 U 中点. 令

$$d(G;x,U) = \min\{d(G;x,u):\ u \in U\},$$
$$m = \max\{d(G;x,U):\ x \in X\}.$$

对任何 $u \in U$, 令

$$H_m^-(u) = \{x \in X:\ d(G;x,u) \leqslant m\},$$
$$H_\ell^+(u) = \{y \in Y:\ d(G;u,y) \leqslant \ell\}.$$

因为每个 $x \in X$ 都被包含在某个 $H_m^-(u)$, 所以

$$\begin{aligned}|H_m^-(u)| &\leqslant d+d^2+\cdots+d^m,\\ |H_\ell^+(u)| &\leqslant d+d^2+\cdots+d^l.\end{aligned} \tag{5.3.1}$$

因为, 对任何 $x \in X$, 存在 $u \in U$ 使得 $x \in H_m^-(u)$. 所以由式 (5.3.1) 得

$$|X| \leqslant \sum_{u \in U} |H_m^-(u)| \leqslant \kappa(d + d^2 + \cdots + d^m). \tag{5.3.2}$$

下面估计 $|Y|$. 任取 $y \in Y$, 并取 $x \in X$ 使得 $d(G; x, U) = m$. 因为任何 (x, y) 路必经过 U, 且 G 的直径为 k, 所以存在 $u \in U$ 使得

$$d(G; x, u) + d(G; u, y) = d(G; x, y) \leqslant k.$$

由 x 的选取知, $d(G; x, u) \geqslant m$. 因此,

$$1 \leqslant d(G; u, y) \leqslant k - d(G; x, u) \leqslant k - m.$$

换句话说, $m \leqslant k - 1$ 且对任何 $y \in Y$ 有 $d(G; U, y) \leqslant k - m$. 由式 (5.3.1) 得

$$|Y| \leqslant \sum_{u \in U} |H_\ell^+(u)| \leqslant \kappa(d + d^2 + \cdots + d^{k-m}). \tag{5.3.3}$$

因此, 由式 (5.3.2) 和式 (5.3.3) 得

$$\begin{aligned} n &= |X| + |U| + |Y| \\ &\leqslant \kappa(d + \cdots + d^m + 1 + d + \cdots + d^{k-m}) \\ &= \kappa\left(d\frac{d^m - 1}{d - 1} + 1 + d\frac{d^{k-m} - 1}{d - 1}\right) \\ &= \kappa\left(d\frac{d^m + d^{k-m} - 2}{d - 1} + 1\right), \end{aligned}$$

即,

$$n \leqslant \kappa\left(d\frac{d^m + d^{k-m} - 2}{d - 1} + 1\right). \tag{5.3.4}$$

令 $f(m) = d^m + d^{k-m}$. 则 $f(m)$ 是区间 $[1, k-1]$ 上的凸函数, 且在两端点达到最大值. 因此, $f(m) \leqslant f(1) = f(k-1) = d^{k-1} + d$, 即,

$$d^m + d^{k-m} \leqslant d^{k-1} + d. \tag{5.3.5}$$

将式 (5.3.5) 代入式 (5.3.4) 得

$$n \leqslant \kappa\left(\frac{d^k - 1}{d - 1} + d\right).$$

定理得证. ∎

定理 5.3.1 表明了: 当图的顶点数固定, 图的直径和连通度成反比. 下面的定理 [316] 改进了定理 5.3.1, 其证明省略.

定理 5.3.2 设 G 是强连通 (n,d,k,κ) 有向图, $d \geqslant 2$, $k \geqslant 2$. 如果 $\kappa \leqslant d-1$, 那么

$$n \leqslant \kappa\left(\frac{d^k-d}{d-1}\right)+d+1.$$

∎

由定理 5.3.2, 立即得到下面的定理.

定理 5.3.3 设 G 是强连通 (n,d,k,κ) 有向图, $d \geqslant 2$. 如果 $\kappa \leqslant d-1$ 且 $k \geqslant 2$, 那么

$$\kappa \geqslant \frac{(n-d-1)(d-1)}{d^k-d}.$$

特别地,

$$\kappa = \begin{cases} = d, & n > d^k+1; \\ \geqslant d-1, & n \geqslant d^k-(d^{k-1}+d^{k-2}+\cdots+d)+2. \end{cases}$$

Kautz 有向图 $K(d,k)$ 和 de Brujin 有向图 $B(d,k)$ 都是 (d,k) 有向图, 前者有阶 d^k+d^{k-1} 和连通度 d, 而后者有阶 d^k 和连通度 $d-1$. 这些事实说明定理 5.3.3 中确保 $\kappa = d$ 条件 "$n > d^k+1$" 是不能改进的, 因而是紧的.

文献中也考虑了无向图的相关问题, 并获得一些结果. 例如, 如果 $n > (\delta-1)(\Delta-1)^{k-1}+2$, 那么 $\kappa=\delta$. 更详细的讨论见 Esfahanian[96] 和 Soneoka 等 [288].

能用同样的分析方法来研究阶 n, 最大度 d, 直径 k 和边连通度 λ 之间的关系. 记阶 n, 最大度 d, 直径 k 和边连通度 λ 的有向图为 (n,d,k,λ), F 是最小边割. 那么, 可以得到类似于式 (5.3.4) 的不等式

$$n \leqslant |F|\,\frac{d^{m+1}+d^{k-m}-2}{d-1}, \tag{5.3.6}$$

其中 $0 \leqslant m \leqslant k-1$. ∎

定理 5.3.4 设 G 是强连通 (n,d,k,λ) 有向图, $d \geqslant 2$, $k \geqslant 4$. 如果 $\lambda \leqslant d-1$, 那么

$$n \leqslant \lambda\left(\frac{d^{k-1}-1}{d-1}+1\right)+d.$$

由定理 5.3.4, 立即得到下面的定理. ∎

定理 5.3.5 设 G 是强连通 (n,d,k,λ) 有向图, $d \geqslant 2$ 且 $k \geqslant 4$. 如果 $\lambda \leqslant d-1$, 那么

$$\lambda \geqslant \frac{(n-d)(d-1)}{d^{k-1}+d-2}.$$

特别地,

$$\lambda = \begin{cases} = d, & n > d^{k-1}+2d-2; \\ \geqslant d-1, & n > (d-2)\left(\dfrac{d^{k-1}-1}{d-1}+1\right)+d. \end{cases}$$

∎

习 题

5.1 证明定理 5.1.1 和定理 5.2.1.

5.2 证明: 任何最大的 (d,k) 有向图必是 d 正则的.

5.3 证明: $n(3,3)=20$, $n(4,2)=15$ 和 $n(5,2)=24$, 并画出最大的 $(5,2)$ 图.

5.4 证明不等式 (5.3.6) 和

$$\lambda \geqslant \min\left\{\frac{n(d-1)}{d^{k-1}+d^2-2},\ \delta\right\}.$$

5.5 设 $b(d,k)$ 是 2 部分 (d,k) 图的最大阶. 证明: $b(2,k)=2k$ 和

$$b(d,k) \leqslant 2\,\frac{(d-1)^k-1}{d-2},\quad d \geqslant 3,$$

并画出最大的 2 部分 $(3,3)$ 图. (对于 $k \geqslant 3$, Biggs[34] 证明了: 如果 $k=3,4,6$ 且 $d-1$ 是素数幂, 达到这个上界 2 部分图存在. 有关 2 部分 (d,k) 图的其他结果, 读者可参见 Bermond 等 [25], Delorme[75] 和 Gómez 等 [127, 128].)

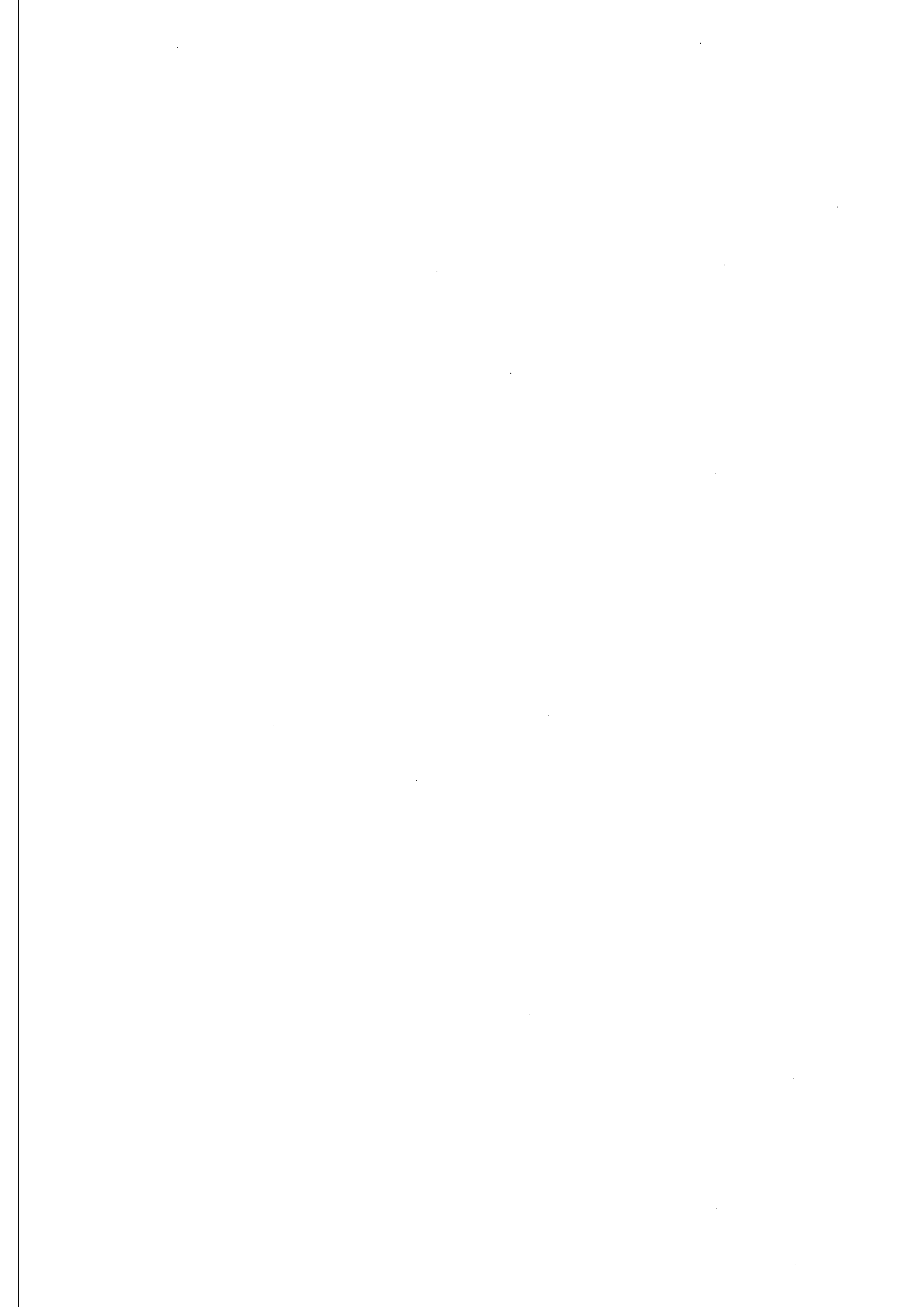
5.6 设 $p(d,k)$ 是 (d,k) 平面图的最大阶. 证明: $p(2,k)=2k+1$ 和

$$p(d,2)=\left\lfloor \frac{3}{2}d \right\rfloor,\quad d \geqslant 8.$$

(这个结果属于 Hell 和 Seyffarth[153], 其他有关结果可参见 Fellows 等 [112, 113])

第三部分

著名的互连网络拓扑结构



第 6 章　超立方体网络

这一章将详细讨论一类著名的互连网络拓扑结构: 超立方体. 它是现今最著名, 最通用的, 也是最有效的互连网络拓扑结构. 它具有许多优良的性质, 正是这些优良的性质才使它成为并行处理和并行计算系统的首选拓扑结构 (见 Andre 和 Verjus[9], Leighton[204]).

早在 1962 年, Michigan 大学的 Squire 和 Palais[289, 290] 就提出超立方体计算机的设想. 大约在 1975 年左右, 个人计算机制造商 IMS Associates 宣布了基于 Intel 8080 微处理器的 256 个点商用超立方体计算机, 但他们既没有发表详细的设计报告, 也没有生产出一台机器. 1977 年, Columbia 大学的 Sullivan 和他的同事们 [291, 292] 设计出第一台超立方体并行处理机, 即 Bolumbia Homogeneous Parallel Processor, 简称 CHOPP. 现在有许多基于超立方体网络的超级计算机投入商业运行, 比如: Caltech 的 Cosmic (Seitz[278]), Intel 的 iPSC/2 (Nugent[252]) 和 Connection Machines (Hillis[160]). 有关基于超立方体网络超级计算机的发展见 Hayes 等 [150].

人们也已经设计出基于超立方体网络的并行算法 [204]. 超立方体的图论研究见一篇综述文献 [151]. 这一章将讨论超立方体网络的性质和它的一些推广和变形.

§6.1　超立方体网络的定义和基本性质

超立方体网络的拓扑结构是 n 维立方体, 它的图论模型是无向图, 记为 Q_n. 可以用许多方法定义它, Harary[142] 搜集它的许多等价定义, 这里介绍其中两个.

1. 用 2 元 n 序列来定义

Q_n 的顶点集是定义在集 $\{0,1\}$ 上的长为 n 的序列, 即

$$V = \{x_1x_2\cdots x_n:\ x_i \in \{0,1\},\ i = 1,2,\cdots,n\}.$$

Q_n 中两顶点 $x = x_1x_2\cdots x_n$ 和 $y = y_1y_2\cdots y_n$ 之间有边相连当且仅当 x 和 y 有且仅有一个坐标不同, 即

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 1.$$

图 4.1 中所示的是 Q_1, Q_2, Q_3 和 Q_4. 在 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中, 超立方体 Q_n 可以被认为是单位区间 $[0,1] = Q_1$, 正方形 Q_2, 立方体 Q_3, 等等. 因此, Q_n 可以看成是 $\mathbf{R}^n$ 中的立方体. 超立方体一词也由此而来.

2. 用笛卡儿乘积来定义

在例 4.1.1, 我们已经看到, Q_n 可以递归地定义为笛卡儿乘积.

$$Q_1 = K_2,\quad Q_n = Q_{n-1}\times Q_1 = \underbrace{K_2\times K_2\times\cdots\times K_2}_{n},\ n \geqslant 2.$$

定理6.1.1 上面给出的 Q_n 的两个定义是等价的. 换句话说, 由这两个定义得到的图是同构的. ▮

证明留给读者作为练习. 下面的定理叙述了 Q_n 的基本性质, 它们的证明可以从 Q_n 的第二个定义和笛卡儿乘积的性质直接得到, 详细的证明留给读者作为练习.

定理6.1.2 (a) Q_n 是 n 正则的, 有 2^n 个顶点和 $n2^{n-1}$ 条边;

(b) Q_n 是 2 部分图;

(c) 若 $n \geqslant 2$, 则 Q_n 含 Hamilton 圈; 若 n 是偶数, 则 Q_n 含 Euler 回;

(d) Q_n 的直径 $d(Q_n) = n$;

(e) Q_n 的连通度 $\kappa(Q_n) = n$;

(f) Q_n 是 Cayley 图 $C_\Gamma(S)$, 因此是点可迁的, 其中

$$\begin{aligned}&\Gamma = Z_2 \times \cdots \times Z_2,\\&S = \{100\cdots00,\ 010\cdots00,\ \cdots,\ 00\cdots01\};\end{aligned}$$

(g) Q_n 是边可迁的. ▮

下面对 Q_n 的定义和上述性质作如下注释.

1. 定理6.1.2 说明超立方体满足网络设计基本原则 (见1.6 节) 中的大部分要求. 超立方体网络代表了不同目的之间的一个好的妥协和均衡. 正是由于这个原因, 超立方体成为大规模并行处理系统的互连网络的首选结构. 超立方体的另外优良性质将在下面几节和第 10 章到第 16 章各章作详细讨论.

2. 虽然我们给出超立方体的两个定义, 但人们习惯用2 元集 $\{0,1\}$ 上长为 n 的序列表示 n 维超立方体 Q_n 的顶点. 在计算机科学文献中, 这样的2 元序列称为*布尔向量* (Boolean vectors), 或者 n 个比特的*2 元串* (n-bit binary string), 串中元素称为*比特* (bit).

3. 设 $x = x_1x_2\cdots x_n$ 是 Q_n 的顶点. $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ 称为 x 的*权* (weight). 权为奇数的顶点称为*奇权点*, 权为偶数的顶点称为*偶权点*. 从 Q_n 的定义易知, Q_n 中两顶点相邻当且仅当它们的权有不同的奇偶性. 这个事实说明 Q_n 不含奇圈, 因而是2 部分图, 奇权顶点集和偶权顶点集构成 Q_n 的顶点2 部划分. 因为当 $n \geqslant 2$ 时, Q_n 含 Hamilton 圈, 所以奇权点和偶权点交错出现在 Q_n 中任何一条 Hamilton 圈中. 因此, Q_n 含有 2^{n-1} 个奇权点和 2^{n-1} 个偶权点. 由此可知 Q_n 的独立数 α 等于 2^{n-1}, 即,

$$\alpha(Q_n) = 2^{n-1}.$$

4. 由超立方体的第二个定义知, 对任何两个整数 $p\,(\geqslant 1)$ 和 $q(\geqslant 1)$, 如果 $p+q = n$,

那么 $Q_n = Q_p \times Q_q$. 这是因为

$$\begin{aligned} Q_p \times Q_q &= \underbrace{K_2 \times \cdots \times K_2}_{p} \times \underbrace{K_2 \times \cdots \times K_2}_{q} \\ &= \underbrace{K_2 \times \cdots \times K_2}_{n} = Q_n. \end{aligned}$$

特别地, $Q_n = Q_{n-1} \times K_2$. 这说明超立方体能从小阶超立方体来递归地构造出来. 更精确地说, 考虑两个同一的 $(n-1)$ 维超立方体, 在所有具有相同标号的两顶点之间添加连接边就可以得到 n 维超立方体. 图 4.1 所示的 Q_i 就是用这种方法从 Q_{i-1} 得到的, $i = 2, 3, 4$. 超立方体的这个结构性质说明它具有方便简单的扩充性.

5. 对于给定的 i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 令 $0V_{n-1}^i$ 是 Q_n 中其第 i 个坐标为 0 的顶点子集, $1V_{n-1}^i$ 是 Q_n 中其第 i 个坐标为 1 的顶点子集. 于是, Q_n 的顶点集能分解成两个不交子集 $0V_{n-1}^i$ 和 $1V_{n-1}^i$ 的并. 用 $0Q_{n-1}^i$ 和 $1Q_{n-1}^i$ 分别表示 Q_n 中由 $0V_{n-1}^i$ 和 $1V_{n-1}^i$ 导出的子图. $0Q_{n-1}^i$ 和 $1Q_{n-1}^i$ 都同构于 Q_{n-1}. 为方便起见, 我们记 $Q_n = 0Q_{n-1}^i \odot 1Q_{n-1}^i$. $0Q_{n-1}^i$ 和 $1Q_{n-1}^i$ 之间的连边称为 Q_n 的第 i 维边, 它构成 Q_n 的完备匹配. 因此, 易知 Q_n 的匹配数 α' 等于 2^{n-1}, 即,

$$\alpha'(Q_n) = 2^{n-1}.$$

通常, 分别记 $0V_{n-1}^1$ 和 $1V_{n-1}^1$ 为 $0V_{n-1}$ 和 $1V_{n-1}$; 记 $0Q_{n-1}^1$ 和 $1Q_{n-1}^1$ 为 $0Q_{n-1}$ 和 $1Q_{n-1}$.

6. 由 Q_n 的点可迁性和 $Q_n = 0Q_{n-1} \odot 1Q_{n-1}$, 容易计算 Q_n 的平均距离. 事实上, 只需计算从顶点 $00\cdots00$ 到所有其他顶点距离之和, 记为 $\sigma_0(Q_n)$. 因为 $0x = 00\cdots0$ 在 $0Q_{n-1}$ 中, 所以它的邻点 $1x = 10\cdots0$ 在 $1Q_{n-1}$ 中. 因此, 从 $0x$ 到 $0Q_{n-1}$ 中所有其他顶点距离之和为 $\sigma_0(Q_{n-1})$; 从 $0x$ 到 $1Q_{n-1}$ 中顶点 $1y$ 的距离为从 $0x$ 到 $0Q_{n-1}$ 中顶点 $0y$ 的距离再加 1. 因此, 从 $0x$ 到 $1Q_{n-1}$ 中所有 2^{n-1} 顶点的距离之和为 $\sigma_0(Q_{n-1}) + 2^{n-1}$. 这说明

$$\sigma_0(Q_n) = 2\sigma_0(Q_{n-1}) + 2^{n-1}.$$

由归纳法不难得 $\sigma_0(Q_n) = n2^{n-1}$. 于是 Q_n 的总距离

$$\sigma(Q_n) = 2^n \sigma_0(Q_n) = n2^{2n-1}.$$

因此, Q_n 的平均距离

$$\mu(Q_n) = \frac{1}{v(v-1)}\,\sigma(Q_n) = \frac{1}{2^n(2^n-1)}\,n2^{2n-1} = \frac{n2^{n-1}}{2^n-1}.$$

当 n 不断增加时, Q_n 的平均距离 $\mu(Q_n)$ 不断接近 $\frac{1}{2}n$. 这个结果是由 Harary 等 [143] 首先得到的.

7. 我们考虑 Q_n 的厚度 $\vartheta(Q_n)$. 显然, $\vartheta(Q_1)=\vartheta(Q_2)=\vartheta(Q_3)=1$, 而 $\vartheta(Q_4)\neq 1$. 因为 Q_n 是 2 部分图, 而且任何 2 部分平面图的边数最多为 $2v-4$, 所以

$$\vartheta(Q_n)\geqslant\left\lceil\frac{\varepsilon}{2v-4}\right\rceil=\left\lceil\frac{n2^{n-1}}{2^{n+1}-4}\right\rceil=\left\lceil\frac{n}{4-2^{3-n}}\right\rceil.$$

因此, $\vartheta(Q_n)\geqslant\left\lceil\frac{n+1}{4}\right\rceil$. 另一方面, Kleinert[189] 已构造一类超立方体 Q_{4h-1}, 它能分解成 h 个边不交平面图的并. 这意味着, 对任何 n, $\vartheta(Q_n)\leqslant\left\lceil\frac{n+1}{4}\right\rceil$. 因此,

$$\vartheta(Q_n)=\left\lceil\frac{n+1}{4}\right\rceil.$$

8. 设 $x=x_1x_2\cdots x_n$ 和 $y=y_1y_2\cdots y_n$ 为 Q_n 的两个不同的顶点. x 和 y 之间的最短路可以用下列方法得到. 从 x 开始, 通过连续地改变比特到达 y. 例如, 令 $x=0101011$ 和 $y=1010010$ 是 Q_7 的两顶点, 则

$$\begin{aligned}x=0101011&\to\mathbf{1}101011\to 1\mathbf{0}01011\\&\to 10\mathbf{1}1011\to 101\mathbf{0}011\to 101001\mathbf{0}=y\end{aligned}$$

是 x 和 y 的最短路, 其中黑体比特是通过改变得到的. 该路中有 5 黑体比特, 所以, x 和 y 之间的距离 $d(Q_7;x,y)=5$. 在这种方法中, 每改变一个比特就得到一条边. 因此, x 和 y 之间的距离由两顶点中不同比特的坐标个数所决定. 这个数称为 x 和 y 的 Hamming 距离, 记为 $H(Q_n;x,y)$, 即

$$H(Q_n;x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|.$$

显然, $d(Q_n,x,y)=H(Q_n;x,y)$. 因此可立即获得 Q_n 的直径为 n, 即 $d(Q_n)=n$. Hamming 距离是一个重要概念, 它常常出现在计算机科学和编码理论的文献中.

9. 通过连续地改变比特可以获得任何两个给定点之间的最短路. 一般说来, 由这种方法得到的最短路不是唯一的. 但规定比特的改变从左到右依次进行, 就可以唯一确定最短路, 这个最小路由选择记为 ρ_{lr}. 利用这一想法可以获得 Q_n 中任何两顶点之间的最短路由选择算法.

§6.2 Gray 码与超立方体中的圈和路长

由定理 6.1.2 知, 若 $n\geqslant 2$, 则 Q_n 含 Hamilton 圈. 设 C 是 Q_n 中一条 Hamilton 圈, 并指定 C 的一个方向为正向. 沿着 C 的正向, Q_n 的所有顶点被排成一个循环序列. 这个循环序列具有这样的性质, 即该序列中任何相继两元素是 Q_n 中相邻两顶点. 反之, 由 Q_n 的第一个定义知, 具有这种性质的 Q_n 中所有顶点的循环序列

表示 Q_n 中一条 Hamilton 圈. 具有这种性质的 2 元序列称为 n 比特 Gray码 (Gray code), 记为 G_n. 例如, 2 元序列

$$G_2 = (00, 01, 11, 10), \quad G_3 = (000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100).$$

有许多方法可生成Gray 码, 但最著名的生成方法是所谓的 2 元反射 Gray码 (binary reflected Gray code). 这种方法基于一个简单的事实, 即, 颠倒一个给定 Gray 码的顺序仍是 Gray 码. 这相当于颠倒一条 Hamilton 圈的方向. 从 $G_1 = (0,1)$ 开始. 为获得 G_2, 取序列 $(0,1)$, 并在每个数的前面添加 0, 即 $(00,01)$; 再取逆序列 $(1,0)$, 并在每个数的前面添加 1, 即 $(11,10)$, 就得到一个 2 比特 Gray 码 G_2. 换句话说, 从 $G_1 = (0,1)$ 得到一个 2 比特 Gray 码 $G_2 = (00,01,11,10)$. 然后重复上述过程: 取序列 $(00,01,\ 11,10)$, 并在每个数的前面添加 0, 即 $(000,001,011,010)$; 再取逆序列 $(10,11,01,00)$, 并在每个数的前面添加 1, 即 $(110,111,101,100)$, 就得到 3 比特 Gray 码

$$G_3 = (000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100).$$

一般地, 用 G_n^R 表示由颠倒 G_n 的顺序得到的序列, $0G_n$ (和 $1G_n^R$) 表示在 G_n (和 G_n^R) 中的每个数前面添加 0 (和 1) 得到的序列, 那么 $(n+1)$ 比特 Gray 码可以表示为

$$G_{n+1} = (0G_n,\ 1G_n^R).$$

容易验证, 由上述方法得到的序列确实是 $(n+1)$ 比特 Gray 码. 事实上, 用 C 和 C^R 表示 Q_n 中分别由 Gray 码 G_n 和 G_n^R 生成的 Hamilton 圈. 因为 G_n^R 是通过颠倒 G_n 的顺序而得到, 所以 Hamilton 圈 C^R 是通过颠倒 C 的方向而得到. 如果利用记号 $Q_{n+1} = 0Q_n \odot 1Q_n$, 那么 Gray 码 $0G_n$ 和 $1G_n^R$ 分别表示 $0Q_n$ 中一条 Hamilton 圈 $0C$ 和 $1Q_n$ 中一条 Hamilton 圈 $1C^R$. 设 $y = 0y_1 \cdots y_n$ 是 $0C$ 中与 $x = 00\cdots 00$ 相邻的顶点. 则 $x' = 10\cdots 0$ 和 $y' = 1y_1\cdots y_n$ 分别是 x 和 y 在 Q_{n+1} 的邻点, x' 和 y' 在 $1C$ 中相邻. 则

$$C = (0C \cup 1C) - \{(x,y),(y',x')\} + \{(x,x'),(y,y')\}$$

是 Q_{n+1} 中一条 Hamilton 圈. 对应于这条 Hamilton 圈 C 的 Gray 码是 $(0G_n,\ 1G_n^R)$.

Gray 码不但在编码理论中有广泛的应用 (见 Reingold 等 [269]), 而且也是研究和分析超立方体性质的有用工具 (见 Chen 和 Shin[61]). 这里利用 Gray 码讨论嵌入某些圈到超立方体的问题. 显然, 长为 2^n 的圈能嵌入超立方体 Q_n. 下面考虑任意长 ℓ 的圈嵌入超立方体问题. 首先注意到 ℓ 必是偶数. 下面的结果属于 Saad 和 Schultz[273], 推广了定理 6.1.2 (c).

定理 6.2.1 设 l $(4 \leqslant \ell \leqslant 2^n)$ 是偶数, Q_n 含长为 ℓ 的圈. 即, Q_n 是 4 泛圈的.

证明 令 $m=\frac{1}{2}l$, 并用 $G_{n-1}(m)$ 表示 G_{n-1} 中前 m 个元素组成的 $(n-1)$ 比特 Gray 码. 则 Gray 码 $(0G_{n-1}(m),\ 1G^R_{n-1}(m))$ 对应 Q_n 中长为 ℓ 的圈. ∎

Saad 和 Schultz[273] 改进了定理 6.2.1, 得到: 对任何 $n\geqslant 2$ 和任何偶数 $\ell\,(4\leqslant \ell\leqslant 2^n)$, Q_n 包含长度为 ℓ 的圈. Li 等人 [208] 进一步改进了这个结果, 证明了下述定理, 其证明留给读者作为练习.

定理 6.2.2 对任何 $n\geqslant 2$ 和任何偶数 $\ell\,(4\leqslant \ell\leqslant 2^n)$, Q_n 的每条边都在长度为 ℓ 的圈上. 即, Q_n 是边 4 泛圈的. ∎

现在讨论超立方体网络中的路长.

由定理 6.1.2 (e) 知 Q_n 的连通度为 n. 由 Menger 定理知, 对 Q_n 中任何不同的两顶点, 存在 n 条内点不交的 (x,y) 路. 我们考虑这些路的最大长度. 下面的结果由许多作者独立发现, 如, Armstrong, Gray[11] 和 Saad, Schultz[273].

定理 6.2.3 Q_n 中路有下列性质.

(a) 对 Q_n 中任何顶点 x, 存在唯一的顶点 y 使得距离 $d(Q_n;x,y)=n$, 而且存在 n 条长为 n 的内点不交的 (x,y) 路.

(b) 设 x 和 y 是 Q_n 两顶点且 $d(Q_n;x,y)=d$. 若 $d\leqslant n-1$, 则 Q_n 中存在 n 条内点不交的 (x,y) 路, 其中 d 条长为 d 且含在 d 维子立方体中, 其余的 $n-d$ 条长为 $d+2$.

证明 (a) 由定理 6.1.2 (f) 知 Q_n 是点可迁的, 所以不妨设 $x=00\cdots00$. 如果存在 y 使得 $d(Q_n;x,y)=n$, 那么 x 和 y 的所有坐标都不同. 这意味着 $y=11\cdots11$, 因而是唯一的.

现在证明 Q_n 中存在 n 内点不交的长为 n 的 (x,y) 路. 对 $n\geqslant 1$ 用归纳法. 当 $n=2$ 时, 结论显然成立, 假定 $n\geqslant 3$. 令 $Q_n=0Q_{n-1}\odot 1Q_{n-1}$. 则 $x=00\cdots00\in V(0Q_{n-1})$ 且 $y=11\cdots11\in V(1Q_{n-1})$. 令 $z=10\cdots00\in V(1Q_{n-1})$, $u=01\cdots11\in V(0Q_{n-1})$. 则 $xz,uy\in E(Q_n)$. 因为 $d(0Q_{n-1};x,u)=n-1$, 由归纳假设, $0Q_{n-1}$ 中存在 $n-1$ 内点不交且长为 $n-1$ 的 (x,u) 路 $0R_1,0R_2,\cdots,0R_{n-1}$. 于是, $1R_1$, $1R_2$, $\cdots$, $1R_{n-1}$ 是 $1Q_{n-1}$ 内点不交且长为 $n-1$ 的 (z,y) 路. 注意到 $0R_i$ 中顶点 $0v$ 和 $1R_i$ 中顶点 $1v$ 在 Q_n 中是相邻的. 于是, 从 $0R_1$, $0R_2$, $\cdots$, $0R_{n-1}$ 和 $1R_1,1R_2,\cdots,1R^1_{n-1}$, 容易构造出 Q_n 中 n 条内点不交且长为 n 的 (x,y) 路来.

(b) 仍不妨设 $x=00\cdots00$. 因为 $d(Q_n;x,y)=d$, 所以 x 和 y 仅有 d 个比特不同. 因为笛卡儿乘积满足交换律和结合律, 所以不妨设 y 的最后 d 个比特都是 1, 即

$$y=0\cdots0\underbrace{11\cdots11}_{d}.$$

因此, 由 Q_n 中前 $n-d$ 个比特都是 0 的顶点所导出的子图, 记为 Q_d^{xy}, 同构于 d 维子超立方体 Q_d. 在 Q_d^{xy} 中, x 和 y 之间的距离为 d. 由 (a), 在 Q_d^{xy} 中存在 d 内点不

交且长为 d 的 (x,y) 路 $P_{n-d+1},\cdots,P_n$. 对每个 $i=1,2,\cdots,n-d$, 令

$$u_i=\underbrace{0\cdots0}_{i-1}10\cdots00,\quad v_i=\underbrace{0\cdots0}_{i-1}10\cdots0\underbrace{11\cdots11}_{d}.$$

则 $d(Q_n;u_i,v_i)=d$, 且存在 d 维子超立方体 $Q_d^{u_iv_i}$, 它与 Q_d^{xy} 不交. 而且当 $i\neq j$ 时, $H_d^{u_iv_i}$ 与 $H_d^{u_jv_j}$ 不交. 令 R_i 是 $Q_d^{u_iv_i}$ 中最短 (u_i,v_i) 路. 则 $P_i=xu_i+R_i+v_iy$ 是 Q_n 中长为 $d+2$ 的 (x,y) 路, 且 $P_{n-d+1},\cdots,P_n$ 不交. 于是得到 Q_n 中 n 条内点不交的 (x,y) 路 $P_1,\cdots,P_{n-d},P_{n-d+1},\cdots,P_n$, 其中前面的 $n-d$ 条长为 $d+2$, 其余的路长为 d. ∎

下面的定理由 Li 等人 [208] 得到, 它显然改进了定理 6.2.2.

定理 6.2.4 对 Q_n 中任何两顶点 xy 和任何整数 ℓ, 如果 $n\geqslant 2$, $d(Q_n;x,y)\leqslant\ell\leqslant 2^n-1$ 且 ℓ 和 $d(Q_n;x,y)$ 有相同的奇偶性, 那么 Q_n 中存在长度为 ℓ 的 xy 路.

证明 对 $n\geqslant 2$ 用归纳法. 当 $n=2$ 时, 结论显然成立. 设当 $2\leqslant k<n$ 时, 结论成立. 下证结论对 $n\geqslant 3$ 成立. 记 $Q_n=0Q_{n-1}\odot 1Q_{n-1}$, 并令 $x=x_1x_2\ldots x_n$ 与 $y=y_1y_2\ldots y_n$ 是 Q_n 中任意两顶点.

如果 $d(Q_n;x,y)<n$, 则不妨假设 $x,y\in V(0Q_{n-1})$. 由归纳假设, 存在长为 ℓ 的 xy 路, 其中 $d(Q_n;x,y)\leqslant\ell\leqslant 2^{n-1}-1$ 且 ℓ 和 $d(Q_n;x,y)$ 有相同的奇偶性.

下设 $2^{n-1}\leqslant\ell\leqslant 2^n-1$ 且 ℓ 和 $d(Q_n;x,y)$ 有相同的奇偶性. 令 P 是 $0Q_{n-1}$ 中最长的 xy 路, 则当 $d(Q_n;x,y)$ 是奇数时, P 的长 $\varepsilon(P)=2^{n-1}-1$; 当 $d(Q_n;x,y)$ 是偶数时, $\varepsilon(P)=2^{n-1}-2$. 因为 Q_n 不含奇圈, 所以 $\varepsilon(P)$ 与 $d(Q_n;x,y)$ 有相同的奇偶性. 令 $\ell_1=l-\varepsilon(P)-1$, 则 $1\leqslant\ell_1<2^{n-1}$ 且是奇数. 令 uv 是 P 上的任意一条边, P_{xu} 和 P_{vy} 是 P 中的 (x,u) 段和 (v,y) 段. 则 $P=P_{xu}+uv+P_{vy}$. 令 u' 和 v' 分别是 u 和 v 在 $1Q_{n-1}$ 中邻点. 由归纳假设知, 在 $1Q_{n-1}$ 中存在长为 ℓ_1 的 $u'v'$ 的路 P'. 则 $P_{xu}+uu'+P'+v'v+P_{vy}$ 是 Q_n 中的长为 ℓ 的 xy 路.

如果 $d(Q_n;x,y)=n$, 不妨假设 $x\in V(0Q_{n-1})$, $y\in V(1Q_{n-1})$. 令 v 是 y 在 $1Q_{n-1}$ 中的一个邻点, u 是 v 在 $0Q_{n-1}$ 中的邻点. 则 $d(Q_n;u,x)=n-2$.

设 $n\leqslant\ell\leqslant 2^{n-1}+1$ 且 ℓ 和 $d(Q_n;x,y)$ 有相同的奇偶性. 由归纳假设, 在 $0Q_{n-1}$ 中存在长为 $l-2$ 的 xu 路 P, 则 $P+,uv+vy$ 是 Q_n 中的长为 ℓ 的 xy 路.

设 $2^{n-1}+2\leqslant\ell\leqslant 2^n-1$ 且 ℓ 和 $d(Q_n;x,y)$ 有相同的奇偶性. 令 P 是 $0Q_{n-1}$ 中最长的 xu 路, 则当 $d(Q_n;x,y)$ 是奇数时, $\varepsilon(P)=2^{n-1}-1$; 当 $d(Q_n;x,y)$ 是偶数时, $\varepsilon(P)=2^{n-1}-2$. 显然 $\varepsilon(P_0)-d(Q_n;x,u)$ 是偶数. 令 $\ell_1=l-\varepsilon(P_0)-1$, 则 $1\leqslant\ell_1\leqslant 2^{n-1}$ 且是奇数. 由归纳假设知, 在 $1Q_{n-1}$ 中存在长为 ℓ_1 的 vy 的路 P'. 则 $P+uv+P'+vy$ 是 Q_n 中的长为 ℓ 的 xy 路.

由归纳原理定理得证. ∎

超立方体 Q_n 的下列容错性质也是很有用的. 设 $F\subset E(Q_n)$. Leu 和 Kuo[205], Litifi 等 [223], Sen 等 [280] 独立地证明了: 如果 $|F|\leqslant n-2$, 那么 Q_n-F 含 Hamilton

圈. Sengupta[281] 改进为: 如果 $|F| \leqslant n-1$, $n \geqslant 4$, 且 F 中所有边不关联于同一个顶点, 那么 $Q_n - F$ 含 Hamilton 圈. Li 等 [208] 进一步证明: 如果 $|F| \leqslant n-2$, 那么对任何偶数 $\ell\,(4 \leqslant \ell \leqslant 2^n)$, $Q_n - F$ 的每条边都在长度为 ℓ 的圈上. 最近, 徐俊明等 [331] 改进了上述结果, 证明了下述定理:

定理 6.2.5 设 $F \subset E(Q_n)$, $|F| \leqslant n-2$ 且 $n \geqslant 6$. 如果 F 中所有边不关联于同一个顶点, 那么对任何偶数 $\ell\,(6 \leqslant \ell \leqslant 2^n)$, $Q_n - F$ 的每条边都在长度为 ℓ 的圈上. ∎

§6.3 超立方体网络的子网嵌入问题

为了实际计算上的需要, 嵌入某些子图 G 到超立方体 Q_n 是非常必要的, 即使 G 不是 Q_n 的子图 (见 Livington 和 Stout[227]). 因为 Q_n $(n \geqslant 2)$ 是 Hamilton 图, 所以任何长不超过 2^n 的路是 Q_n 是子图. 由定理 6.2.1 中, 任何长至少为 4 的偶圈是 Q_n $(n \geqslant 2)$ 的子图. 这一节考虑另外的子图嵌入超立方体问题. 首先叙述一个一般的结果, 它属于 Hartman[145] 和 Winkler[310].

定理 6.3.1 设 G 是 $n+1$ 阶图. 那么存在 G 的细分图 SG 使得 SG 同构于 Q_n 的某个子图. 而且, K_{n+1} 能以膨胀数 2 嵌入 Q_n.

证明 只需证明 Q_n 包含细分图 SK_{n+1} 作为它的子图, 这是因为每个 $n+1$ 阶图 G 是 K_{n+1} 的支撑子图. 因此, 只需证明 K_{n+1} 能以膨胀数 2 嵌入 Q_n. 注意到 Q_n 中顶点 $00\cdots00$ 是唯一的 0 权点, 且恰好存在 n 个 1 权点. 因此, Q_n 中恰有 $n+1$ 个权最多为 1 的顶点.

为了构造出细分图 SK_{n+1}, 取 Q_n 中 $n+1$ 个权最多为 1 顶点作为 K_{n+1} 的顶点集. 只需证明 Q_n 中由所有权最多为 2 的顶点导出子图是细分图 SK_{n+1}.

事实上, Q_n 中与顶点 $00\cdots00$ 相邻的顶点都是权为 1 的顶点, 所以这些顶点全含在 K_{n+1} 中. 令完全图 K_n 的顶点集是 Q_n 中权为 1 的顶点集, H 是 Q_n 中权为 1 或者 2 的顶点集导出的子图. 只需证明 $H \cong SK_n$. 因为任何两个权为 1 的顶点之间的 Hamming 距离为 2, 所以它们之间由一条长为 2 的路连接, 其中间点的权为 2. 反之, Q_n 中任何权为 2 的顶点恰好是 H 中的 2 度点. 这说明 $H = SK_n$. ∎

定理 6.3.1 虽然解决了一般图到超立方体的嵌入问题, 但膨胀率 $\frac{2^n}{n+1}$ 太大, 而且膨胀数未知. 根据网络设计的基本原则, 嵌入客图到主图, 希望有一个小的膨胀数和膨胀率. 显然, 客图 G 能以膨胀数 1 嵌入 Q_n 当且仅当 G 是同构于 Q_n 的子图.

无向图 G 称为是*可立方的* (cubical) 如果存在 n 使得 G 同构于 Q_n 的子图. Garey 和 Graham[123] 已经证明了确定一个给定的图是否是可立方的问题是个 NP 完全问题. 因此, 确定某些特殊的图是否是可立方的问题是有意义的. 显然, 可立方图必是 2 部分图. 然而, 反之不成立. 最小的反例是完全 2 部分图 $K_{2,3}$. 我们已经看到每个长至少为 4 的偶圈是可立方图. 对顶点用归纳法, 容易证明树是可立方图.

对于给定图G, 如果它是可立方的, 那么确定最小的n 使得G 同构于Q_n 的某个子图就显得重要了. 这样的n 称为G 的*可立方维数* (cubical dimension), 记为$cd(G)$. 例如, 下列可立方维数是容易确定的.

$cd(K_{1,n}) = n$ (由Q_n 的定义);

$cd(C_n) = \lceil \log_2 n \rceil$, 其中$n$ 是至少为4 的偶数 (由定理6.2.1);

$cd(P_n) = \lceil \log_2 n \rceil$ (由定理6.2.1);

$cd(nK_2) = 1 + \lceil \log_2 n \rceil$, 其中$m = cd(nK_2)$ (因为Q_m 有n 条边组成的完备匹配).

稍微复杂一点的结果是$cd(T_n) = n + 2$, $n \geqslant 2$, 其中T_n 是高为n 的完全2 叉树, 它能归结为下面定理的直接推论.

定理 6.3.2 设T_n 是高为n 的完全2 叉树, $n \geqslant 2$.

(a) T_n 不能以膨胀数1 嵌入Q_{n+1};

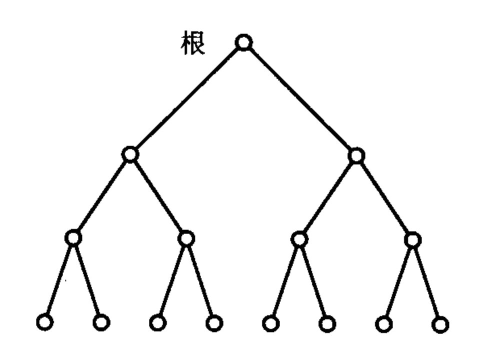
(b) $2T_{n-1}$ 能以膨胀数1 嵌入Q_{n+1};

(c) T_n 能以膨胀数2 嵌入Q_{n+1}.

证明 为证明结论 (a), 只需证明Q_{n+1} 不含T_n 作为它的子图. (反证) 假定存在某个整数$n \geqslant 2$ 使得Q_{n+1} 包含子图T_n.

考虑T_n 中偶权顶点数和奇权顶点数. 因为T_n 中相邻两顶点的权有不同的奇偶性, 所以第n 层上顶点和第$n-2$ 层上顶点的权有相同的奇偶性. 不妨设它们都是偶权点. 注意到T_n 的第n 层有2^n 顶点, 第$n-2$ 层上有2^{n-2} 个顶点, 所以Q_{n+1} 中至少有$2^n + 2^{n-2} > 2^n$ 个偶权点. 这是不可能的, 因为Q_{n+1} 中只有 2^n 个偶权点. 因此, T_n 不是Q_{n+1} 的子图.

为了证明结论 (b) 和 (c), 用K_2 替代T_n 的根. 这样得到的图称为*双根完全2 叉树* (double rooted complete binary tree), 记为DT_n. DT_n 有2^{n+1} 个顶点. 图 6.1 中所示的图是高为3 的完全2 叉树T_3 和双根完全2 叉树DT_3.



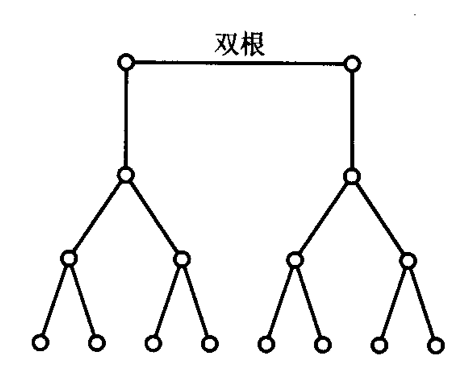


图 6.1 T_3 和 DT_3

现在证明Q_{n+1} 包含子图DT_n. 对$n \geqslant 2$ 用归纳法. 当$n = 2$ 时, 容易验证Q_3 包含子图DT_2. 假定Q_n 包含子图DT_{n-1}. 利用表示$Q_{n+1} = 0Q_n \odot 1Q_n$. 由归纳

假设, $0Q_n$ 和$1Q_n$ 包含高为$n-1$ 的双根完全2 叉树作为子图, 记这样的双根树分别为$0DT_{n-1}$ 和$1DT_{n-1}$. 由于Q_{n+1} 是边可迁的, 所以不妨设双根树$0DT_{n-1}$ 的双根为 $x = 000\cdots0$ 和$y = 010\cdots0$, 双根树$1DT_{n-1}$ 的双根为$u = 10\cdots0$ 和$v = 1010\cdots0$. 令$z = 0010\cdots0$ 和$w = 110\cdots0$. 则z 在$0DT_{n-1}$ 中且与x 相邻, w 在$1DT_{n-1}$ 中且与u 相邻. 那么 (参见图 6.2, 其中$n=3$), Q_{n+1} 的支撑树

$$DT_n = 0DT_{n-1} \cup 1DT_{n-1} - \{xz, uw\} + \{xu, yw, vz\}$$

是双根$\{x,u\}$ 的完全2 叉树. 结论 (c) 成立. 显然, $DT_n - \{x,u\} = 2T_{n-1}$ 是Q_{n+1} 的子图. 这意味着结论 (b) 成立. ∎

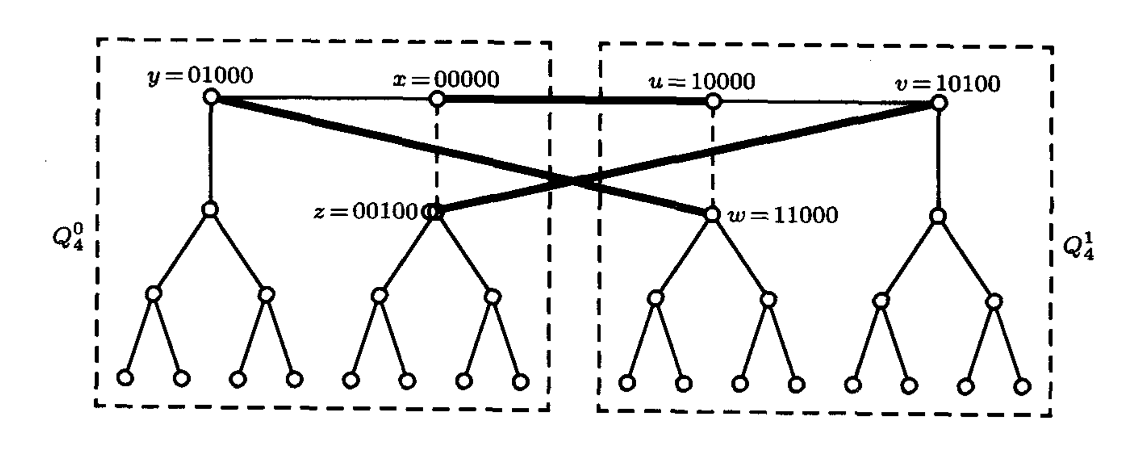


图 6.2 DT_3 到 Q_5 的嵌入

由定理6.3.2 (b) 和 (c), 立即得到下面的推论.

推论 设T_n 是高为n 的完全2 叉树. 则$cd(T_n) = n+2$, $n \geqslant 2$. ∎

一般说来, 对于任意的图G, 确定$cd(G)$ 的值是相当困难的. 事实上, 即使对于树T, Wagner 和 Cormeil[303] 已经证明: 确定$cd(T)$ 的问题是NP 难问题. 然而, 有许多文献讨论各种图到超立方体的嵌入问题, 有兴趣的读者可参见Wu[312], Harary 等 [143] 和 Leighton[204].

§6.4 超立方体网络的推广

从数学的角度推广超立方体到更一般的形式是自然的事情. 这一节介绍超立方体的推广形式.

1. 广义超立方体

Bhuyan 和 Agrawal[33] 推广Q_n 到n 维广义超立方体 (generalized hypercube), 记为$Q(d_1, d_2, \cdots, d_n)$, 其中$d_i \geqslant 2$ 是整数, $i = 1, 2, \cdots, n$.

作为Q_n 的第一个定义的推广, $Q(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 的顶点集$V = \{x_1x_2\cdots x_n :$

$x_i \in \{0,1,\cdots,d_i-1\}, i=1,2,\cdots,n\}$, 两顶点 $x=x_1x_2\cdots x_n$ 和 $y=y_1y_2\cdots y_n$ 相邻当且仅当它们有且仅有一个坐标不同.

作为 Q_n 第二个定义的推广, $Q(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 被定义为笛卡儿乘积 $K_{d_1}\times K_{d_2}\times\cdots\times K_{d_n}$.

如果 $d_1=d_2=\cdots=d_n=d\geqslant 2$, 那么 $Q(d,d,\cdots,d)$ 称为 d 元 n 维立方体 (d-ary n-dimensional cube, or d-ary n-cube), 记为 $Q_n(d)$. 显然, $Q_n(2)$ 就是 Q_n. 由 $Q(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 的第二个定义和笛卡儿乘积的性质, 我们立即得到下列结果.

定理 6.4.1 下述定理罗列了 n 维广义超立方体 $Q(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 的主要性质, 证明留给读者作为练习.

(a) $Q(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 是 $(d_1+d_2+\cdots+d_n-n)$ 正则的.

(b) $Q(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 的直径为 n.

(c) $Q(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 的连通度为 $d_1+d_2+\cdots+d_n-n$.

(d) $Q(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 是 Cayley 图, 因而是点可迁的. ∎

2. 无向超环面网络

n 维无向超环面网 (undirected toroidal mesh), 记为 $C(d_1,\cdots,d_n)$, 也是 Q_n 的一个推广, 其中 $d_i\geqslant 3$ 是整数, $i=1,2,\cdots,n$.

作为 Q_n 第一个定义的推广, $C(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 的顶点集 $V=\{x_1x_2\cdots x_n: x_i\in\{0,1,\cdots,d_i-1\}, i=1,2,\cdots,n\}$ 两顶点 $x=x_1x_2\cdots x_n$ 与 $y=y_1y_2\cdots y_n$ 相邻当且仅当存在 $i\in\{1,2,\ldots,n\}$, 使得

$$\begin{cases} |y_j-x_j|=0, & j\neq i\\ |y_j-x_j|\equiv 1\ (\operatorname{mod} d_j), & j=i. \end{cases}$$

作为 Q_n 第二定义的推广, $C(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 能定义为笛卡儿乘积 $C_{d_1}\times C_{d_2}\times\cdots\times C_{d_n}$, 其中 C_{d_i} 是无向圈, $i=1,2,\cdots,n$.

由 $C(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 的第二个定义和笛卡儿乘积的性质, 立即得下列结果.

定理 6.4.2 n 维无向超环面网 $C(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 有下列主要性质:

(a) $C(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 是 $2n$ 正则的.

(b) $C(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 的直径为 $\sum_{i=1}^{n}\left\lfloor\frac{1}{2}d_i\right\rfloor$.

(c) $C(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 的连通度为 $2n$.

(d) $C(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 是 Cayley 图, 因此是点可迁的. ∎

当 $d_1=d_2=\cdots=d_n=d$ 时, 有些文献也称 $C(d,d,\cdots,d)$ 为 d 元 n 维立方体, 记为 $C_n(d)$. 例如, Bose 等 [43], 其中讨论了若干拓扑结构到 $C_n(d)$ 的嵌入问题, 并报道了这些拓扑结构被用于若干并行计算机的设计中, 如, Ametek 2010 (Seitz 等 [279], J-Machine (Noakes, Dally[251]), Mosaic, iWarp, 和 Cray T3D (Kessler 和 Schwarzmeier[188]).

3. 有向超环面网络

n 维有向超环面网络 (directed toroidal mesh), 记为 $\overrightarrow{C}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$, 也可以看成是 Q_n 的推广, 其中 $d_i \geqslant 2$ 是整数, $i=1,2,\cdots,n$.

作为 Q_n 第一个定义的推广, $\overrightarrow{C}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 的顶点集 $V=\{x_1x_2\cdots x_n : x_i \in \{0,1,\cdots,d_i-1\}, i=1,2,\cdots,n\}$ 两顶点 $x=x_1x_2\cdots x_n$ 和 $y=y_1y_2\cdots y_n$ 由一条从 x 到 y 的有向边相连当且仅当存在 $i\in\{1,2,\ldots,n\}$, 使得

$$\begin{cases} y_j - x_j = 0, & j \neq i \\ y_j - x_j \equiv 1 \pmod{d_j}, & j = i. \end{cases}$$

作为 Q_n 第二个定义的推广, $\overrightarrow{C}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 能看成笛卡儿乘积 $C_{d_1}\times C_{d_2}\times\cdots\times C_{d_n}$, 其中 C_{d_i} 是有向圈, $i=1,2,\cdots,n$.

用 $\overrightarrow{C}_n(d)$ 表示 $\overrightarrow{C}(d,d,\cdots,d)$. 显然, $\overrightarrow{C}_n(2)=Q_n$. 由 $\overrightarrow{C}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 的第二个定义和笛卡儿乘积的性质立即得到下列结果.

定理 6.4.3 n 维有向超环面网络 $\overrightarrow{C}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 有下列主要性质:

(a) $\overrightarrow{C}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 是 n 正则的;

(b) $\overrightarrow{C}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 的直径为 $d_1+d_2+\cdots+d_n-n$;

(c) $\overrightarrow{C}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 的连通度为 n;

(d) $\overrightarrow{C}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 是 Cayley 图, 因而是点可迁的. ▮

§6.5 超立方体网络的变形

从以上几节的讨论, 我们已经看到超立方体网络有许多优良的性质. 然而, 超立方体也有它固有的缺点. 如, 它的直径比较大. 因此, 许多作者提出超立方体的某些变形网络, 旨在改进超立方体的缺点. 例如, Efe[88, 89] 的交叉超立方体 (crossed hypercube), Cull 和 Larson[70] 的 Möbius 立方体 (Möbius cube), Akers 和 Krishnamurthy[5] 的星图 (star graph), El-Amawy 和 Latifi[90] 的折叠超立方体 (folded hypercube), Tzeng 和 Wei[297] 的 (enhanced hypercube), Huang 和 Wu[176, 314] 的平衡超立方体 (balanced hypercube) 等等. 下面, 我们介绍其中的几种和它们的基本性质, 所有证明被省略, 由兴趣的读者可参见有关文献.

1. 交叉超立方体

两个 2 元序列 $x=x_2x_1$ 和 $y=y_2y_1$ 称为相关对 (pair-related), 记为 $x\sim y$, 当且仅当 $(x,y)\in\{(00,00),(10,10),(01,11),(11,01)\}$.

n 维交叉超立方体 (crossed hypercube), 记为 CQ_n $(n\geqslant 2)$, 是一个无向图. 它的顶点集和 Q_n 的顶点集一样, 两顶点 $x=x_n\cdots x_2x_1$ 和 $y=y_n\cdots y_2y_1$ 相邻当且仅当存在 j $(1\leqslant j\leqslant n)$ 使得

(a) $x_n \cdots x_{j+1} = y_n \cdots y_{j+1}$,

(b) $x_j \neq y_j$,

(c) $x_{j-1} = y_{j-1}$ 如果 j 是偶数,

(d) $x_{2i}x_{2i-1} \sim y_{2i}y_{2i-1}$, $i = 1, 2, \cdots, \lceil \frac{1}{2}j \rceil - 1$.

由定义知, CQ_2 是无向圈 C_4, 而 CQ_3 和 CQ_4 如图 6.3 所示.

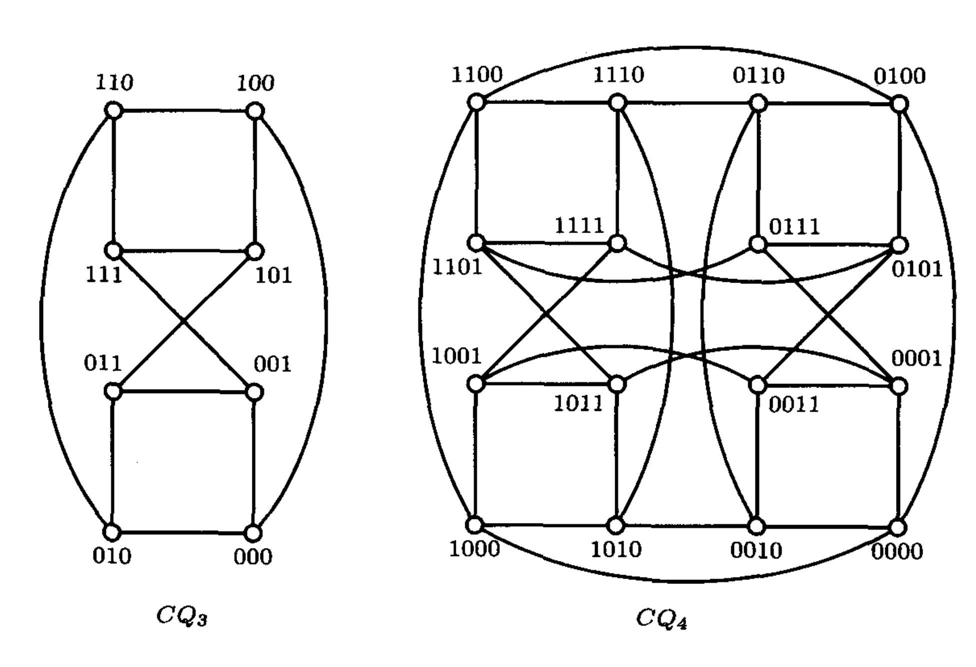


图 6.3 交叉超立方体 CQ_3 和 CQ_4

定理 6.5.1 (Efe[88]) 交叉超立方体 CQ_n 具有下列主要性质:

(a) CQ_n 是 n 正则的, 有 2^n 个顶点和 $n2^{n-1}$ 条边;

(b) CQ_n 有直径 $\lceil \frac{1}{2}(n+1) \rceil$, 连通度 n;

(c) CQ_n 含长为 $\ell\,(4 \leqslant \ell \leqslant 2^n)$ 的圈. ∎

从定理6.5.1 我们看到 CQ_n 有许多与 Q_n 一样的优良性质, 即它们有一样的顶点数, 一样的边数, 一样的正则度 n, 一样的连通度 n, 并且都有简单的递归结构. 但 CQ_n 有许多优于 Q_n 的性质. 如, CQ_n 的直径几乎是 Q_n 直径的一半. 据此, Efe[89] 提出了一些算法, 比如矩阵乘积, 半群计算和分类算法, 所用的通信步数是超立方体所用的通信步数的一半. CQ_n 含任意长 ℓ $(4 \leqslant \ell \leqslant 2^n)$ 的圈, 而 Q_n 仅含偶长圈.

另外, Kulasinghe, Bettayeb[195] 证明了: CQ_n 含高为 $n-1$ 的完全2 叉树作为子图. 最近, Ma 和 Xu[235], Fan, Lin 和 Jia[106]) 独立证明了: 对任何 $n \geqslant 2$ 和任何整数 $\ell\,(4 \leqslant \ell \leqslant 2^n)$, CQ_n 的每条边都被包含在长为 ℓ 的圈上.

交叉超立方体的这些优良性质说明作为大规模并行处理系统的拓扑结构, 交叉立方体是比超立方体更有竞争实力的结构. 然而, 当 $n \geqslant 5$ 时, 交叉超立方体 CQ_n 不具备可迁性 [196].

2. Möbius 超立方体

n 维 Möbius 立方体, 记为 MQ_n, 是无向图, 它的顶点集与超立方体 Q_n 一样. 顶点 $X = x_1x_2\cdots x_n$ 连到 n 个另外顶点 Y_i, $(1 \leqslant i \leqslant n)$:

$$Y_i = \begin{cases} x_1x_2\cdots x_{i-1}\bar{x}_ix_{i+1}\cdots x_n & 若\ x_{i-1} = 0; \\ x_1x_2\cdots x_{i-1}\bar{x}_i\bar{x}_{i+1}\cdots \bar{x}_n & 若\ x_{i-1} = 1. \end{cases}$$

由定义, X 与 Y_1 之间是否有边确定. 于是, 当 $x_0 = 0$ 时, 该网络称为 0-Möbius 立方体; 当 $x_0 = 1$ 时, 该网络称为 1-Möbius 立方体, 分别表示为 0-MQ_n 和 1-MQ_n, 见图 6.4.

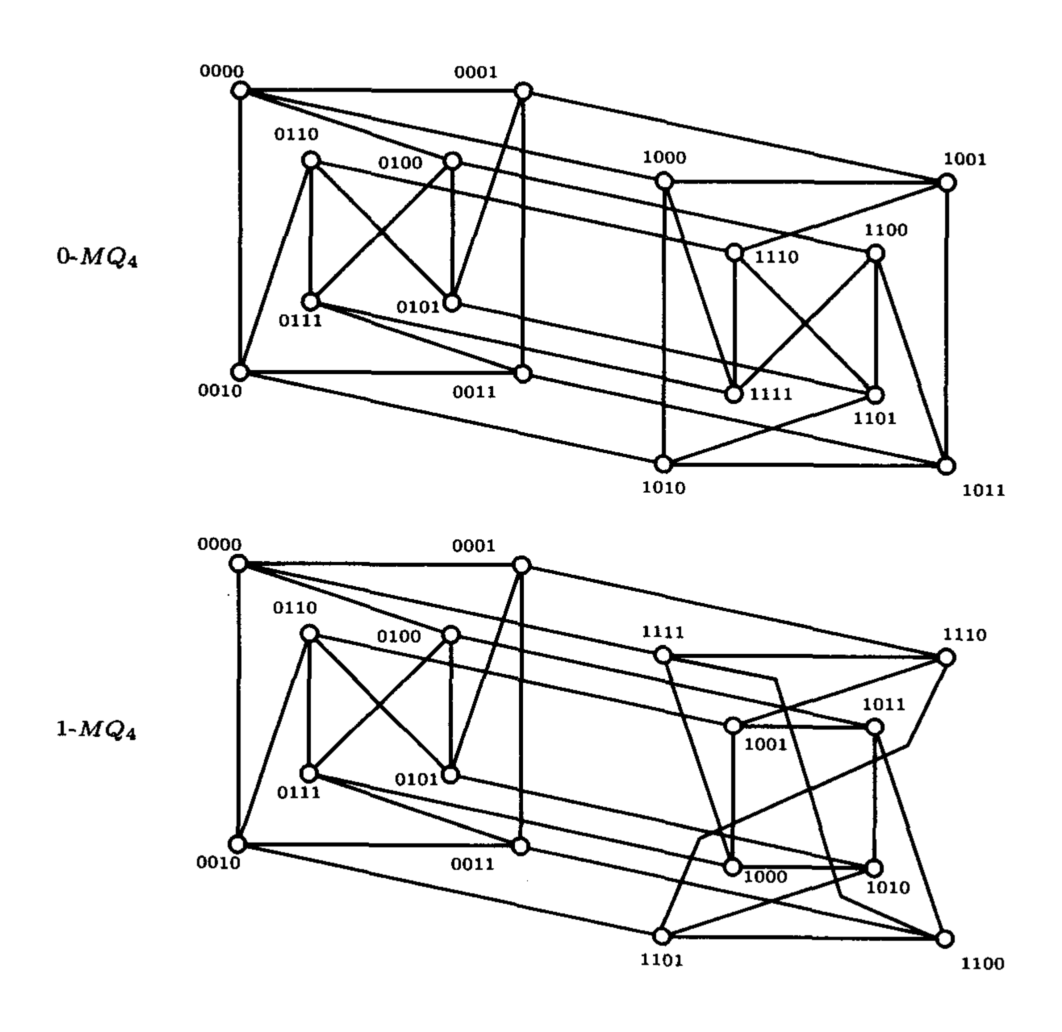


图 6.4 0-Möbius 立方体 0-M_4 和 1-Möbius 立方体 1-M_4

Möbius 立方体 MQ_n 是由 Cull 和 Larson[70] 首先提出来的, 具有下面的性质.

定理 6.5.2 Möbius 立方体 MQ_n 具有下列主要性质:

(a) MQ_n 是 n 正则的, 有 2^n 顶点和 $n2^{n-1}$ 条边;

(b) MQ_n 有连通度 n;

(c) 0-MQ_n 有直径 $\lceil \frac{n+2}{2} \rceil$ $(n \geqslant 4)$, 1-MQ_n 有直径 $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ $(n \geqslant 1)$; 平均距离 μ 满足

$$\frac{n}{3}+\frac{1}{9}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right] \leqslant \mu \leqslant \frac{n}{3}+\frac{1}{9}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right]+1;$$

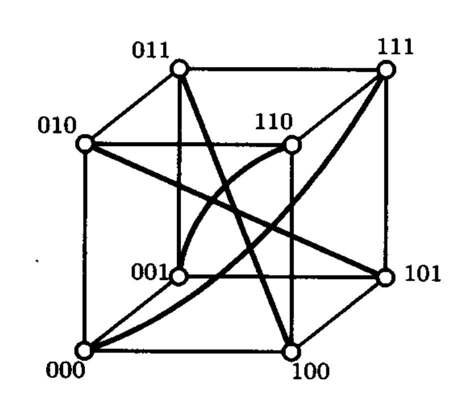
(d) $MQ_n\,(n \geqslant 2)$ 含长为 $\ell\,(4 \leqslant \ell \leqslant 2^n)$ 的圈 (Huang 等 [172], Fan[105]). ∎

最近, Xu and Xu[352] 证明了: 对任何 $n \geqslant 2$ 和任何整数 $\ell\,(4 \leqslant \ell \leqslant 2^n)$, MQ_n 的每条边都被包含在长为 ℓ 的圈上.

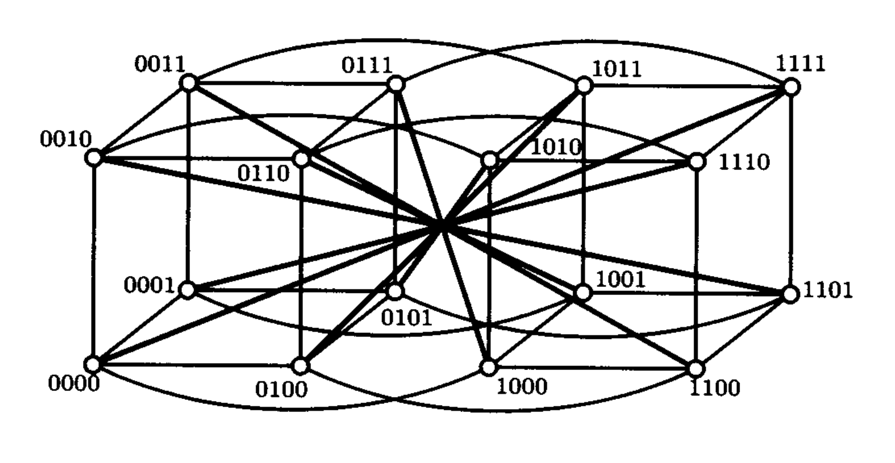
然而, 当 $n \geqslant 4$ 时, MQ_n 既不是点可迁的, 也不是边可迁的.

3. 折叠超立方体

n 维折叠超立方体 (folded hypercube), 记为 FQ_n, 是一个无向图, 它从超立方体 Q_n 通过添加所有补边 (complementary edges) 而得到. 对于 FQ_n 中两顶点 $x = x_1x_2\cdots x_n$ 和 $y = y_1y_2\cdots y_n$, $xy \in E(FQ_n)$ 是一条补边当且仅当它们的比特是互补的, 即, $y_i = \overline{x}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 其中 $x_i \in \{0, 1\}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$. 图 6.5 中所示的是 FQ_3 和 FQ_4, 其中粗线为补边.



FQ_3



FQ_4

图 6.5 折叠超立方体 FQ_3 和 FQ_4 (粗线为补边)

折叠超立方体 FQ_n 是由 El-Amawy 和 Latifi[90] 提出来的. FQ_n 具有下列性质.

定理 6.5.3 折叠超立方体 FQ_n 具有下列主要性质:

(a) FQ_n 是 $(n+1)$ 正则的, 有 2^n 顶点和 $(n+1)2^{n-1}$ 条边;

(b) FQ_n 有直径 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$;

(c) FQ_n 有连通度 $n+1$;

(d) FQ_n 是 Cayley 图, 因而是点可迁的. ∎

Simó 和 Yebra[285] 证明了: 当 $n \geqslant 2$ 时, FQ_n 中任何两顶点之间存在 $n+1$ 条内点不交且长度不超过 $\lfloor \frac{1}{2}(n+1) \rfloor + 1$ 的路. 最近, Xu 和 Ma[339] 得到折叠超立方体的许多新性质 (参见习题 12.8), 特别是: FQ_n 是 2 部分图当且仅当 n 是奇数; 如果 n 是偶数, 那么最小奇圈长为 $(n+1)$; 每条边被含在任意偶长 $\ell\,(4 \leqslant \ell \leqslant 2^n)$ 圈中; 如果 n 是偶数, 每条边还被含在任意奇长 $\ell\,(n+1 \leqslant \ell \leqslant 2^n-1)$ 圈中.

习　　题

6.1 证明: Q_n 是边可迁的.

6.2 证明: 对任何 $n \geqslant 2$ 和任何偶数 $\ell\,(4 \leqslant \ell \leqslant 2^n)$,

(a) Q_n 包含长度为 ℓ 的圈;

(b) Q_n 的每条边都在长度为 ℓ 的圈上.

6.3 证明: 对 Q_n 中任何两顶点 xy 和任何整数 ℓ, 如果 $n \geqslant 2$, $d(x,y) \leqslant \ell \leqslant 2^n-1$ 且 ℓ 和 $d(Q_n; x, y)$ 有相同的奇偶性, 那么 Q_n 中存在长度为 ℓ 的 xy 路.

6.4 证明: 确定给定的图是否是可立方的的问题是个 NP 完全问题. (参见 Garey 和 Graham[123])

6.5 证明: 完全 2 部分图 $K_{2,3}$ 不是可立方图, 而树是可立方图.

6.6 证明定理 6.5.1, 定理 6.5.2 和定理 6.5.3.

6.7 证明:

(a) 当 $n \geqslant 5$ 时, CQ_n 不是点可迁的; (Kulasinghe, Bettayeb[196])

(b) 当 $n \geqslant 3$ 时, CQ_n 不是边可迁的; 当 $n \leqslant 4$ 时, CQ_n 是 Cayley 图, 因而是点可迁的. (黄佳和徐俊明 [173])

6.8 证明: 当 $n \geqslant 2$ 时, MQ_n 不含三角形且不相邻两顶点至多有两个公共邻点.

6.9 设 FQ_n 是折叠超立方体 $n \geqslant 2$. 证明 (参见 Xu 和 Ma[339]):

(a) FQ_n 是 2 部分图当且仅当 n 是奇数;

(b) 恰含两条补边的圈为偶圈;

(c) 恰含一条补边的圈的长至少为 $n+1$; 任何补边和顶点都落在一条含唯一补边且长为 $n+1$ 的公共圈上;

(d) 任何两顶点 x 和 y 之间的最短路不含补边, 如果它们之间的 Hamming 距离不超过 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; 恰含一条补边, 如果它们之间的 Hamming 距离大于 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$;

(e) 如果 FQ_n 含奇圈, 那么最短奇圈恰含一条补边, 而且长为 $n+1$;

(f) 每条补边都落在任何偶长 $\ell\,(4 \leqslant \ell \leqslant 2^n)$ 圈中;

(g) 如果 n 是偶数, 每条补边都落在任何奇长 $\ell\,(n+1 \leqslant \ell \leqslant 2^n-1)$ 的圈中.

6.10 设 V 是 FQ_n 的顶点集, 则对任意 $x \in V$, 有

$$\sum_{y \in V} d(FQ_n; x, y) = (n+1)\,2^{n-1} - \frac{n+1}{2}\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}.$$

第 7 章　De Brujin 网络

De Brujin 图是由 de Brujin[74] 和 Good[129] 于 1946 年独立地提出来的. 作为互连网络拓扑结构, De Brujin 网络是由 Schlumberger[276] 于 1974 年首先提出来的. De Brujin 结构在某些方面优于超立方体网络. 这一章绍 de Brujin 网络的结构性质和与之相关的基本研究结果.

§7.1　De Brujin 网络的定义和基本性质

对于两个给定整数 d $(\geqslant 2)$ 和 n $(\geqslant 1)$, de Brujin 有向图, 记为 $B(d,n)$, 通常有下面三个等价的定义.

1. 利用长为 n 的 d 元序列来定义

$B(d,n)$ 的顶点集

$$V=\{x_1x_2\cdots x_n:\ x_i\in\{0,1,\cdots,d-1\},i=1,2,\cdots,n\},$$

$B(d,n)$ 的边集 E 是由从顶点 $x_1x_2\cdots x_n$ 到 d 个 $x_2\cdots x_n\alpha$ 的所有边组成的, 其中 $\alpha\in\{0,1,\cdots,d-1\}$.

2. 利用线有向图来定义

正如例 2.4.1 中所定义的, de Brujin 有向图 $B(d,n)$ 能被定义为花完全图 K_d^+ 的 $(n-1)$ 重线图 (即 K_d^+ 是在完全有向图 K_d 的每个顶点上添加一条环而得到的有向图). 因此, de Brujin 有向图 $B(d,n)$ 能递归地定义为

$$B(d,1)=K_d^+;\quad B(d,n)=L^{n-1}(K_d^+),\quad n\geqslant 2.$$

3. 利用代数方法的定义

$B(d,n)$ 的顶点集 $V=\{0,1,\cdots,d^n-1\}$, 边集

$$E=\{(x,y):\ y\equiv xd+\alpha\ (\mathrm{mod}\ d^n),\ \alpha=0,1,\cdots,d-1\}.$$

由前两个定义得到的三个小阶 de Brujin 有向图 $B(2,1)$, $B(2,2)$ 和 $B(2,3)$, 如图 2.2 所示, 由第三个定义得到的这三个如图 7.1 所示.

de Brujin 有向图的第一个定义, 当 $d=2$ 时是由 de Brujin[74] 和 Good[129] 独立提出来的. 他们解决了某些移位寄存器序列的存在性问题, 即存在一个长为 2^n 的循环 2 元序列, 它包含所有不同的长为 n 的 2 元序列.

de Brujin 有向图的第二个定义是由 Fiol, Yebra 和 Alergre[115] 提出的; 而第三个定义是由 Imase 和 Itoh[177] 提出的. 下面证明 $B(d,n)$ 这三个定义的等价性.

定理 7.1.1　$B(d,n)$ 的三个定义是等价的, 即由上述三个定义得到的图是同构的.

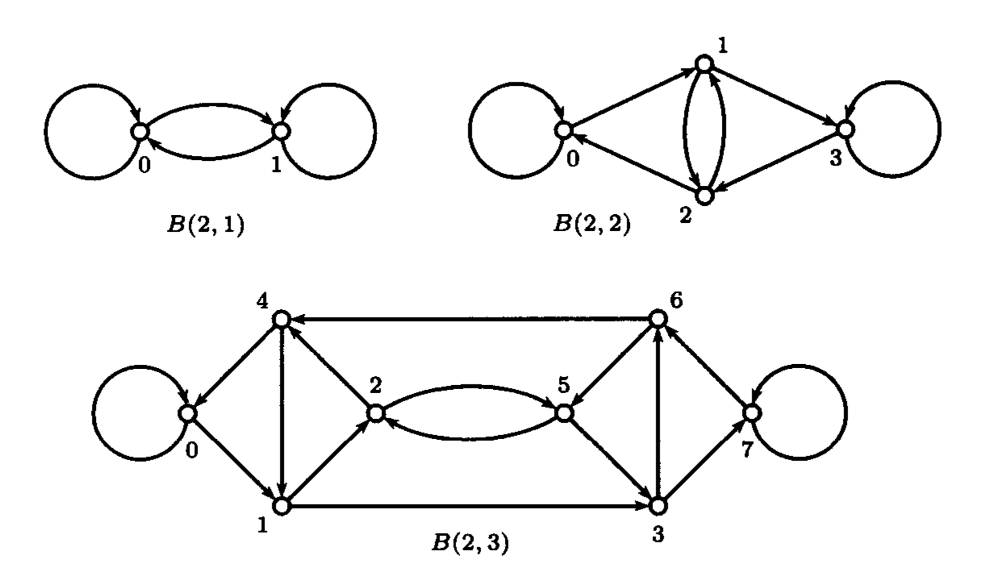


图 7.1 de Brujin 有向图 $B(2,1), B(2,2)$ 和 $B(2,3)$

证明 设 $G_i=(V_i,E_i)$, $i=1,2,3$ 是分别由这三个定义得到的有向图. 先证明 $G_1\cong G_2$.

$$V_1=\{x_1x_2\cdots x_n:\ x_i\in\{0,1,\cdots,d-1\}, i=1,2,\cdots,n\}.$$

设 $V(K_d^+)=\{0,1,\cdots,d-1\}$. 由2.4 节知, $L^{n-1}(K_d^+)$ 的顶点能表示成 K_d^+ 中一条长为 $n-1$ 的有向链 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 反之亦然. 这意味着我们能假定

$$V_2=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\ x_i\in\{0,1,\cdots,d-1\}, i=1,2,\cdots,n\}.$$

定义映射

$$\phi:\ V_1\to V_2$$
$$x_1x_2\cdots x_n\mapsto(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

显然, 映射 ϕ 是双射. 为了证明 ϕ 是 G_1 与 G_2 之间的同构, 只需证明 ϕ 保相邻性.

事实上, 设 $x,y\in V_1$, $x=x_1x_2\cdots x_n$. 则 $(x,y)\in E_1$ 当且仅当存在 $\alpha\in\{0,1,\cdots,d-1\}$ 使得 $y=x_2x_3\cdots x_n\alpha$. 由 ϕ 的定义, $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $(x_2,x_3,\cdots,x_n,\alpha)$ 都在 V_2. 由 V_2 中元素的含义, $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $(x_2,x_3,\cdots,x_n,\alpha)$ 是 K_d^+ 中两条长为 $n-1$ 的有向链. 因此, $(x_1,x_2,\cdots,x_n,\alpha)$ 是 K_d^+ 中一条长 n 的有向链. 由线图的定义, 在 $L^{n-1}(K_d^+)=G_2$ 中存在一条从顶点 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 到顶点 $(x_2,x_3,\cdots,x_n,\alpha)$ 的有向边, 反之亦然. 这意味着 $(x,y)\in E_1$ 当且仅当 $(\phi(x),\phi(y))\in E_2$. 这证明了 ϕ 保相邻性.

现在证明 $G_1\cong G_3$. 显然, $x\in V_3$ 当且仅当存在 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\{0,1,\cdots,d-1\}$

使得

$$x = x_1 d^{n-1} + x_2 d^{n-2} + \cdots + x_{n-1} d + x_n.$$

因此, 能用向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示顶点 x. 这意味着 V_3 能表示成

$$V_3 = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : \ x_i \in \{0, 1, \cdots, d-1\}, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

定义映射

$$\begin{aligned} \pi: \ V_1 &\to V_3 \\ x_1 x_2 \cdots x_n &\mapsto (x_1, x_2, \cdots, x_n). \end{aligned}$$

显然, π 是双射. 下面证明 π 是 G_1 与 G_3 之间的同构, 即只需证明 π 保相邻性. 事实上, 设 $x, y \in V_1$, $x = x_1 x_2 \cdots x_n$. 则 $(x, y) \in E_1$ 当且仅当存在 $\alpha \in \{0, 1, \cdots, d-1\}$ 使得 $y = x_2 x_3 \cdots x_n \alpha$. 由 π 的定义知, $u = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $v = (x_2, x_3, \cdots, x_n, \alpha)$ 在 V_3 中. 由 V_3 中元素的含义知,

$$\begin{aligned} v = (x_2, x_3, \cdots, x_n, \alpha) &= x_2 d^{n-1} + x_3 d^{n-2} + \cdots + x_n d + \alpha \\ &\equiv x_1 d^n + x_2 d^{n-1} + x_3 d^{n-2} + \cdots + x_n d + \alpha \pmod{d^n} \\ &= (x_1 d^{n-1} + x_2 d^{n-2} + x_3 d^{n-3} + \cdots + x_{n-1} d + x_n) d + \alpha \pmod{d^n} \\ &\equiv ud + \alpha \pmod{d^n} \end{aligned}$$

这意味着, 如果 $(x, y) \in E_1$, 那么 $(u, v) \in E_3$. 反之亦然. 因此, π 具有保相邻性. ∎

由 de Brujin 有向图的第二个定义, 立即得到 $B(d, n)$ 的下列性质, 详细证明留给读者作为练习.

定理 7.1.2 对任何 $d \geqslant 2$ 和 $n \geqslant 1$,

(a) $B(d, n)$ 有 d^n 个顶点, d^{n+1} 条边, d 条环, 且 d 正则;

(b) $B(d, n)$ 有连通度 $d - 1$;

(c) $B(d, n)$ 有直径 n. ∎

下面讨论 de Brujin 有向图的 Euler 性和 Hamilton 性, de Brujin 有向图在编码理论中的应用, 回长和嵌入问题. 由线图的定义, 容易得到下面的结果.

定理 7.1.3 $B(d, n)$ 含 Euler 回和 Hamilton 圈.

证明 由定理 7.1.2 知, $B(d, n)$ 是强连通的 d 正则有向图. 因此由定理 1.2.6 知, $B(d, n)$ 必含 Euler 回. 由 de Brujin 有向图的第二个定义, $B(d, n)$ 是 $B(d, n-1)$ 的线图. 因为 $B(d, n-1)$ 是 Euler 图, 所以, 由定理 2.3.1 (b) 知 $B(d, n)$ 含 Hamilton 圈. ∎

由 $B(d, n)$ 的第二个定义, $B(d, n) = L^{n-1}(K_d^+)$. 设 K_d 的顶点集为 $\{0, 1, \cdots, d-1\}$. 则由线图的定义知, $B(d, n)$ 的顶点是 $B(d, n-1)$ 的边. 将边表示成 n 位 d 进制数 $x_1 x_2 \cdots x_n$, $x_i \in \{0, 1, \cdots, d-1\}$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 设 $C = (e_1, e_2, \cdots, e_\varepsilon)$ 是 $B(d, n-1)$ 中 Euler 回, 其中 $e_i \in E(B(d, n-1))$, $i = 1, 2, \cdots, \varepsilon$, $\varepsilon = \varepsilon(B(d, n-$

$1)) = d^n$. 则 C 中两条相继边 e_i 和 e_{i+1} 必满足下面性质: 如果 $e_i = x_1x_2\cdots x_n$, 那么 $e_{i+1} = x_2x_3\cdots x_n\alpha$, 其中 $0 \leqslant \alpha \leqslant d-1$. 因此, 相继取 C 中每条边的第一位数字, 就得到 d^n 位 d 进制数序列

$$M(d, n+1) = (x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_\varepsilon}).$$

例如, 图 7.2 中所示的是 $B(2,3)$. 令 $C = (e_1, e_2, \cdots, e_{16})$ 是 $B(2,3)$ 中 Euler 回. 那么对应的 16 位 2 进制序列是:

$$M(2,4) = (0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1).$$

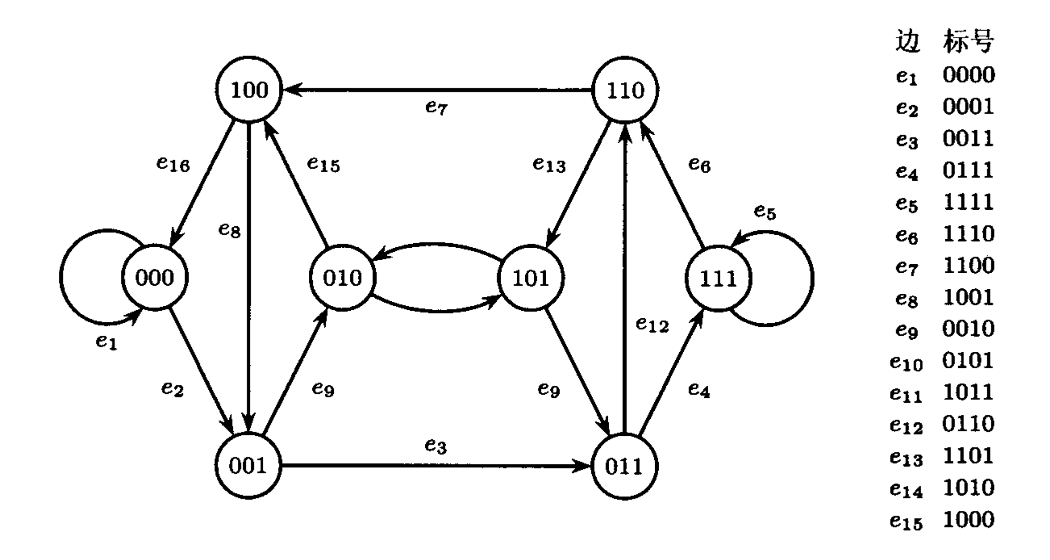


图 7.2 $B(2,3)$ 中 Euler 回

序列 $M(d,n+1)$ 称为 $(d,n+1)$-de Brujin *序列* (de Brujin sequence), 或者简称为 $M(d,n+1)$ *序列*. 如果将 $M(d,n+1)$ 序列看成是一个循环序列, 那么该循环序列中任何一个相继 $n+1$ 位数表示 $B(d,n)$ 中一条边, 因而是 $B(d,n+1)$ 的一个顶点. 正如超立方体 Q_n 中 Gray 码一样, $(d,n+1)$-de Brujin 序列已被广泛用于编码理论中, 参见万哲先《代数与编码》[305].

$B(d,n)$ 的下列性质对进一步研究 de Brujin 是很有用的.

定理 7.1.4 设 C 是 $B(d,n)$ 中长为 p $(< n)$ 的有向回, $x = x_1x_2\cdots x_n$ 是 C 中顶点. 则对任何 $i = 1, 2, \cdots, n-p$, 有 $x_i = x_{p+i}$.

证明 因为 $x = x_1x_2\cdots x_n$ 是 C 中顶点, 所以 C 可以表示成

$$x = x_1x_2\cdots x_n \to x_2x_3\cdots x_ny_1 \to x_3x_4\cdots x_ny_1y_2 \to \cdots$$
$$\to x_{p+1}\cdots x_ny_1\cdots y_p = x_1x_2\cdots x_px_{p+1}\cdots x_n = x.$$

这意味着 $x_i = x_{p+i}$, $i = 1, 2, \cdots, n-p$. ∎

从定理 7.1.4 知, $B(d,n)$ 中长为 $p\,(<n)$ 的回 C 可以由 C 中任何顶点 p 个相继坐标组成的序列表示出来. 反之, 任何 p 位 d 进制数循环序列表示 $B(d,n)$ 中一条长为 p 的回. 正是这样一个简单的事实能使我们得到比定理 7.1.3 更一般的结果.

定理 7.1.5 对任何整数 $p\ (1\leqslant p\leqslant d^n)$, $B(d,n)$ 含长为 p 的有向回.

证明 在 $M(d,n+1)$ 序列中取 p 个相继的数字, 记为 $x_1x_2\cdots x_p$. 那么由循环序列 $(x_1x_2\cdots x_p)$ 确定了 $B(d,n)$ 一条长为 p 的有向回. ▮

最后讨论某些拓扑结构到 $B(d,n)$ 的嵌入问题.

由定理 7.1.5 知, 任何长为 $p\ (1\leqslant p\leqslant d^n)$ 的有向回能以膨胀数 1 嵌入 $B(d,n)$.

因为 $B(d,n)$ 的直径为 n, 所以对于 $B(d,n)$ 的一个给定顶点 x, $B(d,n)$ 中由以 x 为起点的所有有向路形成的树 T 是一个根在 x 高为 n 的外向树, 它是 $B(d,n)$ 的支撑树. 如果顶点 x 处没有环, 那么, T 是 d 叉外向树. 这说明 $B(d,n)$ 包含高为 n 的 d 叉外向树作为它的支撑子图.

注意到 $B(d,n)$ 的顶点 x 处有环当且仅当 x 的所有坐标是一样的. 因此, 任何两个有环顶点之间的距离为 n. 如果取顶点 $x=ii\cdots ii\,(0\leqslant i\leqslant d-1)$ 作为 $B(d,n)$ 的支撑树 T 的根, 那么 T 是一个完全 d 叉外向树, 其中根在 x, 且顶点出度为 $d-1$. 这个事实说明任何高为 n 根出度为 $d-1$ 的完全 d 叉外树能被嵌入 $B(d,n)$, 其膨胀数和膨胀率都为 1.

de Brujin 无向图, 记为 $UB(d,n)$, 是由 $B(d,n)$ 通过去掉所有边的方向, 然后去掉平行边和环后得到的无向图.

de Brujin 无向图的拓扑结构性质是由 Pradhan 和 Reddy[262] 开始研究的.

定理 7.1.6 对于给定的 $d\geqslant 2$ 和 $n\geqslant 1$, de Brujin 无向图 $UB(d,n)$ 有下列性质.

(a) $UB(d,n)$ 有最大度 $2d$ 和最小度 $2d-2$;

(b) $UB(d,n)$ 有直径 n;

(c) $UB(d,n)$ 有连通度 $2d-2$. ▮

结论 (a) 是显然的. 由 $UB(d,n)$ 的定义知, $UB(d,n)$ 的直径不会超过 $B(d,n)$ 的直径 n. 另一方面, 顶点 $00\cdots 00$ 和顶点 $11\cdots 11$ 的距离是 n. 所以, 结论 (b) 成立. 结论 (c) 的证明需要一定的篇幅, 故略去. 有兴趣的读者可参见 Esfahanian 和 Hakimi[98] 的原始证明. 事实上, 他们证明这一结论是通过对 $UB(d,n)$ 中任何两顶点 x 和 y, 构造出 $2d-2$ 条内点不交的 xy 路.

§7.2 De Brujin 网络中最短路的唯一性

设 $x=x_1x_2\cdots x_n$ 和 $y=y_1y_2\cdots y_n$ 是 $B(d,n)$ 的两个不同的顶点. 用

$$P=x_1x_2\cdots x_ny_1y_2\cdots y_n,\quad Q=y_1y_2\cdots y_nx_1x_2\cdots x_n$$

表示 $B(d,n)$ 中长为 n 的 (x,y) 链

$$P:\ x=x_1x_2\cdots x_n \to x_2x_3\cdots x_ny_1 \to x_3\cdots x_ny_1y_2$$
$$\to \cdots \to x_ny_1\cdots y_{n-1} \to y_1y_2\cdots y_n = y.$$

和 $B(d,n)$ 中长为 n 的 (y,x) 链

$$Q:\ y=y_1y_2\cdots y_n \to y_2y_3\cdots y_nx_1 \to y_3\cdots y_nx_1x_2$$
$$\to \cdots \to y_nx_1\cdots x_{n-1} \to x_1x_2\cdots x_n = x.$$

因为上面定义的 (x,y) 链 P 和 (y,x) 链 Q 是 $B(d,n)$ 中唯一的长为 n 的 (x,y) 链和 (y,x) 链, 因此, 由定理 1.2.7, 立即得到下面的结果.

定理 7.2.1 设 A 是 $B(d,n)$ 的邻接矩阵, 则 $A^n=J$, 其中 J 为全 1 方阵. ∎

注意到上面定义的有向链 P 和 Q 不一定是最短的. 研究 $B(d,n)$ 中最短路的性质对进一步发现 de Brujin 有向图的结构性质是有用的. 为此, 需要一些记号.

设 $x=x_1x_2\cdots x_n$ 和 $y=y_1y_2\cdots y_n$ 是 $B(d,n)$ 中两个不同的顶点. 用 $\ell(x,y)$ 表示 x 的尾部和 y 的首部重叠数字的最大数目, 并设这些重叠的数字为 $z_1z_2\cdots z_\ell$, 即 $\ell(x,y)$ 是最大的 ℓ 使得

$$x_{n-\ell+i}=y_i=z_i, \qquad i=1,2,\cdots,l.$$

记 $B(d,n)$ 中 (x,y) 路

$$P(x,y)=x_1x_2\cdots x_{n-l}z_1z_2\cdots z_\ell y_{\ell+1}\cdots y_{n-1}y_n. \tag{7.2.1}$$

则 $P(x,y)$ 的长为 $n-l$.

定理 7.2.2 设 ℓ $(1\leqslant \ell \leqslant n)$ 是整数, x 和 y 是 $B(d,n)$ 中不同两顶点. 则从 x 到 y 的距离等于 $n-l$ 当且仅当 $\ell=\ell(x,y)$, 且由式 (7.2.1) 所定义 $P(x,y)$ 是 $B(d,n)$ 中唯一最短 (x,y) 路.

证明 设 $\ell=\ell(x,y)$, 且 $P(x,y)$ 是最短 (x,y) 路. 则从 x 到 y 的距离等于 $n-l$.

反之, 假定从 x 到 y 的距离等于 $n-l$. 则 $B(d,n)$ 中存在一条长为 $n-l$ 的 (x,y) 路如下:

$$x=x_1x_2\cdots x_n \to x_2\cdots x_nz_1 \to x_3\cdots x_nz_1z_2 \to \cdots$$
$$\to x_{n-\ell+1}\cdots x_nz_1\cdots z_{n-l}=y_1y_2\cdots y_n=y.$$

因此, x 的尾部和 y 的首部重叠数字为 ℓ. 这意味着 $\ell(x,y)\geqslant \ell$.

另一方面, $n-\ell=\varepsilon(P(x,y))\leqslant n-\ell(x,y)$. 这意味着 $\ell(x,y)\leqslant \ell$. 需要证明 $P(x,y)$ 是唯一的最短 (x,y) 路. 假定 $B(d,n)$ 中存在长为 $n-l$ 的 (x,y) 路:

$$P':\quad x=x_1x_2\cdots x_n \to x_2\cdots x_nu_1 \to x_3\cdots x_nu_1u_2 \to \cdots$$
$$\to x_{n-\ell+1}\cdots x_nu_1\cdots u_{n-l}=y_1y_2\cdots y_\ell y_{\ell+1}\cdots y_n=y.$$

那么,

$$x_{n-\ell+i} = y_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, l;$$

$$u_j = y_{\ell+j}, \quad j = 1, 2, \cdots, n-l.$$

这说明$P' = P(x,y)$, 即由式 (7.2.1) 定义的$P(x,y)$ 是$B(d,n)$ 中唯一的最短(x,y)路. ∎

$B(d,n)$ 中任何两点之间最短路的唯一性是重要的. 根据这个性质, 式 (7.2.1) 事实上提供了一个求$B(d,n)$ 中任何两顶点之间最短路的简单算法. 也正是这样一个性质确定了$B(d,n)$ 有一个容易的最小路由选择策略.

定理 7.2.3 设x 和y 是$B(d,n)$ 中两个不同的顶点, P 是最短(x,y) 路, Q 是最短(y,x) 路. 则

(a) 如果P 和Q 内部相交, 那么$\varepsilon(P)+\varepsilon(Q)>n$;

(b) $P\cup Q$ 至多构成3 个不同的圈.

证明 设$x = x_1x_2\cdots x_n$ 和$y = y_1y_2\cdots y_n$ 是$B(d,n)$ 中两个不同的顶点, $\varepsilon(P)=p$ 且$\varepsilon(Q)=q$.

(a) 设z 是P 和Q 的内部交点使得它在P 上的外邻点为z', 在Q 上的外邻点为z'' 是不同的两顶点 (见图 7.3). 因为$B(d,n)$ 中最短有向路是唯一的, 所以可设

$$\varepsilon(P(x,z))=a,\ \varepsilon(P(z,y))=b,\ \varepsilon(Q(y,z))=c,\ \varepsilon(Q(z,x))=e.$$

因为沿着P 从x 前进a 步到达 z, 而且z 到y 的距离为b, 所以z 可以表示成

$$z = x_{a+1}\cdots x_n y_{n-b-a+1}\cdots y_{n-b}. \tag{7.2.2}$$

于是,

$$z' = x_{a+2}\cdots x_n y_{n-b-a+1}\cdots y_{n-b}y_{n-b+1}.$$

另一方面, 沿着Q 从y 前进c 步到达z, 而且z 到x 的距离为e, 所以z 可以表示成

$$z = y_{c+1}\cdots y_n x_{n-e-c+1}\cdots x_{n-e}. \tag{7.2.3}$$

于是,

$$\begin{aligned} z'' &= y_{c+2}\cdots y_n x_{n-e-c+1}\cdots x_{n-e}x_{n-e+1} \\ &= x_{a+2}\cdots x_n y_{n-b-a+1}\cdots y_{n-b}x_{n-e+1}. \end{aligned}$$

我们要证明: 如果$p+q\leqslant n$, 那么$y_{n-b+1}=x_{n-e+1}$. 由此得, $z'=z''$, 这矛盾于z 的选取. 下面证明上述结论. 为此考虑z 的第$(n-(p+q)+1)$ 个坐标.

事实上, 如果$p+q\leqslant n$, 那么z 是在长为$a+e<p+q\leqslant n$ 的有向回上. 因此, 由定理 7.1.4 和z 的表达式 (7.2.3), 有

$$y_{n-b+1} = y_{n-b+1-(a+e)} = y_{n-(p+q)+c+1}.$$

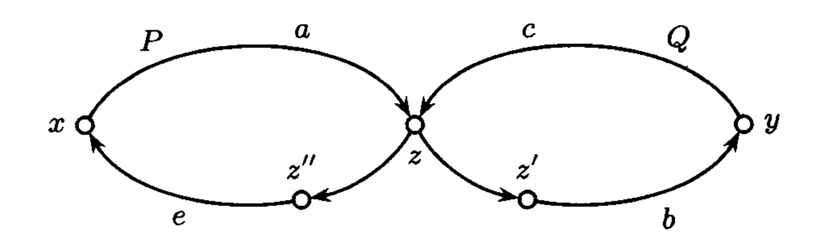


图 7.3 最短路 P 和 Q

这意味着 y_{n-b+1} 是 z 的第 $(n-(p+q)+1)$ 个坐标.

另一方面, z 也在长为 $b+c<p+q\leqslant n$ 的有向回上. 因此, 由定理 7.1.3 和 z 的表达式 (7.2.2), 有

$$x_{n-e+1}=x_{n-e+1-(b+c)}=x_{n-(p+q)+a+1}.$$

这意味着 x_{n-e+1} 是 z 的第 $(n-(p+q)+1)$ 个坐标.

(b) 假定至少有 4 个不同的圈. 那么, 存在内部交点 t 使得 $P(x,t)$ 和 $Q(t,x)$ 内部相交, $P(t,y)$ 和 $Q(y,t)$ 内部相交. 从结论 (a) 导出矛盾如下:

$$\begin{aligned}p+q&=(\varepsilon(P(x,t))+\varepsilon(Q(t,x)))+(\varepsilon(P(t,y))+\varepsilon(Q(y,t)))\\&>2n\geqslant p+q.\end{aligned}$$

这说明 $P\cup Q$ 至多构成 3 个不同的圈. ∎

值得注意的是, 存在 $B(d,n)$ 和其中的两顶点 x 和 y 使得两条最短路 P 和 Q 的并构成 3 个不同的圈. 例如, 考虑 $B(2,8)$ 中点 $x=00010001$ 和 $y=10010010$, $P\cup Q$ 构成 3 个不同的圈.

de Brujin 有向图中最短路和圈还有一些另外的性质, 有兴趣的读者可参见 Li, Sotteau, Xu[207]. 特别是, 他们证明了: de Brujin 无向图 $UB(2,n)\,(n\geqslant 2)$ 中任何两顶点之间存在两条内点不交且长度不超过 n 的路.

最后介绍一个有关 $B(d,n)$ 中内点不交路长的非常重要的结果. 这个由 Imase, Soneoka, Okada[181] 首先得到, 但这里给出的证明比他们的原始证明简单得多.

定理 7.2.4 设 x 和 y 是 $B(d,n)$ 中任意两个不同的顶点, 那么存在 $d-1$ 条内点不交且长最多为 $n+1$ 的 (x,y) 路. 而且当 $d\geqslant 3$ 时, 最大长是可以达到的.

证明 对 $n\geqslant 1$ 用归纳法. 因为 $B(d,1)=K_d^+$, 所以当 $n=1$ 时结论显然成立. 假定结论对任何 $n\geqslant 2$ 和 $B(d,n-1)$ 中任何两顶点使定理结论成立. 设 x 和 y 是 $B(d,n)$ 中不同两顶点. 因为 $B(d,n)=L(B(d,n-1))$, 所以设 x 和 y 对应于 $B(d,n-1)$ 中两条边分别为 (u,u') 和 (v,v').

如果 $u'\neq v$, 那么由归纳假设, $B(d,n-1)$ 中存在 $d-1$ 条内点不交且长最多为 n 的 (u',v) 路. 因此易得 $B(d,n)$ 中存在 $d-1$ 条内点不交且长最多为 $n+1$ 的 (x,y) 路.

下面假定 $u'=v$, 即 (x,y) 是 $B(d,n)$ 中边. 此时, x 和 y 可以表示成

$$x=x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n,\quad y=x_2x_3\cdots x_ny_1.$$

构造 $d-1$ 条 (x,y) 链 $P_1,P_2,\cdots,P_{d-1}$ 如下:

$$P_1=x_1x_2\cdots x_{n-1}x_ny_1,$$
$$P_j=x_1x_2\cdots x_nu_jx_2x_3\cdots x_ny_1,\ j=2,3,\cdots,d-1,$$

其中 $u_2,\cdots,u_{d-1}$ 是 $\{0,1,\cdots,d-1\}\setminus\{x_1,y_1\}$ 中 $d-2$ 个不同的元素. 显然, P_1 有长 1, 且 P_j 有长 $n+1$, $j=2,3,\cdots,d-1$. 为了证明这些 (x,y) 链是内点不交的, 只需证明 $P_2,P_3,\cdots,P_{d-1}$ 是内点不交的.

(反证) 假定存在 i 和 j $(2\leqslant i\neq j\leqslant d-1)$ 使得 P_i 和 P_j 内部相交. 令 u 是 P_i 和 P_j 的第一个内部交点. 假定子链 $P_i(x,u)$ 有长 a, $P_j(x,u)$ 有长 b. 那么 $2\leqslant a,b\leqslant n-1$. 令 u' 和 u'' 分别是 u 在 P_i 和 P_j 上的内邻点. 则 $u'\neq u''$. 因为沿 P_i 从 x 前进 a 步到达 u, 沿 P_j 从 x 前进 b 步也可以到达 u, 所以 z 可以表示为

$$\begin{aligned}u&=x_{a+1}x_{a+2}\cdots x_nu_ix_2\cdots x_a\\&=x_{b+1}x_{b+2}\cdots x_nu_jx_2\cdots x_b.\end{aligned}$$

从这个表达式得, $x_a=x_b$ (因为 $2\leqslant a,b\leqslant n-1$), 即,

$$u'=x_ax_{a+1}\cdots x_nu_ix_2\cdots x_{a-1}=x_bx_{b+1}\cdots x_nu_jx_2\cdots x_{b-1}=u''.$$

这是一个矛盾. 注意到 $P_2,\cdots,P_{d-1}$ 可能不是路, 但它们必含 (x,y) 路.

最后说明当 $d\geqslant 3$ 时最大长必达到. 考虑 $B(d,n)$ 中两顶点 $x=00\cdots00$ 和 $y=11\cdots11$. 那么从 x 到 y 的距离等于 n. 由定理 7.2.2, 存在唯一的最短 (x,y) 路 P. 因为 $d\geqslant 3$, 所以至少存在一条与 P 内部点不交的 (x,y) 路 P'. 因此, P' 至少有长 $n+1$. ∎

§7.3 广义 de Brujin 网络

从上面的讨论已经知道, de Brujin 网络有许多非常好的结构性质. 然而, de Brujin 网络也有它本身固有的缺点. 其中之一是 de Brujin 网络的结点数目的限制, 即在 d^n 和 d^{n+1} 之间存在一个比较大的间隙. 网络设计者面临结点数目的选择是, 要么太大, 要么太小. 这样不利于网络的扩充, 也就是说, 很难将 de Brujin 网络扩充到任意结点.

在 de Brujin 网络的第三个定义中, 如果用 n 来替代 d^n, 那么就能将 de Brujin 网络扩充到更一般情形. 称这种扩充形式的网络为广义 de Brujin 网络 (generalized de Brujin network), 或者广义 de Brujin 有向图 (generalized de Brujin digraph),

记为$B_G(d,n)$. 更精确地说, 对于给定的$d \geqslant 2$ 和$n \geqslant d$, 广义de Brujin 有向图$B_G(d,n)$ 的顶点集 $V=\{0,1,\cdots,n-1\}$, 边集

$$E=\{(x,y):\ y \equiv xd+\alpha \pmod n),\ \alpha=0,1,\cdots,d-1\}.$$

图 7.4 中所示的有向图是广义de Brujin 有向图$B_G(2,7)$.

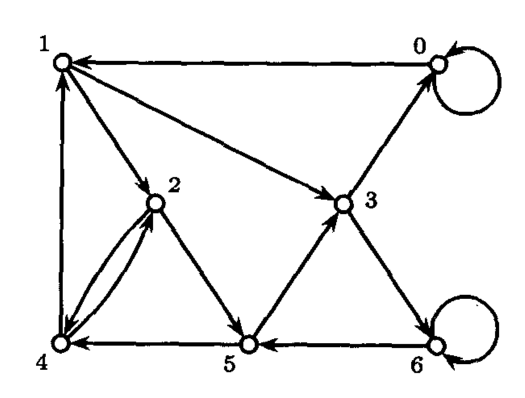


图 7.4 广义de Brujin 有向图$B_G(2,7)$

广义de Brujin 有向图是由Imase 和Itoh[177] 首先提出来的. 许多作者研究过这种图, 并得到一些有用的性质.

定理 7.3.1 对于 $d \geqslant 2$ 和$n \geqslant d$,

(a) $B_G(d,n)$ 是d 正则的, 有环, 且$B_G(d,d^n)=B(d,n)$;

(b) 对于$B_G(d,n)$ 中任何两顶点i 和j, 存在长为 m 的(i,j) 链当且仅当存在m 个整数$x_\ell\,(0 \leqslant x_\ell \leqslant d-1,\ \ell=1,2,\cdots,m)$ 使得

$$j \equiv id^m+x_1d^{m-1}+\cdots+x_{m-1}d+x_m \pmod n;$$

(c) $B_G(d,n)$ 是强连通的.

证明 结论(a) 是显然的. $B_G(d,n)$ 至少有两个环, 一个在顶点0, 另一个在顶点$n-1$. 对$m \geqslant 1$ 用归纳法来证明结论(b). 设i 和j 是$B_G(d,n)$ 的不同两顶点. 由$B_G(d,n)$ 的定义, 有

$$(i,j) \in E \Leftrightarrow j \equiv id+\alpha \pmod n),\ 0 \leqslant \alpha \leqslant d-1.$$

所以, 当$m=1$ 时, 结论成立. 假定$m \geqslant 2$, 且结论 (b) 对$m-1$ 成立. 设P 是长为m 的(i,j) 链. 任取j 在P 上的内邻点j_{m-1}. 由归纳假设, $B_G(d,n)$ 中存在一条长为$m-1$ 的(i,j_{m-1}) 链当且仅当存在$m-1$ 个整数$x_\ell\,(0 \leqslant x_\ell \leqslant d-1,\ \ell=1,2,\cdots,m-1)$ 使得

$$j_{m-1} \equiv id^{m-1}+x_1d^{m-2}+\cdots+x_{m-2}d+x_{m-1} \pmod n). \tag{7.3.1}$$

由 $B_G(d,n)$ 的定义和式 (7.3.1) 得,

$$
\begin{aligned}
(j_{m-1},j)\in E \Leftrightarrow j &\equiv j_{m-1}d+x_m \pmod n\\
&\equiv (id^{m-1}+x_1d^{m-2}\cdots+x_{m-1})d+x_m \pmod n\\
&\equiv id^m+x_1d^{m-1}+\cdots+x_{m-1}d+x_m \pmod n,\\
&\qquad 0\leqslant x_\ell\leqslant d-1,\ \ell=1,2,\cdots,m.
\end{aligned}
$$

(c) 设 (i,j) 是 $B_G(d,n)$ 中有序对. 因为对任何整数 $j\,(0\leqslant j\leqslant n-1)$ 存在整数 m 和 x_ℓ $(0\leqslant x_\ell\leqslant d-1,\ \ell=1,\cdots,m)$ 使得

$$
j\equiv id^m+x_1d^{m-1}+\cdots+x_{m-1}d+x_m \pmod n.
$$

所以由结论 (b), 存在长为 m 的 (i,j) 链. 由有序点对 (i,j) 的任意性知 $B_G(d,n)$ 是强连通的. ∎

下面有关 $B_G(d,n)$ 直径的结果是由 Imase 和 Itoh[177] 首先得到的.

定理 7.3.2 对于 $d\geqslant 2$ 和 $n\geqslant d$, 如果 $B_G(d,n)$ 的直径为 k, 那么 $d^{k-1}<n\leqslant d^k$. 因此, $k=\lceil\log_d n\rceil$.

证明 由定理 7.3.1 (c) 知, $B_G(d,n)$ 是强连通的, 所以 $B_G(d,n)$ 的直径 k 有确定的值. 考虑含环的顶点 0. 对任何 $i\geqslant 1$, 与顶点 0 距离为 i 顶点最多有 $(d-1)d^{i-1}$ 个. 因此,

$$
n\leqslant 1+(d-1)+(d-1)d+\cdots+(d-1)d^{k-1}=d^k.
$$

由定理 7.3.1 (b), 对任何顶点 $B_G(d,n)$ 中任何顶点 j, $j\neq 0$, 存在长为 $m(\leqslant k)$ 的 $(0,j)$ 链当且仅当存在整数 m 和 $x_\ell, 0\leqslant x_\ell\leqslant d-1,\ \ell=1,2,\cdots,m$ 使得

$$
j\equiv x_1d^{m-1}+\cdots+x_{m-1}d+x_m \pmod n. \tag{7.3.2}
$$

换句话说, $B_G(d,n)$ 中任何顶点 j 能表示成式 (7.3.2) 的形式. 因此, $B_G(d,n)$ 的顶点集 V 能表示成

$$
\begin{aligned}
V=\{j:\ j\equiv\ & x_1d^{k-1}+\cdots+x_{k-1}d+x_k \pmod n,\\
& 0\leqslant x_\ell\leqslant d-1, 1\leqslant \ell\leqslant k\}.
\end{aligned}
$$

令 $T^+(0)$ 是根在 0 高为 k 的 $B_G(d,n)$ 中支撑外向树, 则 $|V(T^+(0))|=n\leqslant d^k$. 令

$$
\begin{aligned}
J=\{j:\ j=\ & x_1d^{k-1}+\cdots+x_{k-1}d+x_k,\\
& 0\leqslant x_\ell\leqslant d-1, 1\leqslant \ell\leqslant k\}.
\end{aligned}
$$

则 $|J|=d^k$ 且 $V(T^+(0))\subseteq J$. 如果 $n\leqslant d^{k-1}$, 那么

$$
|J\setminus V(T^+(0))|=d^k-n\geqslant d^{k-1}(d-1)\geqslant n(d-1). \tag{7.3.3}
$$

式 (7.3.3) 说明 $B_G(d,n)$ 的每个顶点 j, 除了 $T^+(0)$ 外, 还至少应该有 $d-1$ 个内邻点. 但这是不可能的, 因为 $B_G(d,n)$ 至少有两个环, 其中一个不在 0 处出现. 因此, $d^{k-1} < n \leqslant d^k$.

因为 $n \leqslant d^k$, 所以 $k \geqslant \log_d n$. 如果 $k > \lceil \log_d n \rceil$, 那么 $k \geqslant 1 + \log_d n$. 这意味着 $n \leqslant d^{k-1}$, 矛盾. 所以 $k = \lceil \log_d n \rceil$. ∎

如果 $B_G(d,n)$ 的直径不小于 4, 则它的连通度是 $d-1$. 这个结论是由 Imase, Soneoka 和 Okada[180] 首先得到的. 为了证明这个结论, 需要一些记号.

设 G 是有向图, x 是 G 的一个顶点. 令

$$\begin{aligned} &J_0^+(x) = \{x\},\ J_i^+(x) = N_G^+(J_{i-1}^+(x)),\ i \geqslant 1; \\ &J_0^-(x) = \{x\},\ J_i^-(x) = N_G^-(J_{i-1}^-(x)),\ i \geqslant 1. \end{aligned} \tag{7.3.4}$$

例如, 对于图 7.4 中所示的有向图 G, 有

$$\begin{aligned} &J_0^+(0) = \{0\},\ J_1^+(0) = \{0,1\},\ J_2^+(0) = \{0,1,2,3\}; \\ &J_0^-(0) = \{0\},\ J_1^-(0) = \{0,3\},\ J_2^-(0) = \{0,3,1,5\}. \end{aligned}$$

注意到, 如果顶点 y 处有环, 且存在某个 i 使得 $J_i^+(x)$ (或者 $J_i^-(x)$) 包含 y, 那么, 对每个 $j = i, i+1, \cdots$, $J_j^+(x)$ (或者 $J_j^-(x)$) 也包含 y.

定理 7.3.3 设 $B_G(d,n)$ 的直径为 k, m 是小于 k 的正整数. 则

$$|J_m^-(i)| = |J_m^+(i)| = d^m, \quad \forall\, i \in V(B_G(d,n)).$$

证明 只证明 $|J_m^-(i)| = d^m$, 另一个等式的证明类似. 由定理 7.3.1 (b), 对任何顶点 $j \in J_m^-(i)$, 存在 m 个整数 x_ℓ $(0 \leqslant x_\ell \leqslant d-1,\ \ell = 1,2,\cdots,m)$ 使得

$$i \equiv jd^m + x_1 d^{m-1} + \cdots + x_{m-1}d + x_m \pmod n.$$

定义函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_m) = i - (x_1 d^{m-1} + \cdots + x_{m-1}d + x_m),$$

其中 $0 \leqslant x_\ell \leqslant d-1$, $\ell = 1,2,\cdots,m$. 因此, $J_m^-(i)$ 能写成

$$\begin{aligned} J_m^-(i) = \{j:\ d^m j \equiv\ & f(x_1, x_2, \cdots, x_m) \pmod n, \\ & 0 \leqslant x_\ell \leqslant d-1, \ell = 1,2,\cdots,m\}. \end{aligned}$$

注意到

$$f(0,0,\cdots,0) = i, \quad f(d-1,d-1,\cdots,d-1) = i - d^m + 1.$$

因为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 的值是 i 与 $i - d^m + 1$ 之间的整数, 所以, 如果 $j \in J_m^-(i)$, 那么 j 满足下列同余方程组中一个方程:

$$\begin{cases} d^m j & \equiv i - d^m + 1 \pmod n \\ d^m j & \equiv i - d^m + 2 \pmod n \\ & \cdots \\ d^m j & \equiv i \pmod n \end{cases} \tag{7.3.5}$$

因为 $m < k$, 所以由定理 7.3.2 得,

$$d^m \leqslant d^{k-1} < n \leqslant d^k.$$

由数论中的结论 “x 的同余方程 $px \equiv q \pmod n$ 有 t 个不同的解当且仅当 q 是 t 的倍数, 其中 $t = \text{g.c.d.}\,(p, n)$ ” (参见华罗庚 [171]). 令

$$t = \text{g.c.d.}(d^m, n), \quad d^m = et.$$

因为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 是取 d^m 个相继值, 且 $d^m < n$, 所以 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 取 et 个值. 这意味着由 (7.3.5) 定义的 d^m 方程组中只有 e 个方程组有解, 而且每个有 t 个不同的解, 其余的方程组无解. 因此,

$$|J_m^-(i)| = et = d^m.$$

用同样的方法可以证明 $|J_m^+(i)| = d^m$. ∎

定理 7.3.4 $B_G(d, n)$ 的连通度是 $d - 1$, 只要它的直径不小于 4.

证明 由定理 7.3.1 (c) 知, $B_G(d, n)$ 的连通度 $\kappa \geqslant 1$. 要证明 $\kappa = d - 1$. 因为 $B_G(d, n)$ 有环, 所以只需证明 $\kappa \geqslant d - 1$.

(反证) 假定 $\kappa \leqslant d - 2$. 则 $B_G(d, n)$ 的顶点集存在划分 $\{X, Z, Y\}$ 使得 $|Z| = \kappa$ 且 $(X, Y) = \emptyset$. 那么, 对于任何顶点 $x \in X$ 和 $y \in Y$, $B_G(d, n)$ 中任何 (x, y) 路必含 Z 中点. 令

$$m = \max\{d(B_G(d, n); x, Z) : \ x \in X\},$$

其中 $d(B_G(d, n); x, Z)$ 表示从 x 到 Z 中任何点的最小距离. 则 $1 \leqslant m \leqslant k - 1$, 其中 k 是 $B_G(d, n)$ 的直径, 且 $k \geqslant 4$. 容易计算出

$$|X| \leqslant \kappa d\, \frac{d^m - 1}{d - 1}, \quad |Y| \leqslant \kappa d\, \frac{d^{k-m} - 1}{d - 1}, \tag{7.3.6}$$

和

$$n \leqslant \kappa \left(d\, \frac{d^m - 1}{d - 1} + 1 + d\, \frac{d^{k-m} - 1}{d - 1} \right). \tag{7.3.7}$$

如果 $3 \leqslant m \leqslant k-3$, 那么由式 (7.3.7), 容易导出矛盾如下:

$$d^{k-1} < n \leqslant (d-2)\left(d\,\frac{d^3-1}{d-1} + 1 + d\,\frac{d^{k-3}-1}{d-1}\right) \leqslant d^{k-1}.$$

因此, 只需考虑 $m = 1, 2, k-1$ 或者 $k-2$ 的情形. 对任何 $x \in X$, 令

$$H_i^+(x) = J_i^+(x) \cap X, \qquad i = 0, 1, \cdots, k.$$

则由定理 7.3.3 知, 对任何 $i = 1, \cdots, k-1$, 有

$$\begin{aligned} |H_{i+1}^+(x)| &= |N^+(J_i^+(x)) \cap X| \geqslant |N^+(H_i^+(x)) \cap X| \\ &\geqslant |N^+(H_i^+(x))| - |Z| \\ &\geqslant |N^+(H_i^+(x))| - (d-2) \\ &= d|H_i^+(x)| - d + 2.(7.3.8) \end{aligned} \tag{7.3.8}$$

如果 $m = 1$, 那么由式 (7.3.6) 得

$$|X| \leqslant \kappa d \leqslant (d-2)d = d^2 - 2d.$$

另一方面, 由式 (7.3.8) 知, 对任何 $x \in X$ 有

$$\begin{aligned} &|H_0^+(x)| = |\{x\}| = 1, \quad |H_1^+(x)| \geqslant d - d + 2 = 2, \\ &|H_2^+(x)| \geqslant 2d - d + 2 = d + 2, \end{aligned}$$

且

$$|H_3^+(x)| \geqslant d(d+2) - d + 2 = d^2 + d + 2. \tag{7.3.9}$$

因为 $H_3^+(x) \subseteq X$, 所以能导出矛盾如下:

$$d^2 + d + 2 \leqslant |H_3^+(x)| \leqslant |X| \leqslant d^2 - 2d.$$

同样地, 如果 $m = k-1$, 也能导出矛盾. 如果 $m = 2$, 那么由式 (7.3.6) 知 $|X| \leqslant d^3 - d^2 - 2d$. 令 $x \in X$ 使得 $d(B_G(d,n); x, Z) = 2$. 由式 (7.3.8) 得

$$\begin{aligned} |H_1^+(x)| &= |J_1^+(x) \cap X| = d, \\ |H_2^+(x)| &\geqslant d|H_1^+(x)| - (d-2) = d^2 - d + 2, \\ |H_3^+(x)| &\geqslant d|H_2^+(x)| - (d-2) \\ &\geqslant d(d^2 - d + 2) - (d-2) = d^3 - d^2 + d + 2. \end{aligned}$$

导出如下矛盾:

$$d^3 - d^2 + d + 2 \leqslant |H_3^+(x)| \leqslant |X| \leqslant d^3 - d^2 - 2d.$$

同样地, 如果 $m = k - 2$, 那么也能导出矛盾. ∎

关于 $B_G(d, n)$ 性质的进一步讨论, 有兴趣的读者可参见 Du 等人 [82, 79] 和 Li, Zhang[218]. 考虑广义 de Brujin 无向图也是很自然的, 但至今没有得到任何结论.

习　　题

7.1 证明定理 7.1.2，即证明：对任何 $d \geqslant 2$ 和 $n \geqslant 1$, 有

(a) $B(d, n)$ 有 d^n 个顶点, d^{n+1} 条边, d 条环, 且 d 正则;

(b) $B(d, n)$ 有连通度 $d - 1$;

(c) $B(d, n)$ 有直径 n.

7.2 比较 de Brujin 网络与超立方体网络.

7.3 $UB(d, n)$ 中边被称为奇异的, 如果它对应 $B(d, n)$ 中对称边. 证明下列结论:

(a) $UB(d, n)$ 中两条奇异边端点之间在 $UB(d, n)$ 中的有向距离等于 $n - 1$ 或者 n.

(b) 设 $e = xy$ 是 $UB(d, n)$ 中奇异边, 且 $n \geqslant 2$, 则 $UB(d, n)$ 中存在 $2d - 1$ 条内点不交的 xy 路使得: 如果 $n \neq 2$, 那么其中一条路长为 1, 其余路长为 3; 如果 $n = 2$, 那么, 其中一条路长为 1, 两条路长为 2, 其余路长为 3.

(c) 设 F 是 $UB(d, n)$ 中包含一条奇异边的边割. 如果 $n \geqslant 2$, 那么 $|F| \geqslant 2d - 1$.

(d) 设 xy 和 uv 是 $UB(d, n)(d \geqslant 2,\ n \geqslant 3)$ 中两条奇异边. 则

$$|N(\{x, y\}) \cap N(\{u, v\})| = \begin{cases} 2 \text{ 或 } 0, & n = 3; \\ 0, & n \geqslant 4. \end{cases}$$

7.4 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $B(d, n)$ 的邻接矩阵, $\boldsymbol{J}$ 是全 1 矩阵.

(a) 证明: $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{J}$.

(b) 求出 $\boldsymbol{A}$ 所有特征值.

第 8 章　Kautz 网络

Kautz 网络是 W. H. Kautz[186] 于 1969 年提出来的, 后来由若干作者重新发现. 与 de Brujin 网络一样, Kautz 网络由于它的优良性质频繁出现在网络文献中. 从结构上看, Kautz 网络与 de Brujin 网络有许多相似之处. 因此, 它具有许多与 de Brujin 网络一样的性质. 但 Kautz 网络还有许多优于 de Brujin 网络的性质. 因此, 与 de Brujin 网络一样, Kautz 网络也被看成是下一代候选网络结构之一.

Kautz 网络的拓扑结构称为 Kautz 有向图. 这一章将详细介绍 Kautz 有向图的基本性质和相关的研究结果.

§8.1　Kautz 网络的定义和基本性质

对于两个给定整数 d ($\geqslant 2$) 和 n ($\geqslant 1$), Kautz 有向图, 记为 $K(d,n)$, 通常有以下三个等价定义.

1. 利用长为 n 的 $(d+1)$ 元序列定义

$K(d,n)$ 的顶点集

$$V=\{x_1x_2\cdots x_n:\ x_i\in\{0,1,\cdots,d\}, x_i\neq x_{i+1}, i=1,2,\cdots,n-1\},$$

它的边集 E 是从顶点 $x_1x_2\cdots x_n$ 到 d 另外顶点 $x_2x_3\cdots x_n\alpha$ 的所有边, 其中 $\alpha\in\{0,1,\cdots,d\}$, 且 $\alpha\neq x_n$.

2. 利用线图的定义

例 2.4.2 已定义 $K(d,n)$ 为完全有向图 K_{d+1} 的 $(n-1)$ 重线图. 精确地说, Kautz 有向图 $K(d,n)$ 能递归地定义如下:

$$K(d,1)=K_{d+1};\quad K(d,n)=L^{n-1}(K_{d+1}),\quad n\geqslant 2.$$

3. 利用代数方法的定义

Kautz 有向图 $K(d,n)$ 的顶点集 $V=\{0,1,\cdots,d^n+d^{n-1}-1\}$, 边集

$$E=\{(x,y):\ y\equiv-(xd+\alpha)\ (\mathrm{mod}\ d^n+d^{n-1}),\ \alpha=1,\cdots,d\}.$$

三个小阶 Kautz 有向图 $K(2,1),K(2,2)$ 和 $K(2,3)$ 如图 2.3 和图 8.1 中所示, 其中图 2.3 中所示的有向图是由前两个定义得到的, 图 8.1 中所示的有向图是由第三个定义得到的.

Kautz 有向图的第一个定义的原始定义, 由 Kautz[186] 首先提出; 第二个定义是由 Fiol, Yebra 和 Alergre[115] 给出; 第三个定义是由 Imase 和 Itoh[178] 给出. Kautz

有向图 $K(d,n)$ 的这三个定义是等价的, 它的证明类似于定理 7.1.1, 详细的证明留给读者.

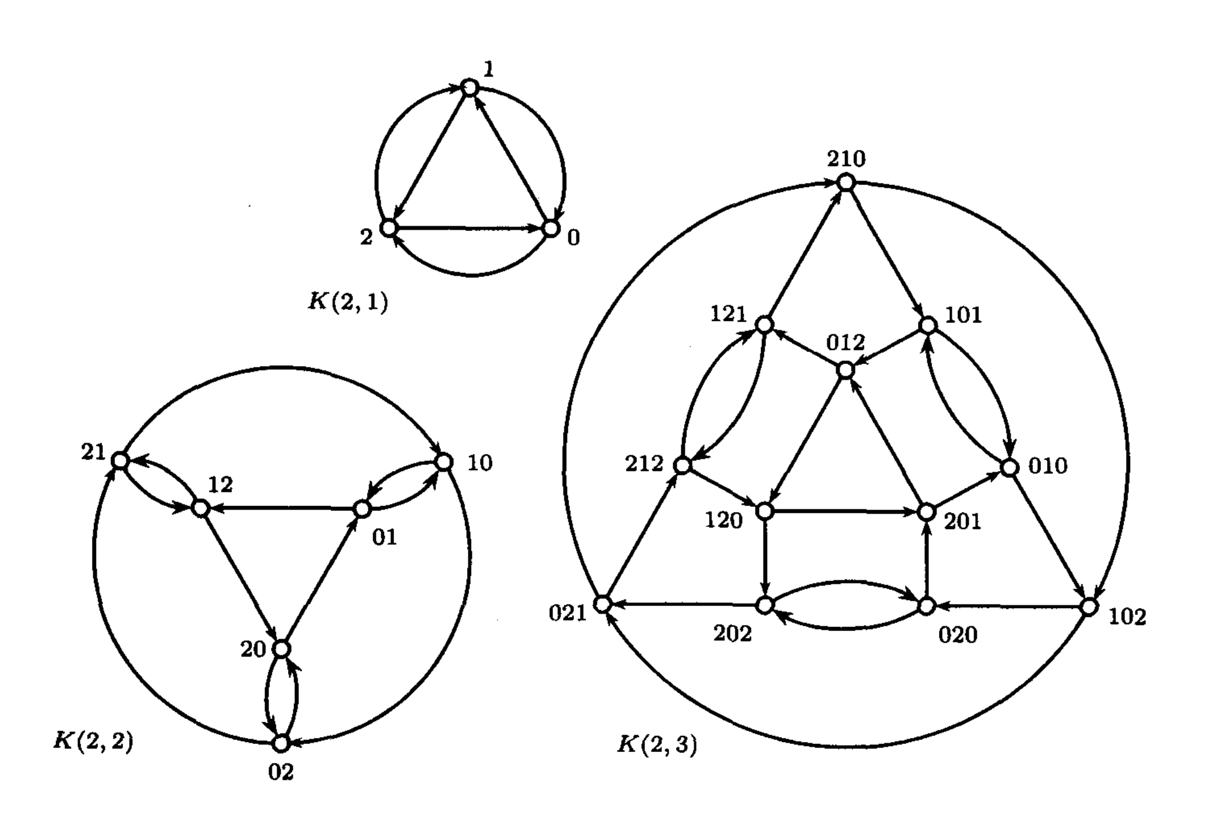


图 8.1 Kautz 有向图 $K(2,1), K(2,2)$ 和 $K(2,3)$

定理 8.1.1 Kautz 有向图 $K(d,n)$ 的三个定义是等价的, 即由这三个定义得到的有向图是同构的. ∎

由 Kautz 有向图和线图的性质, 我们罗列 Kautz 有向图 $K(d,n)$ 的下列基本性质, 详细证明留给读者.

定理 8.1.2 对于 $d \geqslant 2$ 和 $n \geqslant 1$,

(a) $K(d,n)$ 是 d 正则的, 有 $d^n + d^{n-1}$ 个顶点和 $d^{n+1} + d^n$ 条边;

(b) $K(d,n)$ 有连通度 d;

(c) $K(d,n)$ 有直径 n;

(d) $K(d,n)$ 含 Euler 回和 Hamilton 圈;

(e) $K(d,n)$ 有完备匹配只要 $n \geqslant 2$. ∎

设 $x = x_1x_2\cdots x_n$ 和 $y = y_1y_2\cdots y_n$ 是 $K(d,n)$ 的两个顶点. 由 $K(d,n)$ 的第一个定义, 对 $y_1 \neq x_n$, 记号

$$P = x_1x_2\cdots x_ny_1y_2\cdots y_n \tag{8.1.1}$$

表示 $K(d,n)$ 中长为 n 的 (x,y) 链

$$P:\ x = x_1x_2\cdots x_n \to x_2x_3\cdots x_ny_1 \to x_3\cdots x_ny_1y_2$$
$$\to \cdots \to x_ny_1\cdots y_{n-1} \to y_1y_2\cdots y_n = y;$$

且对 $y_1 = x_n$, 记号

$$P = x_1x_2\cdots x_{n-1}y_1y_2\cdots y_n \tag{8.1.2}$$

表示 $K(d,n)$ 中长为 $n-1$ 的 (x,y) 链

$$P:\ x = x_1x_2\cdots x_n \to x_2x_3\cdots x_{n-1}y_1y_2 \to x_3\cdots x_{n-1}y_1y_2y_3$$
$$\to \cdots \to x_{n-1}y_1\cdots y_{n-1} \to y_1y_2\cdots y_n = y.$$

注意, 由式 (8.1.1) 或者式 (8.1.2) 定义的 (x,y) 链 P 是 $K(d,n)$ 中唯一的长为 n 或者 $n-1$ 的 (x,y) 链. 因此, 立即得到下面的结果.

定理 8.1.3 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $K(d,n)$ 的邻接矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^n + \boldsymbol{A}^{n-1} = \boldsymbol{J}$, 其中 $\boldsymbol{J}$ 是全 1 方阵. ∎

现在讨论 $K(d,n)$ 的最短路性质.

设 $x = x_1x_2\cdots x_n$ 和 $y = y_1y_2\cdots y_n$ 是 $K(d,n)$ 中不同两个顶点. 与 de Brujin 有向图一样, 记号 $\ell(x,y)$ 表示 x 的尾部与 y 首部重叠数字的最大个数. 一个类似于 $B(d,n)$ 的结果叙述如下, 其证明留给读者.

定理 8.1.4 设 $\ell\,(1 \leqslant \ell \leqslant n)$ 是整数, x 和 y 是 $K(d,n)$ 中两顶点. 则从 x 到 y 的距离是 $n-\ell$ 当且仅当 $\ell = \ell(x,y)$ 且 $K(d,n)$ 中存在唯一最短 (x,y) 路. ∎

从定理 8.1.2 知 $K(d,n)$ 的连通度是 d. 由 Menger 定理知, 对于 $K(d,n)$ 中任何两顶点 x 和 y, 存在 d 条内点不交的 (x,y) 路. Imase, Soneoka 和 Okada[181] 证明在这 d 条内点不交路中, 一条路长至多为 n, $d-3$ 条路至多为 $n+1$, 其余两条路长至多为 $n+2$. Reddy 等人 [268] 证明了在这 d 条内点不交的路中, $d-1$ 条路长至多为 $n+1$, 其余一条路长至多为 $n+2$. 还有一些作者, 如 Bermond 等人 [28], 也研究过 $K(d,n)$ 中的路长问题. 我们叙述一个结果, 它属于 Du, Hsu 和 Lyuu[81]. 其证明留给读者.

定理 8.1.5 设 x 和 y 是 $K(d,n)$ 中两顶点. 则存在 d 条内点不交的 (x,y) 路, 其中一条路长至多为 n, $d-2$ 条路长至多为 $n+1$, 其余一条路长至多为 $n+2$; 而且路长 $n+2$ 是可以达到的只要 $d \geqslant 2$. ∎

Kautz 无向图, 记为 $UK(d,n)$, 是由 $K(d,n)$ 通过去掉所有边的方向, 然后去掉平行边和环得到的无向图. Kautz 无向图 $UK(d,n)$ 的结构性质是由 Kumar 和 Reddy[197] 首先研究的. 我们叙述下列结果, 但略去它的证明.

定理 8.1.6 对 $d \geqslant 2$ 和 $n \geqslant 1$, Kautz 无向图 $UK(d,n)$ 有下列性质.

(a) $UK(d,n)$ 有最大度 $\Delta = 2d$ 和最小度 $\delta = 2d-1$;

(b) $UK(d,n)$ 有直径 n;

(c) $UK(d,n)$ 有连通度 $2d-1$. ∎

结论 (a) 和 (b) 显然成立. 结论 (c) 属于 Bermond, Homobono 和 Peyrat[29].

§8.2 广义 Kautz 网络

与 de Brujin 有向图一样, 也能容易推广 Kautz 有向图到更一般的顶点数目. 广义Kautz 有向图, 记为 $K_G(d,n)$, $d\geqslant 2$, 它的顶点集 $V=\{0,1,\cdots,n-1\}$, 边集

$$E=\{(i,j):\ j\equiv -(id+\alpha)\ (\mathrm{mod}\ n),\ \alpha=1,\cdots,d\}. \tag{8.2.1}$$

图 8.2 中所示的有向图是广义 Kautz 有向图 $K_G(2,7)$ 和 $K_G(2,9)$.

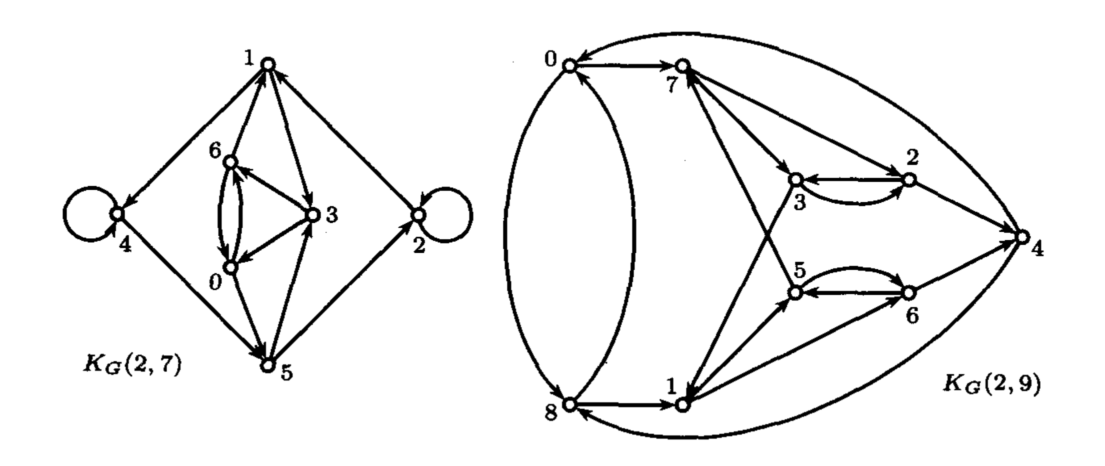


图 8.2 广义 Kautz 有向图 $K_G(2,7)$ 和 $K_G(2,9)$

广义 Kautz 有向图是由 Imase 和 Itoh[178] 首先提出来的. 有些作者为了某些叙述上的方便, 记 $K_G(d,n)$ 的边集

$$E=\{(i,j):\ j\equiv (d(n-1-i)+\beta)\ (\mathrm{mod}\ n),\ \beta=0,1,\cdots,d-1\}. \tag{8.2.2}$$

事实上, $K_G(d,n)$ 边集的这两个定义是一样的. 为看到这一点, 令 $\beta=d-\alpha$, 则

$$\alpha=1,2,\cdots,d \Leftrightarrow \beta=0,1,\cdots,d-1.$$

将 $\beta=d-\alpha$ 代入式 (8.2.2) 便得到

$$\begin{aligned} j &\equiv (d(n-1-i)+\beta)\ (\mathrm{mod}\ n)\\ &\equiv -(d+di-\beta)\ (\mathrm{mod}\ n)\\ &\equiv -(d+di-d+\alpha)\ (\mathrm{mod}\ n)\\ &\equiv -(id+\alpha)\ (\mathrm{mod}\ n). \end{aligned}$$

这就是式 (8.2.1). 同样地, 将 $\alpha = d - \beta$ 代入式 (8.2.1) 便得到式 (8.2.2).

定理 8.2.1 对于 $d \geqslant 2$ 和 $n \geqslant d$,

(a) $K_G(d,n)$ 是 d 正则的, 且 $K_G(d, d^n + d^{n-1}) = K(d,n)$;

(b) $K_G(d,n)$ 不含环当且仅当 n 能被 $(d+1)$ 整除;

(c) 对 $K_G(d,n)$ 中任何两顶点 i 和 j, $K_G(d,n)$ 中含 (i,j) 链当且仅当存在 m 个整数 $x_\ell, 1 \leqslant x_\ell \leqslant d,\ \ell = 1,2,\cdots,m$ 使得

$$j \equiv i(-d)^m + x_1(-d)^{m-1} + \cdots + x_{m-1}(-d) + x_m \pmod{n};$$

(d) $K_G(d,n)$ 是强连通的;

(e) 如果 n 能被 d 整除, 那么 $K_G(d,n) \cong L(K_G(d, \frac{n}{d}))$.

证明 结论 (a) 是显然的. 结论 (c) 和 (d) 的证明类似于定理 7.3.1 (b) 和 (c) 的证明, 详细的证明留给读者. 这里证明结论 (b) 和 (e).

(b) 由 $K_G(d,n)$ 的定义, $K_G(d,n)$ 中顶点 i 处有环当且仅当

$$i \equiv -(id + \alpha) \pmod{n},\ 1 \leqslant \alpha \leqslant d,$$

即当且仅当存在整数 p 使得关于 i 的方程

$$(d+1)i = pn - \alpha \tag{8.2.3}$$

有整数解.

如果 n 能被 $d+1$ 整除, 那么 pn 能被 $d+1$ 整除. 由于 α 不能被 $d+1$ 整除, 所以方程 (8.2.3) 无整数解. 这说明 $K_G(d,n)$ 不含环.

反之, 设 $K_G(d,n)$ 不含环. (反证) 假定 n 不能被 $d+1$ 整除. 那么存在整数 x 和 y $(1 \leqslant y \leqslant d)$ 使得 $n = x(d+1) + y$. 当 $p = 1$ 且 $\alpha = y$ 时, 方程 (8.2.3) 有整数解 x. 这意味着 $K_G(d,n)$ 中顶点 x 有环, 矛盾.

(e) 设 $m = \frac{n}{d}$, (x,y) 是 $K_G(d,m)$ 中边. 则 (x,y) 是 $L(K_G(d,m))$ 的顶点. 因此, 存在整数 k 使得

$$y = km - (xd + \alpha_y), \quad 1 \leqslant \alpha_y \leqslant d.$$

定义映射

$$\begin{aligned} \phi: \quad V(L(K_G(d,m))) &\to V(K_G(d,n)) \\ (x,y) &\mapsto xd + \alpha_y - 1, \quad (1 \leqslant \alpha_y \leqslant d) \end{aligned}$$

容易验证映射 ϕ 是双射. 为证明 ϕ 是 $L(K_G(d,m))$ 和 $K_G(d,n)$ 之间的同构, 只需证明 ϕ 保相邻性.

设 $((x,y),(y,z))$ 是 $L(K_G(d,m))$ 的边. 则

$$\phi((x,y)) = xd + \alpha_y - 1,\ \phi(y,z) = yd + \alpha_z - 1, \quad 1 \leqslant \alpha_y, \alpha_z \leqslant d.$$

因此,

$$\begin{aligned}\phi((y,z)) &= yd+\alpha_z-1=(km-xd-\alpha_y)d+\alpha_z-1\\ &\equiv -((xd+\alpha_y-1)d+(d+1-\alpha_z)) \pmod n\\ &\equiv -(\phi((x,y))d+(d+1-\alpha_z)) \pmod n,\\ &1\leqslant d+1-\alpha_z\leqslant d.\end{aligned}$$

由 $K_G(d,n)$ 的定义, 这意味着 $(\phi((x,y)),\phi((y,z)))\in E(K_G(d,n))$. 同样可以证明另一方面也成立. ∎

最后叙述关于 $K_G(d,n)$ 直径的结果, 属于 Imase 和 Itoh[178]. 证明留给读者.

定理 8.2.2 对 $d\geqslant 2$ 和 $n\geqslant d$, $K_G(d,n)$ 的直径

$$k=\begin{cases}\lceil\log_d n\rceil-1=p, & \text{如果 } n=d^p+d^{p-q},\ q \text{ 是奇数且 } q\leqslant p;\\ \lceil\log_d n\rceil, & \text{其他.}\end{cases}$$

§8.3 广义 Kautz 网络的连通度

这一节讨论 $K_G(d,n)$ 的连通度. 下面关于 $K_G(d,n)$ 边连通度的结果属于 Du 和 Hwang[82], 其证明留给读者.

定理 8.3.1 $K_G(d,n)$ 的边连通度为 d 如果 $d+1|n$. ∎

利用证明定理 7.3.3 和定理 7.3.4 一样的方法, 能证明下面两个结果, 它们属于 Imase, Soneoka 和 Okada[180].

定理 8.3.2 设 i 是 $K_G(d,n)$ 中任意顶点, k 是 $K_G(d,n)$ 的直径, m 是一个小于 k 的正整数. 则

$$|J_m^+(i)|=|J_m^-(i)|=d^m,$$

其中 $J_m^+(i)$ 和 $J_m^-(i)$ 在式 (7.3.4) 中有定义. ∎

定理 8.3.3 $K_G(d,n)$ 的连通度至少为 $d-1$ 如果 $K_G(d,n)$ 的直径不小于 4. ∎

定理 8.3.4 如果 $K_G(d,n)$ 的直径不小于 4 且 g.c.d. $(d,n)=1$, 那么 $K_G(d,n)$ 的连通度为 $d-1$.

证明 由定理 8.3.3, 只需证明 $\kappa\leqslant d-1$. 如果 $n=d+1$, 那么 $K_G(d,d+1)$ 是 d 阶完全有向图, 所以它的连通度为 $d-1$. 下面假定 $n>d+1$.

由 $K_G(d,n)$ 的定义, 易知对 $K_G(d,n)$ 的任何顶点 x, 存在整数 i 使得集

$$J_1^+(x)=\{i,i+1,\cdots,i+d-1 \pmod n\}.$$

也易知, 在顶点 0 和 $n-1$ 之间存在对称边.

如果 g.c.d. $(d,n)=1$, 那么对 $x\neq y$ 有 $J_1^+(x)\neq J_1^+(y)$. 这意味着恰存在 $d-1$ 个顶点 $x_1,x_2,\cdots,x_{d-1}$ 使得对每个 $i=1,2,\cdots,d-1$. 顶点 0 和 $n-1$ 都出现

在 $J_1^+(x_i)$ 中. 因此, 由于 $n > d+1$, 所以 $\{x_1, x_2, \cdots, x_{d-1}\}$ 是顶点分离集. 这说明 $\kappa \leqslant d-1$. ∎

定理 8.3.5 如果 n 能被 d 和 $d+1$ 整除, 那么 $K_G(d,n)$ 的连通度为 d.

证明 因为 n 能被 $d+1$ 整除, 所以由定理 8.2.1 (b) 知, $K_G(d,n)$ 不含环. 又因为 n 能被 d 整除, 所以有定理 8.2.1 (e) 知, $K_G(d,n) \cong L(K_G(d,\frac{n}{d}))$. 由定理 2.2.2 和定理 8.3.1 得 $\kappa = d$. ∎

定理 8.3.6 如果 $K_G(d,n)$ 的直径大于 4, 那么 $\kappa = d$ 当且仅当 g.c.d. $(d,n) \geqslant 2$ 且 n 能被 $d+1$ 整除.

证明 设 $\kappa = d$. 则 $n \geqslant d+1$. 显然, $K_G(d,n)$ 不含环. 所以由定理 8.2.1 (b) 知, n 能被 $d+1$ 整除. (反证) 如果 g.c.d. $(d,n) = 1$, 那么由定理 8.3.4 知, $\kappa = d-1$, 矛盾. 因此, g.c.d. $(d,n) \geqslant 2$.

反之, 设 $K_G(d,n)$ 的直径至少为 5 且 g.c.d. $(d,n) \geqslant 2$. 只需证明 $\kappa = d$. (反证) 假定 $\kappa < d$, 则能导出矛盾.

由定理 8.3.3 知 $\kappa \geqslant d-1$. 所以存在 $V(K_G(d,n))$ 的划分 $\{X,U,Y\}$ 使得 $|U| = \kappa = d-1$ 且 $(X,Y) = \emptyset$. 令

$$p = \max\{d(x,U) : x \in X\}, \quad q = \max\{d(U,y) : y \in Y\}. \tag{8.3.1}$$

利用定理 2.3.1 证明中一样的方法, 能得到

$$\begin{aligned} |X| \leqslant d^{p+1} - d, \qquad |Y| \leqslant d^{k-p+1} - d, \\ n \leqslant d^{p+1} + d^{k-p+1} - d - 1. \end{aligned} \tag{8.3.2}$$

因为函数 $f(p) = d^{p+1} + d^{k-p+1}$ 在区间 $[3, k-3]$ 是上凸的, 所以,

$$f(p) \leqslant f(3) = f(k-3) = d^4 + d^{k-2}. \tag{8.3.3}$$

如果 $3 \leqslant p \leqslant k-3$, 那么 $k \geqslant 6$. 由式 (8.3.2) 和式 (8.3.3), 得如下矛盾:

$$d^{k-1} < n \leqslant f(p) - d - 1 \leqslant d^{k-2} + d^4 - d - 1 < d^{k-1}.$$

因此, 只需考虑 $p = 1$ 或者 $p = k-1$, $p = 2$ 或者 $p = k-2$ 的情形. 注意到, 由式 (8.3.1), 当 $p = k-1$ 时有 $q \leqslant 1$; 当 $p = k-2$ 有 $q \leqslant 2$. 由 p 和 q 在所讨论问题中关系的对称性, 只需考虑 $p = 1$ 和 $p = 2$ 两种情形.

设 $x \in X$. 由定理 8.3.2, 容易得到

$$|J_i^+(x) \cap X| \geqslant d|J_{i-1}^+(x) \cap X| - |U|, \ 2 \leqslant i < k. \tag{8.3.4}$$

当 $p = 2$ 时, 存在顶点 $x \in X$ 使得 $d(x,U) = 2$. 所以 $|J_1^+(x) \cap X| = d$. 由式 (8.3.4) 和 $k \geqslant 5$ 得,

$$|J_2^+(x) \cap X| \geqslant d^2 - d + 1, \quad |J_3^+(x) \cap X| \geqslant d^3 - d^2 + 1,$$

和

$$|J_4^+(x) \cap X| \geqslant d^4 - d^3 + 1. \tag{8.3.5}$$

由式 (8.3.2) 和式 (8.3.5), 导出如下矛盾:

$$d^4 - d^3 + 1 \leqslant |J_4^+(x) \cap X| \leqslant d^3 - d.$$

当 $p = 1$ 时, 证明用到假设 g.c.d. $(d,n) = m \geqslant 2$. 令 $n = sm$ 和 $d = \ell m$. 则 $K_G(d,n)$ 的顶点集 V 有划分 $\{V_0, V_1, \cdots, V_{s-1}\}$, 其中

$$V_i = \{im, im+1, \cdots, im+(m-1)\},\ i = 0, 1, \cdots, s-1.$$

由 $K_G(d,n)$ 的边集 E 的定义 (8.2.2) 知, 对 $K_G(d,n)$ 的任何顶点 x, 它的外邻集是

$$\begin{aligned}
&d(n-1-x)+q \pmod n, \quad 0 \leqslant q \leqslant d-1 \\
&\equiv \ell m(sm-1-x)+tm+\alpha \pmod s, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant m-1, 0 \leqslant t \leqslant \ell-1 \\
&\equiv (\ell(sm-1-x)+t) \pmod s)m+\alpha, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant m-1, 0 \leqslant t \leqslant \ell-1.
\end{aligned}$$

这意味着 $J_1^+(x)$ 是 $\{V_0, V_1, \cdots, V_{s-1}\}$ 中 ℓ 个相继元素 $V_{i+1}, V_{i+2}, \cdots, V_{i+\ell}$ 的并, 其中下标是模 s 的, 且 $|V_i| \geqslant 2$ (因为 $m \geqslant 2$).

假定 V_i 中存在两顶点 x 和 y 使得 x 和 y 在 $K_G(d,n)$ 中相邻. 则从上面的论述知 $V_i \subset J_1^+(x)$ (因为 $y \in V_i$). 因此, 顶点 x 处存在环 (因为 $x \in V_i$), 这矛盾于假定. 因此, V_i 中任何两顶点都不相邻.

因为 $d = \ell m$ 且 $|U| = d-1 = \ell m - 1$, 所以存在子集 V_i 使得 $V_i \cap X \neq \emptyset$, $V_i \cap U \neq \emptyset$. 令 $x \in V_i \cap U$, $u \in V_i \cap U$. 则 x 和 u 在 $K_G(d,n)$ 中不相邻. 因此, $J_1^+(x)$ 中至少存在两个顶点不在 U 中. 换句话说, $|J_1^+(x) \cap X| \geqslant 2$. 于是, 由式 (8.3.4), 对于 $k \geqslant 4$, 有

$$|J_2^+(x) \cap X| \geqslant 2d - (d-1) = d+1,$$

和

$$|J_3^+(x) \cap X| \geqslant d(d+1) - (d-1) = d^2 + 1. \tag{8.3.6}$$

由式 (8.3.6) 和式 (8.3.2) 得如下矛盾:

$$d^2 + 1 \leqslant |J_3^+(x) \cap X| \leqslant |X| \leqslant d^2 - d.$$

定理得证. ∎

定理 8.3.4 和定理 8.3.5 属于 Du 和 Hwang[82]. 他们还讨论了 $K_G(d,n)$ 的其他结构性质, 如 Hamilton 性, 嵌入问题等. 定理 8.3.6 中 $\kappa = d$ 的充分条件由 Homobono 和 Peyrat[162] 给出; 这里给出的证明属于徐俊明 [319]. 注意到, 定理 8.3.3 和定理 8.3.6 成立的条件分别是 $K_G(d,n)$ 的直径不小 4 和 5. 当没有这个限制时, 目前还没有任何结果.

习 题

8.1 证明定理8.1.1, 即证明: 由Kautz 有向图$K(d,n)$ 的三个定义得到的有向图是同构的.

8.2 证明定理8.1.2, 即证明: 对于$d \geqslant 2$ 和$n \geqslant 1$,

(a) $K(d,n)$ 是d 正则的, 有$d^n + d^{n-1}$ 个顶点和$d^{n+1} + d^n$ 条边;

(b) $K(d,n)$ 有连通度d;

(c) $K(d,n)$ 有直径n;

(d) $K(d,n)$ 含 Euler 回和 Hamilton 圈;

(e) $K(d,n)$ 有完备匹配只要$n \geqslant 2$.

8.3 证明定理8.1.3, 即证明: 设A 是$K(d,n)$ 的邻接矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^n + \boldsymbol{A}^{n-1} = \boldsymbol{J}$, 其中$\boldsymbol{J}$是全 1 方阵.

8.4 证明定理8.1.4, 即证明: 设$\ell\,(1 \leqslant \ell \leqslant n)$ 是整数, x 和y 是$K(d,n)$ 中两顶点. 则从x 到y 的距离是$n-\ell$ 当且仅当$\ell = \ell(x,y)$ 且$K(d,n)$ 中存在唯一最短(x,y) 路.

8.5 证明定理8.1.5, 即证明: 设x 和y 是$K(d,n)$ 中两顶点. 则存在d 条内点不交的(x,y) 路, 其中一条路长至多为n, $d-2$ 条路长至多为$n+1$, 其余一条路长至多为$n+2$; 而且路长$n+2$ 是可以达到的只要$d \geqslant 2$.

8.6 查找有关文献, 给出下列定理的证明.

(a) 定理8.2.2: 对$d \geqslant 2$ 和$n \geqslant d$, $K_G(d,n)$ 的直径

$$k = \begin{cases} \lceil \log_d n \rceil - 1 = p, & \text{如果 } n = d^p + d^{p-q},\ q \text{ 是奇数且 } q \leqslant p; \\ \lceil \log_d n \rceil, & \text{其他}. \end{cases}$$

(b) 定理8.3.1: $K_G(d,n)$ 的边连通度为d 如果$d+1|n$.

(c) 定理8.3.2: 设i 是 $K_G(d,n)$ 中任意顶点, k 是 $K_G(d,n)$ 的直径, m 是一个小于k 的正整数. 则

$$|J_m^+(i)| = |J_m^-(i)| = d^m.$$

(d) 定理8.3.3: $K_G(d,n)$ 的连通度至少为$d-1$ 如果$K_G(d,n)$ 的直径不小于4.

8.7 比较Kautz 网络与de Brujin 网络和超立方体网络

第 9 章 双环网络

双环网络是单环网络的自然推广. 它具有对称性, 结构简单性和容易扩充性. 因此, 双环网络被广泛用于分布式处理系统, 局部网, 单指令多数据处理机中的数据存储分配和数据调整的拓扑结构设计. 自然的问题是: 对于结点数目给定, 怎样选择双环网络使得它的直径尽可能的小. 这一章介绍解决这个问题的几何方法. 作为这个方法的应用, 将构造几类最优双环网络的无限族. 最后介绍双环网络的一般推广形式: 循环网络和它的基本性质.

这一章总假定 n 是大于 4 的整数, Z 是非负整数集.

§9.1 双环网络

单环网络 (简称单环网) 的拓扑结构是有向圈 C_n, 它的顶点集 $V=\{0,1,\cdots,n-1\}$, 边集

$$E=\{(i,j):j-i\equiv 1 \pmod n\}.$$

单环网有某些固有的缺点. 最大的缺点是它的可靠性差, 这是因为单环网中任何一个结点或者连线发生故障就会导致网络不连通. 由于单环网的直径是 $n-1$, 所以某个信息从它的源到它的目的地几乎要通过网络中所有的结点, 因此有大的传输延迟. 又因为单环网络中任何两个结点之间的路是唯一的, 所以多个信息要同时经过同一条连线, 造成信息阻塞. 因此, 单环网的性能很差.

许多作者提出改进单环网的方法. 一个基本的想法是增加一倍的连线使得每个结点有两条连出去的连线. 这样得到的网络称为双环网络, 简称**双环网** (double loop network). 双环网不但提高可靠性, 而且直径和平均距离也大大减少了. 文献中许多作者提出一些具体的双环网络.

Liu[224] 提出一个称为**分布式双环计算机网络** (distributed double loop computer network), 它的边集

$$E=\{(i,j):j-i\equiv 1,n-1 \pmod n\}.$$

该网络有连通度 2, 直径和平均距离分别为 $\lfloor\frac{1}{2}n\rfloor$ 和 $\frac{1}{4}n$.

Grnarov 等人 [131] 提出一个称为**菊花链环网络** (daisy chain loop network), 它的边集

$$E=\{(i,j):j-i\equiv 1,n-2 \pmod n\}.$$

该网络有连通度 2, 它的直径和平均距离分别为 $\lfloor\frac{1}{3}n\rfloor$ 和 $\frac{1}{6}n$.

Raghavendra 等人 [267] 推广了上述结构, 提出一个称为前环后跳网 (forward loop backward hoop network), 它的边集

$$E = \{(i,j) : j - i \equiv 1, n - s \pmod{n}\},$$

其中 s 的确定是使得该网络有最小的直径和平均距离. 该网络有连通度 2. 直径和平均距离分别为 $\lfloor \frac{1}{3}n \rfloor$ 和 $\frac{1}{6}n$.

Fiol 等人 [116] 考虑更一般的结构, 称为一般双环网 (general double loop network), 记为 $G(n;r,s)$, 它的边集

$$E = \{(i,j) : j - i \equiv r, s \pmod{n}\},$$

其中 r 和 s $(1 \leqslant r < s < n)$ 的选择是使得该网络有最小的直径或者平均距离.

显然, $G(n;1,n-1)$ 是分布式双环计算机网络; $G(n;1,n-2)$ 是菊花链环网; $G(n;1,n-s)$ 是前环后跳网.

有向图 $G(n;r,s)$ 是定义在 3.1 节的例 1 中循环有向图 $G(n;S)$ 当 $S = \{r,s\}$ 时的特殊情形. 它是点可迁有向图, 也是模 n 剩余类加法群 Z_n 关于 S 的 Cayley 图 $C_{Z_n}(S)$. 因此, 由定理 3.5.1, $G(n;r,s)$ 是强连通的当且仅当 $\text{g.c.d.}(n,r,s) = 1$. 特别地, 由定理 3.4.4 (b) 知, $G(n;1,s)$ 有最大的连通度 2.

这一章关心的问题是: 对给定的 n, 怎样选择整数 r 和 s $(1 \leqslant r < s < n$ 且 $\text{g.c.d.}(n,r,s) = 1)$ 使得 $G(n;r,s)$ 的直径最小?

对于这个问题, 许多作者提出了不同的研究方法, 其中包括代数方法和几何方法. 这里, 我们更感兴趣的是几何方法. 这种方法是建立在平面 L 瓦概念的基础上.

§9.2 平面 L 形瓦

由 n 个单位方块构成的面积为 n 的形如图 9.1 所示的平面几何图形称为 *L 形* (L-pattern), 记为 $L(n;\ell,h,x,y)$, 其中 4 个参数 $\ell,h,x,y \in Z$ 满足下列条件:

$$\ell, h \geqslant 2,\ 0 \leqslant x < \ell,\ 1 \leqslant y < h. \tag{9.2.1}$$

L 形 $L(n;\ell,h,x,y)$ 被称为 *L 形瓦* (L-shaped tile), 简称 *L 瓦* (L-tile), 如果它们满足下列条件之一:

$$x \leqslant h, y < \ell \quad \text{或} \quad x < h, y \leqslant \ell. \tag{9.2.2}$$

两个 L 瓦 $L(n;\ell,h,x,y)$ 和 $L(n;a,b,c,d)$ 称为是一样的, 如果 $a = \ell,\ b = h, c = x,\ d = y$. L 瓦 $L(n;\ell',h',x',y')$ 是 L 瓦 $L(n;\ell,h,x,y)$ 的转置, 如果 $\ell' = h,\ h' = \ell,\ x' = y,\ y' = x$.

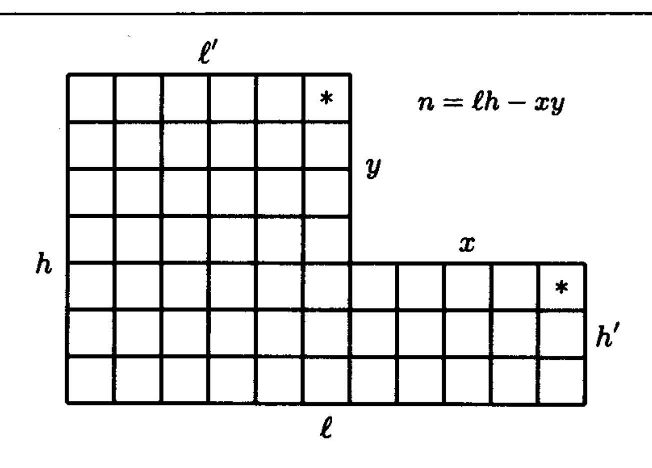


图 9.1 L 瓦 $L(n;\ell,h,x,y)$

从L 瓦 $L(n;\ell,h,x,y)$ 的左下角的方块开始, 沿着水平和 (或) 垂直方向能到达该L 瓦中任何一个方块. 图 9.1 中标有“*”的两个方块中, 至少有一个是最远的, 它们分别要经过 $h+\ell-x-2$ 和 $\ell+h-y-2$ 个方块. 参数

$$D(L(n;\ell,h,x,y)) = \max\{h+\ell-x-2,\ \ell+h-y-2\}.$$

称为L 瓦 $L(n;\ell,h,x,y)$ 的直径. 记号 $D(n)$ 表示所有面积为 n 的L 瓦的最小直径. 面积为 n 的L 瓦 L 称为**最优的** (optimal), 如果 $D(L)=D(n)$.

人们的兴趣是: 对于给定的 n, 确定 $D(n)$ 的值. 许多作者给出了 $D(n)$ 的下界. 下面的定理属于李乔, 徐俊明和张忠良 [211].

定理 9.2.1 设 $L = L(n;\ell,h,x,y)$ 是L 瓦, $n \geqslant 4$.

(a) $D(L) = h+\ell-x-2 \Leftrightarrow y-x \geqslant 0$, 或者

$D(L) = \ell+h-y-2 \Leftrightarrow x-y \geqslant 0$.

(b) 如果 $x=0$, 那么 $D(L) \geqslant 2\sqrt{n}-2$.

(c) 如果 $x>0$, 那么 $|y-x| < \sqrt{n}$ 且

$$D(L) \geqslant \left\lceil \sqrt{3n-\frac{3}{4}(y-x)^2}+\frac{1}{2}|y-x| \right\rceil - 2.$$

(d) 如果 $x>0$ 且 $|y-x| \geqslant z_0$, 那么

$$D(L) \geqslant \left\lceil \sqrt{3n-\frac{3}{4}z_0^2}+\frac{1}{2}z_0 \right\rceil - 2.$$

(e) 如果 $x>0$ 且 $|y-x|>2$, 那么

$$D(L) > \left\lceil \sqrt{3n} \right\rceil - 2.$$

(f) 如果 L 是最优的, 且 $x=0$, 那么 $|h-\ell| \leqslant 1$, 且 $D(L) > \lceil\sqrt{3n}\,\rceil - 2$ 除非 $(\ell,h) = (3,3),(3,2),(2,3)$.

证明 (a) 因为 $(h+\ell-x-2)-(\ell+h-y-2)=y-x$, 所以

$$D(L)=h+\ell-x-2\Leftrightarrow(h+\ell-x-2)-(\ell+h-y-2)\geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow y-x\geqslant 0;$$
$$D(L)=h+\ell-y-2\Leftrightarrow(h+\ell-x-2)-(\ell+h-y-2)\leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow x-y\geqslant 0.$$

(b) 如果 $x=0$, 那么 $n=\ell h$. 所以,

$$D(L)=h+\ell-2\geqslant 2\sqrt{\ell h}-2=2\sqrt{n}-2.$$

(c) 不妨设 $y\geqslant x$. 由L 瓦的定义知 $y\leqslant \ell$. 所以, $0\leqslant y-x\leqslant \ell-x$. 如果 $x>0$, 那么 $y(\ell-x)<n$. 所以 $0\leqslant y-x\leqslant \max\{y,\ell-x\}<\sqrt{n}$.

令 $z=y-x$ 且 $d=D(L)$, 则由结论 (a) 知 $0\leqslant z<\sqrt{n}$ 且 $d=h+\ell-x-2$. 因此,

$$z^2<n<4n \text{ 且 } z<h+\ell-x=d+2. \tag{9.2.3}$$

因为 $n=\ell h-x(x+z)=(d+2-h+x)h-x(x+z)$, 所以得到关于 x 的方程:

$$x^2+(z-h)x-h(d+2-h)+n=0.$$

它有实数解当且仅当

$$(z-h)^2+4h(d+2-h)-4n\geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow 3h^2-(2z-4d-8)h+4n-z^2\leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow (2z-4d-8)^2\geqslant 12(4n-z^2)$$
$$\Rightarrow 2d+4-z\geqslant\sqrt{3(4n-z^2)}\qquad(\text{由式 (9.2.3)})$$
$$\Rightarrow d\geqslant\sqrt{3n-\frac{3}{4}z^2}+\frac{1}{2}z-2.$$

(d) 定义函数

$$F(z)=\sqrt{3n-\frac{3}{4}z^2}+\frac{1}{2}z.$$

函数 $F(z)$ 在区间 $[0,\sqrt{n}\,]$ 是严格增的. 由结论 (c) 知, 如果 $z=y-x\geqslant z_0$, 那么 $z_0\leqslant z<\sqrt{n}$. 所以,

$$D(L)\geqslant\lceil F(z)\rceil-2\geqslant\lceil F(z_0)\rceil-2=\left\lceil\sqrt{3n-\frac{3}{4}z_0^2}+\frac{1}{2}z_0\right\rceil-2.$$

(e) 如果 $x>0$ 且 $y-x>2$, 那么 $h\geqslant y+1\geqslant 5$ 且 $\ell-x\geqslant y-x=z\geqslant 3$. 所以 $n\geqslant h(\ell-x)+1\geqslant 16$.

$$n=16\Rightarrow h=5,\ell-x=3,x=1\Rightarrow D(16)=6>5=\lceil\sqrt{48}\,\rceil-2,$$
$$n\geqslant 17\Rightarrow F(3)\geqslant\sqrt{3n}+1\Rightarrow D(L)\geqslant\lceil F(3)\rceil-2>\left\lceil\sqrt{3n}\,\right\rceil-2.$$

(f) 设 L 是最优的且 $x=0$. (反证) 假定 $|h-\ell|\geqslant 2$. 不妨设 $h-\ell\geqslant 2$. 考虑L 瓦 $L'=L(n;\ \ell+1,\ h-1,\ 1,\ h-\ell-1)$, 得到如下矛盾:

$$D(n)\leqslant D(L')\leqslant h+\ell-3<h+\ell-2=D(L)=D(n).$$

这证明了 $h-\ell\leqslant 1$.

注意到 $|h-\ell|\leqslant 1$, 而且当 $x=0$ 时有 $n=\ell h$, 所以

$$D(n)=h+\ell-2=\left\lceil\sqrt{3h\ell}\,\right\rceil-2\Leftrightarrow(\ell,h)=(3,3),(3,2),(2,3).$$

定理得证. ∎

令

$$\mathrm{lb}(n)=\left\lceil\sqrt{3n}\,\right\rceil-2,\quad n\geqslant 4. \tag{9.2.4}$$

由定理9.2.1 知, 对任何 $n\geqslant 4$, 均有 $D(n)\geqslant \mathrm{lb}(n)$. 面积为 n 的L 瓦 L 称为是 k 紧的 (k-tight), 如果 $D(L)=\mathrm{lb}(n)+k$. 文献中, 0 紧和 1 紧分别称为紧的 (tight) 和几乎紧的 (nearly tight). 显然, 紧的L 瓦一定是最优的. 但反之不一定成立.

式(9.2.4) 中的界是可以达到的. 例如, $n=3t^2, t\in \boldsymbol{Z}, t\geqslant 2$, 则 $\mathrm{lb}(n)=3t-2$, 对应的L 紧瓦是 $L(3t^2;2t,2t,t,t)$.

对任何 $t\in\boldsymbol{Z}, t\geqslant 1$, 令

$$I=[3t^2+1,\ 3t^2+6t+3]$$

是整数区间. 那么对任何正整数 $n\geqslant 4$, 存在 $t\in\boldsymbol{Z}$ 使得 $n=n(t)$ 且 $3t-1\leqslant \mathrm{lb}(n(t))\leqslant 3t+1$. 根据 $\mathrm{lb}(n(t))$ 的取值, 区间 I 能划分成3 个子区间 I_1,I_2,I_3, 其中

$$I_1(t)=[3t^2+1,\ 3t^2+2t],$$
$$I_2(t)=[3t^2+2t+1,\ 3t^2+4t+1],$$
$$I_3(t)=[3t^2+4t+2,\ 3t^2+6t+3].$$

显然,

$$n=n(t)\in I_i(t)\Leftrightarrow \mathrm{lb}(n(t))=3t-2+i,\quad i=1,2,3. \tag{9.2.5}$$

下面定理给出L 瓦是 k 紧的简单而十分有用的充分必要条件.

定理 9.2.2 设 $L=L(n;\ell,h,x,y)$ 是L 瓦, 其中

$$\ell=2t+a,\ h=2t+b,\ a=a(t),\ b=b(t).$$

令 $z=|y-x|$, 并令

$$n=n(t)=3t^2+At+B,\ \ 1\leqslant A\leqslant 6,\ B \text{ 是常数}.$$

那么 L 是 k 紧的当且仅当对任何 $j=i+k, 1\leqslant i\leqslant 3, k\in \boldsymbol{Z}$

$$(a+b-j)(a+b-j+z)-ab+(A+z-2j)t+B=0. \tag{9.2.6}$$

证明 不妨设 $y-x\geqslant 0$, 即 $D(L)=h+\ell-x-2$. 那么 L 是 k 紧的当且仅当对任何 $j=i+k,\ 1\leqslant i\leqslant 3,\ k\in Z$ 有 $D(L)=h+\ell-x-2=3t-2+j$, 即,

$$x=h+\ell-3t-j=t+a+b-j,$$
$$y=x+z=t+a+b-j+z.$$

因此,

$$\begin{aligned}&3t^2+At+B=\ell h-xy\\=&(2t+a)(2t+b)-(t+a+b-j)(t+a+b-j+z)\\=&3t^2+(2j-z)t+ab-(a+b-j)(a+b-j+z).\end{aligned}$$

定理得证. ∎

§9.3 双环网络的直径

我们已经知道, 有向图 $G(n;r,s)$ 是强连通的当且仅当 g.c.d. $(n,r,s)=1$. 下面假定 $G(n;r,s)$ 是连通的, 因而由定理 1.2.5 知它是强连通的. 这一节讨论 $G(n;r,s)$ 的直径.

对于给定 $n\geqslant 4$, $G(n;r,s)$ 的直径依赖于 r 和 S 的选取. 对于给定的 n,r 和 s, 记号 $d(n;r,s)$ 表示 $G(n;r,s)$ 的直径.

因为 $G(n;r,s)$ 是点可迁的, 所以为了确定 $d(n;r,s)$ 的值, 只需考虑从顶点 0 到所有其他顶点的距离. 为此, 建立直角坐标系. 令 X 轴的单位是 r, Y 轴的单位是 s. 用 (x,y) 表示格点 (x,y) (即 x 和 y 都是整数的点) 的右上角的单位方块, 那么, 第一象限中所有方块能排成下面的序列:

$$\begin{aligned}&(0,0),\ (1,0),(0,1),\ (2,0),(1,1),(0,2),\ \cdots,\\&(j,0),(j-1,1),\cdots,(j-i,i),\cdots,(1,j-1),(0,j),\ \cdots.\end{aligned} \tag{9.3.1}$$

按照这个顺序, 依次在每个方块 (x,y) 内填上数 $\ell\equiv xr+ys\,(\mathrm{mod}\ n)$. 在方块 (x,y) 内, 如果数 ℓ 在前面还没有被填入, 就将数 ℓ 填入该方块, 否则就让该方块空着. 当所有的数 $0,1,\cdots,n-1$ 都被填入, 填数过程停止. 能作到这一点当且仅当 g.c.d. $(n,r,s)=1$.

事实上, 如果 g.c.d. $(n,r,s)=m\neq 1$, 那么能被填入的数仅是 m 的倍数. 相反, 如果 $m=1$, 那么存在整数 α, β 和 γ 使得

$$\alpha r+\beta s+\gamma n=1.$$

这意味着 $\alpha r+\beta s\equiv 1 \pmod n$. 于是, 存在整数 $\alpha',\beta'(0\leqslant \alpha',\beta'\leqslant n-1)$ 使得

$$\alpha' r+\beta' s\equiv 1 \pmod n.$$

因此数 1 能被填入方块 (α',β') 内. 这意味着如果 g.c.d. $(n,r,s)=1$, 那么从 0 到 $n-1$ 之间的所有数都被填入方块内.

容易看到, 如果方块 (x,y) 内的数是 ℓ, 那么从顶点 0 到顶点 ℓ 的距离恰好等于 $x+y$. 当完成上述填数过程时, 被填有数从 0 到 $n-1$ 的 n 个方块形成面积为 n 的连通平面区域. 称这样得到的区域为由 $G(n;r,s)$ 确定的平面区域.

图 9.2 展示了这样的构造结果, 其中 $n=16, r=1, s=5$ 和 $r=3, s=5$, 它们分别由图 $G(16;1,5)$ 和 $G(16;3,5)$ 所确定. 观察到, 这 16 个方块分别形成的平面区域都是 L 形.

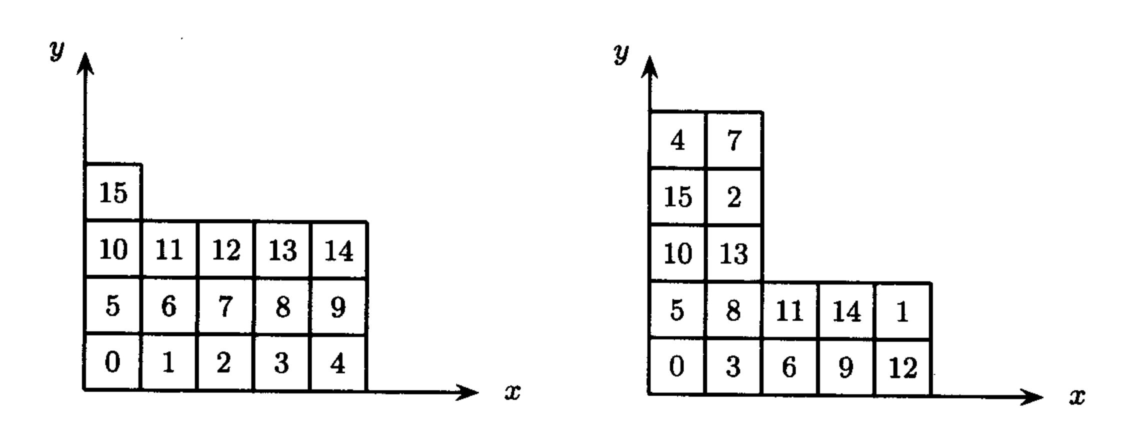


图 9.2　由 $G(16;1,5)$ 和 $G(16;3,5)$ 确定的 L 形

事实上, 上述观察对所有连通有向图 $G(n;r,s)$ 都是真的. 这个事实是由 Wong 和 Coppersmith[311] 首先发现的, 并由许多人进一步研究, 如 Fiol 等人 [116], 李乔等人 [211]. 正是这个事实提供了研究 $G(n;r,s)$ 直径的几何方法, 它是基于下面的 4 个定理.

定理 9.3.1　设 L 是由 $G(n;r,s)$ 确定的平面区域 L.

(a) 对于固定的 x, 如果 $(x,0)$ 是 L 中方块 (x,b) 垂直向上的第一个空方块, 那么 L 中存在方块 $(d,0)$ 使得其中的数是 $xr+bs \pmod n$.

(b) 对于固定的 y, 如果 $(0,y)$ 是 L 中方块 (a,y) 水平向右的第一个空方块, 那么 L 中存在方块 $(0,c)$ 使得其中的数是 $ar+ys \pmod n$.

证明　设 k 是将被填入方块 (x,b) 的数, 则 $k\equiv xr+by \pmod n$. 方块 (x,b) 是空的假定说明数 k 已被填入序列 (9.3.1) 中先于 (x,b) 的某个方块. 因此, L 中存在方块 (d,d') $(d\geqslant 0, d'\geqslant 0, d+d'\leqslant x+b)$ 使得

$$xr+bs \pmod n = k = dr+d's \pmod n.$$

因为方块 $(x, b-1)$ 是在 L 中, 所以

$$xr+(b-1)s \equiv dr+(d'-1)s \pmod{n}, \quad d+d'-1 \leqslant x+b-1.$$

如果方块 $(d, d'-1)$ 在第一象限, 那么在序列 (9.3.1) 中, 方块 $(d, d'-1)$ 在方块 $(x, b-1)$ 之前出现. 因为 $(x, b-1)$ 在 L 中, 所以 $(d, d'-1)$ 也在 L 中, 且填有相同的数. 但 L 中的所有数是不同的, 这说明 $(d, d'-1)$ 不在第一象限. 因为 $d \geqslant 0$, 所以 $d'-1<0$, 即 $d'=0$. 方块 $(d, 0)$ 即为所求.

同样地, 能证明另一个结论. ∎

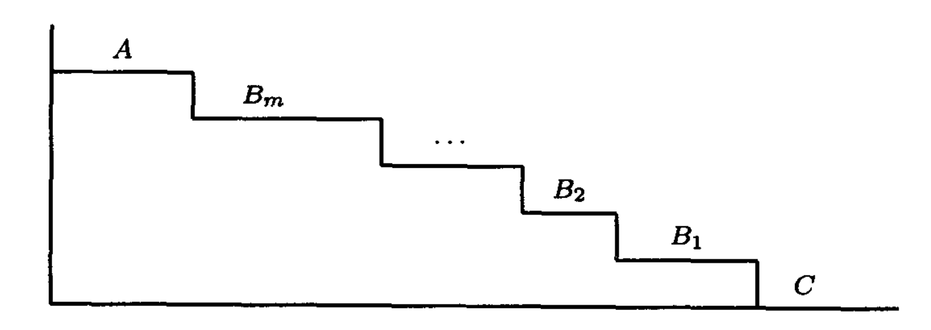


图 9.3 定理 9.3.2 的辅助图

定理 9.3.2 由 $G(n; r, s)$ 确定的平面区域是 L 瓦且 $d(n; r, s)=D(L)$.

证明 设 L 是由 $G(n; r, s)$ 确定的平面区域. 由 L 的构造易知, 如果 (x_0, y_0) 不在 L 中, 那么所有的 $\{(x, y): x \geqslant x_0, y \geqslant y_0\}$ 都不在 L 中. 因此, L 具有图 9.3 所示的形式. 令 $B_i=(x_i, y_i)$ $x_i \geqslant 1, y_i \geqslant 1)$ 是第 i 个水平方向上第一个空方块, $i=1,2, \cdots, m$. 因此, 存在方块 L 中 (d_i, d_i') 使得方块 (x_i, y_i) 和方块 (d_i, d_i') 中被填入相同的数:

$$x_i r+y_i s \equiv d_i r+d_i' s \pmod{n}.$$

由定理 9.3.1 知, $d_i=d_i'=0$, $i=1,2, \cdots, m$. 这个事实说明将被考虑填入 B_i 中的数为 0. 但这个数已被填入在方块 $(0,0)$ 中. 因此对每个 $i=1,2, \cdots, m$, 被填入 L 中方块 (x_i-1, y_i) 和 (x_i, y_i-1) 内的数分别是 $n-r$ 和 $n-s$. 这意味着 $m \leqslant 1$ 且 L 是 L 形.

设 $L=L(n; \ell, h, x, y)$. 由 L 的构造, 如果 $n \geqslant 4$, 那么 $\ell, h \geqslant 2$, $0 \leqslant x<\ell$ 且 $1 \leqslant y<h$. 因为 $(x, 0)$ 和 $(0, y)$ 都在 L 中, 所以 $(\ell, 0)$ 和 $(0, h)$ 都不在 L 中. 因此, 由定理 9.3.1 知, $x \leqslant h$ 且 $y<\ell$. 由于 x, y, h, l 满足条件 (9.2.1) 和 (9.2.2), 所以 L 是 L 瓦.

现在证明 $d(n; r, s)=D(L)$. 不妨设 $D(L)=h+\ell-x-2$ 且 L 中方块 $(\ell-x-1, h-1)$ 内的数是 k. 那么, 从顶点 0 到顶点 k 的距离是 $D(L)$, 即 $D(L) \leqslant d(n; r, s)$. 另一方面, 设 $d=d(n; r, s)$, 并且设 L 中方块 (p, q) 内的数是 d, 则 $d(n; r, s)=d=p+q-2 \leqslant D(L)$. 因此, $d(n; r, s)=D(L)$. ∎

由连通有向图 $G(n;r,s)$ 确定的L 形可能是矩形或正方形. 例如, 由 $G(15;1,3)$ 和 $(16;1,4)$ 确定的L 形分别是矩形和正方形. 在这种情况下, 我们也认为它们是L 瓦, 其中 $x=0$.

定理 9.3.3 设 $L=L(n;\ell,h,x,y)$ 是由连通有向图 $G(n;r,s)$ 确定的L 瓦. 则

$$-x\,r+h\,s\equiv 0 \pmod n,\quad \ell\,r-y\,s\equiv 0 \pmod n. \tag{9.3.2}$$

证明 设由 $G(n;r,s)$ 确定的L 瓦具有如图 9.1 所示的形式. 因为将被考虑填入 方块 $(0,h)$ 的数应该是 $hs \pmod n$. 由定理 9.3.1, 这个数已被填在 L 的底部某方块内. 因此, 存在某整数 t 使得

$$h\,s\equiv t\,r \pmod n,\quad 0\leqslant t\leqslant \ell-1. \tag{9.3.3}$$

如果 $t>x$, 那么 $1\leqslant \ell-t<\ell-x=\ell'$. 考虑 L 中方块 $(\ell-t,h)$. 由式 (9.3.3) 得,

$$(\ell-t)\,r+h\,s \pmod n=\ell\,r-t\,r+h\,s \pmod n=\ell\,r \pmod n.$$

这意味着将被考虑填入方块 $(\ell-t,h)$ 的数不在 L 的底部的方块内出现, 这与定理 9.3.1 矛盾. 因此, $t\leqslant x$. 如果 $t<x$, 那么方块 $(\ell'+t,h'-1)$ 在 L 中. 由 $\ell'r+h's\equiv 0 \pmod n$ 和式 (9.3.3), 有

$$\begin{aligned}(\ell'+t)\,r+(h'-1)\,s \pmod n =&(\ell'\,r+h'\,s)+t\,r-s \pmod n\\ =&0\,r+(h-1)\,s \pmod n.\end{aligned}$$

这意味着被填入 L 中方块 $(0,h-1)$ 和方块 $(\ell'+t,h'-1)$ 内的数一样, 矛盾. 所以 $t=x$. 因此, 将被填入方块 $(0,h)$ 和 (ℓ',h) 的数应该分别是 $xr \pmod n$ 和 $\ell r \pmod n$. 于是,

$$hs\equiv xr \pmod n,\quad \ell'r+hs\equiv \ell r \pmod n.$$

因为 $\ell'r+h's\equiv 0 \pmod n$, 所以

$$\ell r\equiv \ell'r+hs=\ell'r+h's+ys\equiv ys \pmod n.$$

定理得证. ∎

用 $L(n;r,s)$ 表示由 $G(n;r,s)$ 确定的L 瓦. L 瓦 $L(n;\ell,h,x,y)$ 称为是 (r,s) 可实现的 (realizable), 如果存在连通的 $G(n;r,s)$ 使得 $L(n;r,s)=L(n;\ell,h,x,y)$.

Chen 和 Hwang[60] 证明了: 实现同一个L 瓦 $L(n;\ell,h,x,y)$ 的两个 $G(n;r,s)$ 和 $G(n;r',s')$ 是同构的. 下面的定理给出了L 瓦是 (r,s) 可实现的充分必要条件, 属于 Fiol 等人 [116]. 必要性是明显的, 这里给出的充分性证明, 属于 Chen 和 Hwang[60].

定理 9.3.4 L 瓦 $L(n;\ell,h,x,y)$ 是 (r,s) 可实现的充分必要条件是

$$\text{g.c.d.}(\ell,h,x,y)=1. \tag{9.3.4}$$

而且, 当必要性成立时, $L(n;\ell,h,x,y)$ 能被唯一的 $G(n;r,s)$ 可实现, 其中

$$r\equiv y\alpha+h\beta \pmod n,\quad s\equiv \ell\alpha+x\beta \pmod n, \tag{9.3.5}$$

α 和 β 是满足下列条件的两个整数:

$$-xr+hs=\alpha n,\quad \ell r-ys=\beta n. \tag{9.3.6}$$

特别地, $L(n;\ell,h,x,y)$ 是 $(1,s)$ 可实现的充分必要条件是

$$\text{g.c.d.}(y,h-y)=1. \tag{9.3.7}$$

而且, 当条件 (9.3.7) 满足时, $L(n;\ell,h,x,y)$ 能被唯一的 $G(n;1,s)$ 实现, 其中

$$s\equiv \ell\alpha'-(\ell-x)\beta' \pmod n, \tag{9.3.8}$$

α' 和 β' 是满足下列条件的两个整数:

$$y\alpha'+(h-y)\beta'=1. \tag{9.3.9}$$

证明 必要性的证明是简单的. 设 $L(n;\ell,h,x,y)$ 是 (r,s) 可实现的. 那么存在连通的 $G(n;r,s)$ 使得 $L(n;r,s)=L(n;\ell,h,x,y)$. 因为 $G(n;r,s)$ 是连通的当且仅当 g.c.d. $(n,r,s)=1$, 所以容易验证 g.c.d. $(\ell,h,x,y)=1$. 必要性得证.

下面给出充分性的证明. 设 $L(n;\ell,h,x,y)$ 是 L 瓦, 它满足条件 (9.3.4). 如果它是 (r,s) 可实现的, 那么方程 (9.3.2) 存在解 (r,s), 它满足 g.c.d. $(n,r,s)=1$. 令

$$r_t=h+ty,\quad \text{and}\quad s_t=x+t\ell.$$

因为 $\ell h-xy=n$, 所以易知 (r_t,s_t) 是方程 (9.3.4) 的解. 问题是求 (r_t,s_t) 使得它满足 g.c.d. $(n,r_t,s_t)=1$.

为此定义一些记号. 用 F_n 表示 n 的素因子集, F_{hx} 表示 g.c.d. (h,x) 的素因子集, F_{ly} 表示 g.c.d. (ℓ,y) 的素因子集, F_t 表示 g.c.d. (r_t,s_t) 的素因子集.

显然, 条件 (9.3.4) 意味着 $F_{hx}\cap F_{\ell y}=\emptyset$. 我们证明对任何 t, $F_t\cap F_{\ell y}=\emptyset$. (反证) 假定对某个 t, 存在 $f\in F_t\cap F_{\ell y}$. 则 f 能整除 y 和 $r_t=h+ty$ 意味着 f 能整除 h. 同样地, f 能整除 ℓ 和 $s_t=x+t\ell$ 意味着 f 能整除 x. 因此, $f\in F_{hx}$, 这矛盾于 $F_{hx}\cap F_{\ell y}=\emptyset$.

假定对某个 t, 存在 $f\in F_n\cap F_t$. 令 $t(f)$ 是最小这样的 t. 考虑 $t=t(f)+j$, $j=1,2,\cdots$. 那么

$$r_t=r_{t(f)}+jy,\quad 和\quad s_t=s_{t(f)}+j\ell.$$

因为 $f \notin F_{\ell y}$, $f \in F_t$ 当且仅当 f 能整除 j. 所以, f 出现在 $t(f)$ 后面第 f 个 t 中, 而不在其他地方出现. 由数论中的“筛法”知, 这对每个 $f \in F_n$ 都是对的, 所以任何 $f \in F_n$, 必存在 t 使得 $f \notin F_t$. 选择 $r \equiv r_t, s \equiv s_t\,(\text{mod } n)$, 即得证充分性.

现在证明定理的剩余部分. 设 $L(n;\ell,h,x,y)$ 是 (r,s) 可实现的. 由式 (9.3.4), 存在两个整数 α 和 β 使得

$$-xr + hs = \alpha n, \quad \ell r - ys = \beta n,$$

即,

$$\begin{pmatrix} -x & h \\ \ell & -y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = n\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \tag{9.3.10}$$

因为 $\ell h - xy = n \neq 0$, 所以

$$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & h \\ \ell & -y \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & h \\ \ell & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \tag{9.3.11}$$

因此,

$$r \equiv y\alpha + h\beta\ (\text{mod } n), \quad s \equiv \ell\alpha + x\beta\ (\text{mod } n),$$

这就是等式 (9.3.5).

因为由式 (9.3.10) 确定的 α 和 β 是唯一的, 所以由式 (9.3.11) 确定的 r 和 s 也是唯一的. 这说明 $G(n;r,s)$ 是唯一的.

当 $r = 1$ 时, 由式 (9.3.11) 得 $1 = \alpha y + \beta h$, 即

$$1 = (\alpha + \beta)y + \beta(h - y).$$

它满足条件 (9.3.7). 令 $\alpha' = \alpha + \beta$ 和 $\beta' = \beta$. 那么它满足条件 (9.3.9), 而且

$$\ell\alpha + x\beta = \ell\alpha + (\ell - \ell')\beta = \ell(\alpha + \beta) - \ell'\beta = \ell\alpha' - (\ell - x)\beta'.$$

由式 (9.3.11), 有

$$s = \ell\alpha + x\beta\ (\text{mod } n) = \ell\alpha' - (\ell - x)\beta'\ (\text{mod } n).$$

定理得证. ∎

§9.4 双环网络的最优设计

这一节考虑特殊的双环网 $G(n;1,s)$, 它是连通性的, 而且含 Hamilton 圈. 我们将利用上几节介绍的方法, 讨论 $G(n;1,s)$ 的设计问题, 即选择 s 使得 $G(n;1,s)$ 有最小的直径. 对给定的 $n \geqslant 4$, 令

$$\tilde{d}(n) = \min\{d(n;1,s):\ 1 < s \leqslant n-1\}.$$

则存在 $G(n;1,s)$ 使得

$$\tilde{d}(n) = d(n;1,s).$$

由定理 9.3.2

$$\tilde{d}(n) = D(L(n;1,s)) \geqslant D(n) \geqslant \text{lb}(n),$$

其中 $\text{lb}(n)$ 定义在式 (9.2.4) 中.

双环网 $G(n;1,s)$ 称为最优的 (optimal), 如果 $d(n;1,s) = \tilde{d}(n)$. 对给定的 $k \in \boldsymbol{Z}$, $G(n;1,s)$ 称为 k 紧优的 (k-tight optimal), 如果 $d(n;1,s) = \tilde{d}(n) = \text{lb}(n) + k$. 文献中, 通常称 0 紧优和 1 紧优分别为紧优的 (tight optimal) 和几乎紧优的 (nearly tight optimal).

显然, 如果 $G(n;1,s)$ 是 k 紧优的, 那么由定理 9.3.2 知, 由 $G(n;1,s)$ 确定的 L 形必是 k 紧优.

对于任意给定的 n, 企图用解析的方法解决上一节讨论的双环网的设计和 L 形瓦的实现问题是极其困难的. 然而, 利用 $\tilde{d}(n)$ 的下界 $\text{lb}(n)$, 大量的最优双环网无限族已被许多作者设计出来. 例如, Hwang, Xu[175], Fiol 等人 [116], Erdös, Hsu[94], Esqué 等人 [100], Shen, Li[284] 和 Aguiló, Fiol[2].

特别地, 李乔等人 [211] 提出一个系统的方法来设计紧优和几乎紧优双环网. 利用定理 9.2.1, 定理 9.2.2 和定理 9.3.4, 列表给出了 69 类紧优双环网和 33 类几乎紧双环网无限族, 覆盖了 4 到 300 之间的所有整数 n. 下面通过 3 个定理来介绍这种方法.

定理 9.4.1 $\{G(3t^2+3t;1,3t+2) : t \in Z, t \geqslant 1\}$ 是直径为 $3t$ 的紧优双环网无限族.

证明 考虑 $n = n(t) = 3t^2 + 3t$. 令 $L = L(n;\ell,h,x,y)$ 是 L 紧瓦. 因为 $n(t) \in I_2(t)$, 所以 $D(L) = \text{lb}(n(t)) = 3t$. 为确定 L, 将 $A = 3, B = 0, j = 2, z = x - y = 1$ 代入式 (9.2.6) 得一个关于 a 和 b 的方程:

$$(a+b-2)(a+b-1) - ab = 0.$$

显然, $(a,b) = (2,1)$ 是该方程的一个解. 对于这些值的 L 瓦是 $L = L(n(t); 2t+2, 2t+1, t+2, t+1)$. 由于

$$\text{g.c.d.}(y, h-y) = \text{g.c.d.}(t+1, t) = 1, \quad \forall\, t \in Z\ t \geqslant 1,$$

所以条件 (9.3.7) 满足. 由定理 9.3.4 知, L 能由唯一的 $G(n;1,s)$ 实现. 因为 $(t+1) - t = 1$, 所以在式 (9.3.8) 中取 $\alpha' = 1$ 和 $\beta' = -1$, 得

$$s = s(t) = \ell\alpha' - (\ell - x)\beta' = (2t+2) + t = 3t + 2.$$

因此, 对任何 $t \in Z$ 且 $t \geqslant 1$, 双环网 $G(3t^2+3t;1,3t+2)$ 是紧优的, 且直径为 $3t$. ∎

定理 9.4.2 $\{G(3t^2+6t+1;1,3t+5):t\in Z,t\geqslant 2\}$ 是直径为 $3t+2$ 的几乎紧优双环网无限族.

证明 考虑 $n=n(t)=3t^2+6t+1$, $t\in Z$, $t\geqslant 2$. 假定对某个 $t\geqslant 2$, 存在紧L 瓦 $L=L(n;\ell,h,x,y)$. 因为 $n(t)\in I_3(t)$, 且 $x>0$, 所以由定理 9.2.1 (b) 知, $D(L)=\mathrm{lb}(n(t))=3t+1$. 令 $z=|y-x|$. 对 $t\geqslant 2$, 有

$$3n-\frac{3}{4}=\left(3t+\frac{5}{2}\right)^2+3t-4>\left(3t+\frac{5}{2}\right)^2.$$

如果 $z\geqslant 1$, 那么由定理 9.2.1 (d) 能导出如下矛盾:

$$3t+1=D(L)>\left(3t+\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{2}-2=3t+1.$$

如果 $z=0$, 那么式 (9.2.6) 对 $A=6,B=1,z=0,j=3$ 成立, 即得关于整数 a 和 b 的方程

$$(a+b-3)^2-ab+1=0.$$

直接验证得知这个方程无整数解.

因此, 对任何 $t\geqslant 2$, 不存在 $n(t)$ 阶紧优双环网. 为了找到面积为 $n(t)$ 的且 $(1,s)$ 可实现的几乎紧瓦, 将 $A=6,B=1,j=4,z=x-y=2$ 代入式 (9.2.6) 得关于 a 和 b 的方程:

$$(a+b-4)(a+b-2)-ab+1=0.$$

容易发现 $(a,b)=(4,1)$ 是它的解. 对于这些参数的L 瓦为 $L=L(n(t);2t+4,2t+1,t+3,t+1)$. 因为

$$\text{g.c.d.}(y,h-y)=\text{g.c.d.}(t+1,t)=1,\quad \forall\, t\in Z,\ t\geqslant 1,$$

条件 (9.3.7) 满足. 由定理 9.3.4 知, L 能由唯一的 $G(n;1,s)$ 实现. 因为 $(t+1)-t=1$, 所以在式 (9.3.8) 中取 $\alpha'=1$ 和 $\beta'=-1$, 得

$$s=s(t)=\ell\alpha'-(\ell-x)\beta'=(2t+4)+(t+1)=3t+5.$$

因此, 对任何 $t\in Z$ 且 $t\geqslant 2$, 双环网 $G(3t^2+6t+1;1,3t+5)$ 是几乎紧优的, 且直径为 $3t+2$. ∎

定理 9.4.3 设 $e\in Z$. 如果 $t=2e+3$, $s=6e^2+19e+15$, 那么 $G(3t^2+4t;1,s)$ 是紧优的且直径为 $3t$; 如果 $t=2e+2$, $s=6e+6$, 那么 $G(3t^2+4t;1,s)$ 是几乎紧优的且直径为 $3t+1$.

证明 考虑 $n=n(t)=3t^2+4t$. 设 $L=L(n;\ell,h,x,y)$ 是紧瓦. 因为 $n(t)\in I_2(t)$, 所以 $D(L)=\mathrm{lb}(n(t))=3t$. 令 $z=|y-x|$. 于是当 $t\geqslant 2$ 时, 有

$$3n-\frac{3}{4}=\left(3t+\frac{3}{2}\right)^2+3t-3>\left(3t+\frac{3}{2}\right)^2.$$

如果 $z \geqslant 1$, 那么由定理 9.2.1 (d) 能导出矛盾如下:

$$3t = D(L) > \left(3t + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} - 2 = 3t.$$

如果 $z = 0$, 那么式 (9.2.6) 对 $A = 4,\ B = 0,\ z = 0, j = 2$ 成立, 即存在整数 a 和 b 使得

$$(a + b - 2)^2 - ab = 0.$$

不难求出该方程的全部整数解为 $(a, b) = (0, 2),\ (2, 0),\ (2, 2)$. 对应于这些参数的 L 紧瓦是:

$$\begin{aligned} &L(n(t); 2t, 2t+2, t, t), \quad L(n(t); 2t+2, 2t, t, t), \\ &L(n(t); 2t+2, 2t+2, t+2, t+2) \end{aligned} \tag{9.4.1}$$

以及它们的转置.

当 $t = 2e + 3$ 时, 取 $L = L(n(t); 2t, 2t+2, t, t)$, 其中 $y = 2e + 3$ 且 $h - y = 2e + 5$. 因为 $(e+2)y - (e+1)(h-y) = 1$, 所以 g.c.d. $(y, h-y) = 1$. 条件 (9.3.7) 满足. 由定理 9.3.4, L 能由唯一的 $G(n; 1, s)$ 实现. 在式 (9.3.8) 中, 取 $\alpha' = e + 2$ 和 $\beta' = -e - 1$, 得

$$s = s(t) = \ell\alpha' - (\ell - x)\beta' = 6e^2 + 19e + 15.$$

因此, 对任何 $e \in Z$, 如果 $t = 2e + 3$ 且 $s = 6e^2 + 19e + 15$, 那么 $G(3t^2 + 4t; 1, s)$ 是紧优的且直径为 $3t$.

当 $t = 2e + 2$ 时, 式 (9.4.1) 中所有紧瓦和它们的转置都不满足条件 (9.3.7). 由定理 9.3.4 知它们都不是 $(1, s)$ 可实现的. 为找到面积为 $n(t)$ 且 $(1, s)$ 可实现的几乎紧瓦, 将 $A = 4,\ B = 0,\ j = 3,\ z = x - y = 2$ 代入式 (9.2.6) 得关于 a 和 b 的方程如下:

$$(a + b - 3)(a + b - 1) - ab = 0.$$

易知 $(a, b) = (0, 3)$ 是它的解, 对应的 L 形瓦是 $L = L(n(t); 2t, 2t+3, t, t+2)$, 其中 $y = t + 2$ 和 $h - y = t + 1$. 因为 $\ell y - 1(h - y) = 1$, 所以 g.c.d. $(y, h - y) = 1$. 条件 (9.3.7) 满足. 由定理 9.3.4 知, L 能由唯一的 $G(n; 1, s)$ 实现. 在式 (9.3.8) 中取 $\alpha' = 1$ 和 $\beta' = -1$, 便得到

$$s = s(t) = \ell\alpha' - (\ell - x)\beta' = 3t.$$

因此, 对任何 $e \in Z$, 如果 $t = 2e + 2$ 和 $s = 3t$, 那么 $G(3t^2 + 4t; 1, s)$ 是几乎紧优的且直径为 $3t + 1$. ∎

徐俊明 [321, 323] 进一步发展了上述方法求出 3 类 2 紧优无穷族双环网. 基本的策略是求一个无穷集 $\{n(t) : t \in Z, t \geqslant t_0\}$ 使得不存在阶为 $n(t)$ 的紧优和几乎紧优的双环网, 但对任何 $t \geqslant t_0$ 存在阶为 $n(t)$ 的 2 紧优双环网.

作为例子, 考虑 $n(t) = 3t^2 + 6t - 26$. 当 $t \geqslant 29$ 时, 不存在阶为 $n(t)$ 的最优的双环网. 当 $t = 16f + 31$ 时, 不存在阶为 $n(t(f))$ 的紧优和几乎紧优的双环网. 当 $f = 8e^2 + 19e + 9$ 时, $t = 128e^2 + 304e + 175$. 我们叙述一个结果, 但略去证明.

定理 9.4.4 对任何 $e \in Z$, 令

$$n = n(e) = 49152e^4 + 233472e^3 + 412416e^2 + 321024e + 92899,$$
$$s = s(e) = 1536e^3 + 5376e^2 + 6180e + 2336.$$

那么双环网 $G(n(e); 1, s(e))$ 是 2 紧优的, 且直径为 $384e^2 + 912e + 528$. ∎

在这个结论的基础上, 徐俊明和刘琦 [332] 在 $n(t) = 3t^2 + 6t - 26$ 中还找到 3 类 4 紧优无穷族双环网. 在这些方法的基础上, 陈协彬 [62] 给出一般 k 紧优双环网的构造方法.

更一般地, 令

$$d(n) = \min\{d(n; r, s): \ 1 \leqslant r < s < n\}.$$

显然, $\tilde{d}(n) \geqslant d(n)$. 如果 $\tilde{d}(n) > d(n)$, 那么 $d(n)$ 不能在 $r = 1$ 时达到. 整数 n 称为是奇异的 (singular), 如果 $\tilde{d}(n) > d(n)$. Fiol 等人 [116] 借助于计算机发现了奇异的 n 确实存在. 最小的奇异数为 $n = 450$. 事实上, $\tilde{d}(450) = 36$ 且 $d(G(450; 1, 59)) = 36$. 然而, $d(450; 2, 185) = 35 = \lceil \sqrt{3 \cdot 450}\, \rceil - 2 = \mathrm{lb}(450)$. 因此, $G(450; 2, 185)$ 是最优的且 $\tilde{d}(450) > d(450)$.

徐俊明 [320] 构造了 3 类奇异的紧优无穷族双环网 $\{G(N(e); r(e), s(e)) : \ e \in E \subseteq Z\}$, 其中之一叙述为下列定理.

定理 9.4.5 设 $U = \{t : t \in \boldsymbol{Z}, t \geqslant 12\} \setminus \{157k + 167 : k \in \boldsymbol{Z}\}, E = \boldsymbol{Z} \setminus \{157k + 136 : k \in \boldsymbol{Z}\}$. 则 $\{G(3t^2 + 2t - 6; t - 10, 14t + 17) : \ t \in U\}$ 是直径为 $3t - 1$ 的紧优双环网无穷族, 其中子族

$$\{G(2700e^2 + 2220e + 450; 30e + 2, 420e + 185) : \ e \in E\}$$

是直径为 $90e + 35$ 的奇异紧优无穷族, 最小元素是 $G(450; 2, 185)$, 它的直径为 35. ∎

§9.5 循环网络的基本性质

循环网络 (circulant network) 的拓扑结构是循环有向图, 循环有向图已在 3.2 的例 1 中有定义, 是由 Elspas 和 Turner[92] 首先提出来的. 循环有向图记为 $G(n; s_1, s_2, \cdots, s_k)$ 或者 $G(n; S)$, 它的顶点集 $V = \{0, 1, \cdots, n-1\}$, 边集

$$E = \{(i, j) : j - i \equiv s \pmod n), \ s \in S\},$$

其中 $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_k\} \subseteq \{1, 2, \cdots, n-1\}$ 且 $s_1 < s_2 < \cdots < s_k$.

循环网络是双环网的自然推广, 它由 Wong 和 Coppersmith[311] 首先考虑. 人们关心的问题是: 对于给定的 n 和 k, 怎样选取 S 使得 $|S|=k$ 且 $G(n;S)$ 有最大的连通度和最小的直径. 这个问题的解决是相当困难的. 这一节讨论循环有向图的基本性质和有关连通度的结果.

定理 9.5.1 设 G 是循环有向图 $G(n;S)$, 其中 $S=\{s_1,\cdots,s_k\}$. 则

(a) G 是 Cayley 图 $C_{Z_n}(S)$, 其中 Z_n 是模 n 加法群, 因而是点可迁的;

(b) G 是强连通的当且仅当 G 是连通的;

(c) G 是强连通的当且仅当 g.c.d. $(n,s_1,\cdots,s_k)=1$;

(d) G 同构于它的逆图 $\overleftarrow{G}$;

(e) $\lambda(G)=k$, 如果 G 是连通的;

(f) $\kappa(G)=k$, 如果 G 是连通的, 且 n 是素数;

(g) $\kappa(G)\geqslant\lceil\frac{1}{2}(k+1)\rceil$, 如果 G 是连通的;

(h) G 含正原子和负原子;

(i) 集 $\{V_m^0,V_m^1,\cdots,V_m^{m-1}\}$ 是 n 的原子划分, 且存在 $b_1,\cdots,b_t\in S$ 使得

$$G[V_m^i]\cong G\left(a\ \frac{b_i}{m},\frac{b_2}{m},\cdots,\frac{b_t}{m}\right),$$

其中 $a\ (\geqslant 2)$ 是 G 的原子数, $m=\frac{n}{a}$ 且

$$V_m^i=\{i,i+m,i+2m,\cdots,i+(a-1)m\},\quad i=0,1,\cdots,m-1.$$

证明 结论 (a) 的证明在 3.5 节和 3.6 节. 由定理 1.2.5 知结论 (b) 成立. 由定理 3.5.1 知, Cayley 图 $G=C_{Z_n}(S)$ 是强连通的当且仅当 S 是 Z_n 的生成集, 当且仅当 g.c.d. $(n,s_1,\cdots,s_k)=1$, 这意味着结论 (c) 成立. 因此, 由定理 9.3.1 和定理 9.3.2 知, 结论 (e), (f) 和 (g) 成立. 下面证明结论 (d), (h) 和 (i).

设 $\overleftarrow{G}$ 是 G 的逆图. 由 3.5 节的注释 4 知, $\overleftarrow{G}=C_\Gamma(S^{-1})$. 因此, $\overleftarrow{G}$ 的边集

$$E(\overleftarrow{G})=\{(i,j):j-i\equiv -s\ (\mathrm{mod}\ n),\ s\in S\}.$$

定义映射 ϕ: $V\to V$ 如下:

$$i\mapsto n-i\ (\mathrm{mod}\ n).$$

显然, 它是双射. 设 i 和 j 是 G 的任意两个顶点. 则

$$\begin{aligned}(i,j)\in E(G)&\Leftrightarrow j-i\equiv s\ (\mathrm{mod}\ n),s\in S\\&\Leftrightarrow (n-j)-(n-i)\equiv -s\ (\mathrm{mod}\ n),s\in S\\&\Leftrightarrow (n-i,n-j)\in E(\overleftarrow{G})\\&\Leftrightarrow (\phi(i),\phi(j))\in E(\overleftarrow{G}).\end{aligned}$$

这意味着映射 ϕ 保相邻性. 所以 ϕ 是 G 和 $\overleftarrow{G}$ 的同构. 即, $G\cong\overleftarrow{G}$, 结论 (d) 成立.

如果 $k=n-1$, 那么 $G(n;S)$ 是完全有向图. 结论 (h) 成立.

如果 $k\leqslant n-2$, 那么循环有向图 $G(n;s_1,\cdots,s_k)$ 不是完全图. 因此, 它必含正原子或者负原子. 由结论 (d) 知, 它必含正原子和负原子, 结论 (h) 成立.

由结论 (a), G 是 Cayley 图 $C_{Z_n}(S)$. 设 $A=\{0,x_1,\cdots,x_{a-1}\}$ 是 G 中含单位元素 0 的原子. 对任何 $x\in A$, 存在 $k,\ell\in Z$ $(0\leqslant k\leqslant a-1, 0\leqslant \ell<m)$ 使得 $x=km+\ell$. 考虑置换 $\pi=(01\cdots(n-1))\in Aut(G)$, 那么 $\pi^x(0)=x$. 因为由定理 3.7.1 知 A 是 Z_n 的子群, 所以

$$\begin{aligned}0=\pi^a(0)=\pi^{ax}(0)=\pi^a(x)&\equiv a(km+\ell)\ (\mathrm{mod}\ n)\\&=akm+a\ell\ (\mathrm{mod}\ n)\end{aligned}$$

因为 $akm=kn$, 所以 $\ell=0$. 这意味着 $A=V_m^0$. 由原子分解定理 3.3.5 知, 存在 n 的原子划分 $\{V_m^0,V_m^1,\cdots,V_m^{m-1}\}$, 其中

$$V_m^i=\pi^i(V_m^0)=\{i,i+m,i+2m,\cdots,i+(a-1)m\},\quad i=0,1,\cdots,m-1.$$

设 $G[A]$ 是 t 正则的. 则由定理 3.7.1, 存在 $b_1,b_2,\cdots,b_t\in S\cap A$, 它生成 A. 因此, 对每个 $i=1,2,\cdots,t$, 存在 k_i 使得 $b_i=k_im$. 考虑映射

$$\begin{aligned}\phi:\ V_m^0&\to\{0,1,\cdots,a-1\}\\jm&\mapsto j,\quad j=0,1,\cdots,a-1.\end{aligned}$$

显然, ϕ 是双射. 为了完成结论 (h) 的证明, 由定理 3.3.5, 只需证明 ϕ 保相邻性. 设 km 和 ℓm 是 $G[V_m^0]$ 中任意两个顶点, 则

$$\begin{aligned}(km,\ell m)\in E(G[V_m^0])&\Leftrightarrow(\ell m-km)\equiv k_im\ (\mathrm{mod}\ n),\quad 1\leqslant i\leqslant t\\&\Leftrightarrow(\ell-k)\equiv k_i\ (\mathrm{mod}\ \frac{n}{m})\\&\Leftrightarrow(\ell-k)\equiv k_i\ (\mathrm{mod}\ a)\\&\Leftrightarrow(k,\ell)\in E\left(G(a\,\frac{b_1}{m},\frac{b_2}{m},\cdots,\frac{b_t}{m})\right).\end{aligned}$$

结论 (i) 成立. ∎

下面进一步讨论 $G(n;S)$ 的连通度. 关于循环有向图连通度最重要的问题是: 确定一个给定 $G(n;S)$ 是否有最大连通度.

如果 $|S|=n-1$, 那么 $G(n;S)$ 是完全有向图, 它的连通度是 $n-1$. 下面假定 $1\leqslant k=|S|\leqslant n-2$. 设 $m\in Z$ 且 $m|n$. 令

$$F_m^i=\left\{i,i+m,i+2m,\cdots,i+\left(\frac{n}{m}-1\right)m\right\},\quad i=0,1,\cdots,m-1.$$

定义集

$$M(m,S)=\{\ell:\ 1\leqslant\ell<m,\ell\equiv s\ (\mathrm{mod}\ m),s\in S\}.$$

显然, $M(n,S)=S$ 且 $M(1,S)=\emptyset$. 下面的结果属于 van Doorn[302].

定理 9.5.2 如果 $|S|\leqslant n-2$, 那么 $G(n:S)$ 的连通度

$$\kappa(G(n;S))=\min\left\{\frac{n}{m}|M(m,S)|:\ m|n,\ |M(m,S)|<m-1\right\}.$$

特别地, $\kappa(G(n;S))=a|M(\frac{n}{a},S)|$, 其中 a 是 $G(n;S)$ 的原子数.

证明 容易验证, 当 $i\neq j$ 时, 如果 $N^+(F_m^i)\cap F_m^j\neq\emptyset$, 那么 $F_m^j\subseteq N^+(F_m^i)$. 因此, 有

$$|N^+(F_m^i)|=\frac{n}{m}|\{j:\ F_m^j\subseteq N^+(F_m^i),j\neq i\}|. \tag{9.5.1}$$

另一方面, 当 $p,q\in Z$ 且 $0\leqslant p,q<\frac{n}{m}$ 时, 有

$$\begin{aligned}(i+pm,j+qm)\in E(G(n;S))\Leftrightarrow\quad & j>i,\ \text{且}\ j-i\in M(m,S),\ \text{或者}\\ & j<i\ \text{且}\ m+j-i\in M(m,S).\end{aligned}$$

因此,

$$|\{j:\ F_m^j\subseteq N^+(F_m^i),j\neq i\}|=|M(m,S)|. \tag{9.5.2}$$

由式 (9.5.1) 和式 (9.5.2) 得

$$|N^+(F_m^i)|=\frac{n}{m}\ |M(m,S)|. \tag{9.5.3}$$

因为 $|M(m,S)|<m-1$ 当且仅当 $|N^+(F_m^i)|<n-\frac{n}{m}$, 所以对任何 $m\in Z$ 和 $m|n$, $N^+(F_m^i)$ 是 $G(n;S)$ 的分离集, $i=0,1,\cdots,m-1$. 因此,

$$\kappa\leqslant\frac{n}{m}\ |M(m,S)|.$$

设 A 是 $G(n;S)$ 的正原子, 那么由定理 3.3.5 知, $|A|=a\geqslant 2$ 且 $a|n$. 由定理 9.5.1 (h) 知, $A=V_m^0=F_m^0$, 其中 $m=\frac{n}{a}$. 因此, $N^+(A)$ 是 $G(n;S)$ 的 κ 点割, 且 $\kappa=a|M(\frac{n}{a},S)|$. ∎

例如, 从下列表中知, 循环有向图 $G(12;1,4,5,9)$ 的连通度为 3.

m	$M(m,S)$	$\|M(m,S)\|<m-1?$	$\frac{n}{m}\|M(n,S)\|$
1	$\emptyset$	no	(0)
2	{1}	no	(6)
3	{1, 2}	no	(8)
4	{1}	yes	**3**
6	{1, 3, 4, 5}	yes	8
12	{1, 4, 5, 9}	yes	4

定理 9.5.2 有许多推论.

推论 1 $G(n;s_1,\cdots,s_k)$ 是强连通的当且仅当 g.c.d. $(n,s_1,\cdots,s_k)=1$.

证明 由定理 9.5.2 知, $\kappa\geqslant 1$ 当且仅当 $M(m,S)\neq\emptyset$ 对任何 $m\in Z$, $m\geqslant 1$ 和 $m|n$ 成立. ∎

推论 2 $\kappa(G(n;S)) = |S|$ 如果 g.c.d. $(n,s) = 1$ 对任何 $s \in S$ 成立.

证明 因为 $G(n;S)$ 是群 Z_n 关于 S 的 Cayley 图, 所以 $G(n;S)$ 有含单位元素 0 的原子 A. 如果 $|A| = a = 1$, 由 3.4.13 知, $\kappa = |M(n,S)| = |S|$. 下面证明 $|A| = 1$. (反证) 假定 $|A| > 1$. 因为 $G[A]$ 是强连通的, 所以存在 $s \in S \cap A$. 因为 $G(n;S)$ 是点可迁的, 所以存在 $\pi \in Aut(G)$ 使得 $\pi(0) = s$. 因此, $\pi(A)$ 也是 $G(n;S)$ 的原子. 因为 $s \in A \cap \pi(A)$, 所以由定理 3.3.5 知, $\pi(A) = A$. 而且对每个 $i = 1, 2, \cdots, n-1$, 有 $\pi^i(A) = A$. 因为 g.c.d. $(n,s) = 1$, 所以

$$A = \bigcup_{i=0}^{n-1} \pi^i(A) = V(G(n;S),$$

矛盾. ∎

推论 3 如果 $G(n;S)$ 使得 $i \in S$ 对每个 $i = 1, 2, \cdots, \lceil \frac{1}{2}|S| \rceil$, 那么 $\kappa(G(n;S)) = |S|$.

证明 如果 $G(n;S)$ 是完全有向图, 那么 $\kappa(G(n;S)) = n - 1 = |S|$. 下面假定 $G(n;S)$ 不是完全的. 设 $t = \lceil \frac{1}{2}|S| \rceil < n-1$ 且 $m \in Z$ 使得 $m|n$.

如果 $m = n$, 那么 $|M(n,S)| = |S|$.

如果 $t < m < n$, 那么 $|M(m,S)| \geqslant t$. 因为 $\frac{n}{m} \geqslant 2$, 所以 $\frac{n}{m}|M(m,S)| \geqslant |S|$.

如果 $m \leqslant t$, 那么 $|M(m,S)| = m - 1$. 于是,

$$\frac{n}{m}|M(m,S)| = n - \frac{n}{m} > n - 1 \geqslant |S|.$$

由定理 9.5.2 得,

$$|S| = |M(n,S)| = \kappa(G(n;S) \leqslant |S|.$$

推论得证. ∎

关于循环有向图的另一个最重要的问题是: 对于给定的 n 和 k, 怎样选择 S 使得 $|S| = k$ 且 $G(n;S)$ 的直径最小. 这个问题自从 Wong 和 Coppersmith[311] 提出以来, 已得到更深入的研究. 有许多关于这方面研究结果的综述文献, 如 Bermond 等人 [24] 和 Hwang[174]. 大部分的研究是当 $k = 2$ 的特殊情形. 少数文献讨论 $k = 3$ 的情形, 如 Erdös, Hsu[94], Hsu, Jia[168], Aguilé 等人 [1].

一类重要的循环有向图是 $G(d^n; 1, d, \cdots, d^{n-1})$, 其中 $d \geqslant 2$. Hamidoune[137] 证明了它们的直径和连通度分别为:

$$d(G(d^n; 1, d, \cdots, d^{n-1})) = n(d-1),$$
$$\kappa(G(d^n; 1, d, \cdots, d^{n-1})) = n.$$

循环无向图 $G(n; \pm 1, \pm s)$ 的直径问题也同样地引起许多作者的研究兴趣.

设 $d^*(n)$ 是所有 n 阶循环无向图的最小直径. $d^*(n)$ 的下界

$$\mathrm{lb}^*(n) = \left\lceil \frac{1}{2}\left(\sqrt{2n-1} - 1\right) \right\rceil.$$

Bermond 等人 [30] 已获得一类循环无向图 $G(2t^2+2t+1;\pm1,\pm(2t+1))$, 它的直径达到这个下界. Du 等人 [80] 获得一类循环无向图 $G(2t^2+6t+4;\pm1,\pm(2t+3))$, 它的直径为 $t+2=\mathrm{lb}^*(n(t))+1$.

还有许多另外的结果, 由于篇幅的限制, 不能一一介绍, 有兴趣的读者可参见 Tzvieli[298] 和其文后的参考文献.

习 题

9.1 证明:

(a) $\{G(3t^2+2t-3;1,3t-2):t\in Z,t\geqslant 2\}$ 是直径为 $3t$ 的几乎紧优双环网无限族;

(b) $\{G(3t^2+4t-2;1,3t):t\in Z,t\geqslant 4\}$ 是直径为 $3t+1$ 的几乎紧优双环网无限族.

9.2 证明: (徐俊明 [321, 323])

(a) 设 $n(t)=3t^2+6t-26,t=t(e)=64e+87,e\in Z$, 则 $\{n(t(e)):e\in Z\}$ 是一个既不含紧优又不含几乎紧优双环网的无限族;

(b) 定理 9.4.4: 对任何 $e\in Z$, 令

$$n=n(e)=49152e^4+233472e^3+412416e^2+321024e+92899,$$

$$s=s(e)=1536e^3+5376e^2+6180e+2336.$$

那么双环网 $G(n(e);1,s(e))$ 是 2 紧优的, 且直径为 $384e^2+912e+528$.

9.3 证明: (徐俊明, 刘琦 [332])

(a) 对任何正整数 n, 存在两个整数 s 和 m 使得 $n=s^2+3m^2$ 的充分和必要条件是: 如果 n 有素因子 $p=2$ 或者 $p\equiv 5\ (\mathrm{mod}\ 6)$, 那么 p 在 n 的素因子分解中有偶次幂.

(b) 关于 a 和 b 的不定方程 (9.2.6) 有整数解的充分必要条件是: 对任何整数 z,j,t, 存在整数 s 和 m 使得

$$(2j-z)^2-3[j(j-z)+(A+z-2j)t+B]=s^2+3m^2.$$

(c) 设 $n(t)=3t^2+6t-26,t=28f^2+132f+151,f=22\cdot 85^2e$, 则 $\{n(t(e)):e\in Z\}$ 是不含 $k\,(0\leqslant k\leqslant 3)$ 紧优双环网的无限族;

(d) 在 (c) 中令 $f=23g,g=22\cdot 85^2e$, 则 $\{G(n(t(e));1,s(e)):e\in Z\}$ 是直径为 $3t+5$ 的 4 紧优双环网的无限族, 其中 $t=14812g^2+3036g+151$, $s=14308392g^4+6176604g^3+984630 9^2+68625g+1764$.

9.4 设 $n = 3t^2 + 2it + B \in I_i(t), i \in \{1,2,3\}$, L 形瓦 $L = L(n;l,h,x,y)$ 是 k 紧瓦. 证明:

(a) 设 $z = y - x \geqslant 0, E = 3B - (i-\frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4}(2k+1)^2$, 且 $3t + E > 0$. 则 $z \leqslant 2k$:

(b) 若关于 a 和 b 的不定方程 (9.2.6)(其中 $j = i+k, A = 2i$) 有整数解. 且

$$H_{i,k,z} = (i+k)(i+k-z) + z^2 + 3(2k-z)t - 3B$$

有素因子 $p = 2$ 或者 $p \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 6)$, 则在其素因子分解中, p 的次数为偶数;

(c) 若对所有满足 $0 \leqslant z \leqslant 2k, 0 \leqslant k' \leqslant k$ 的整数 k' 和 z 都存在整数 $r = r(k',z), m = m(k,z)$ 和满足 (b) 中条件的素数 $p = p(k',z)$ 使得 $(p,r) = 1$ 且

$$H_{i,k',z} \equiv p^{2m-1} \cdot r (\mathrm{mod} p^{2m}),$$

则 $D(n) > lb(n) + k$.

(这些习题的证明可参见陈协彬 [62]. 该文给出构造 k 紧优双环网的无限族的新方法. 对于 $k = 0,1,\cdots,40$, 用此方法可构造 k 紧优双环网的无限族. 其中点数 $n_k(t,a)$ 是 t 的二次多项式且含有参数 a.)

9.5 设 $\{G(N(e);r(e),s(e)) : e \in Z\}$ 是一个双环网络无限族, 其中 $N(e) = 2700e^2 + 2220e + 450, r(e) = 30e + 2, s(e) = 420e + 185, e \in Z$ 是非负整数无限集. 令 $Z' = \{157k + 136 : k \in Z\}$. 证明: $\{G(N(e);r(e),s(e)) : e \in Z'\}$ 中每个双环网络都是非强连通的.

(因为 $Z' \subset Z$, 所以 $\{G(N(e);r(e),s(e)) : e \in Z'\}$ 是 $\{G(N(e);r(e),s(e)) : e \in Z\}$ 的一个无限子集. 这个例子说明了 Esqué 等人在文献 [100] 的结尾断言 $\{G(N(e);r(e),s(e)) : e \in Z\}$ 是一个奇异紧优双环网络无限族的结论是不正确的).

9.6 设 Z 是非负整数无限集, $U = \{t : t \in Z, t \geqslant 12\} \setminus \{157k + 167 : k \in Z\}, E = Z \setminus \{157k+136 : k \in Z\}$. 则 $\{G(3t^2+2t-6; t-10, 14t+17); t \in U\}$ 是一个紧优双环网络无限族, 其直径为 $3t-1$; 而 $\{G(2700e^2+2220e+450; 30e+2, 420e+185) : e \in E\}$ 是其中的一个奇异无限子族, 其直径为 $90e+35$; 它们的起始元素是 $G(450;2,185)$, 其直径是 35. (参见徐俊明 [320])

第 10 章 其他网络拓扑结构

在前面 4 章中, 我们介绍了 4 类互连网络拓扑结构: 超立方体, de Brujin 图, Kautz 图和循环图. 它们是最重要最著名的互连网络拓扑结构, 也是第 2, 3, 4 章介绍的构造方法的杰出应用实例.

这一章将简单地介绍另外几类网络拓扑结构, 它们都频繁地出现在文献和各种各样的网络应用中. 这些结构中的前两类旨在为实现某些算法 (如解偏微分方程组的有限差分算法) 提供更有效的通信模式, 另外的几类是超立方体网络的有界度变形, 旨在克服和 (或者) 修改超立方体网络的某些缺点 (如超立方体网络规模的增加, 其顶点度也呈网络规模的对数增加). 这一章中大部分材料来源于 Leighton[204].

§10.1 网状网与格网

网状网 (mesh network) 是仅次于线形阵列网, 树形网, 星形网络和单环网频频出现在各种网络应用中. 网状网的拓扑结构是无向路 P_ℓ 和 P_m 的笛卡儿乘积 $P_\ell \times P_m$, 记为 $G(\ell,m)$. 在文献中, 有时称 $G(\ell,m)$ 为 $\ell \times m$ 网. 图 10.1 中所示的是 8×4 网络 $G(8,4)$.

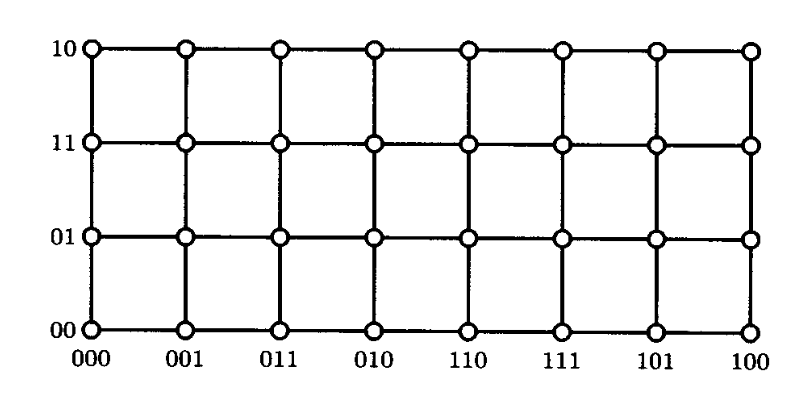


图 10.1 8×4 网 $G(8,4)$

网状网能以膨胀数 1 嵌入超立方体. 换句话说, 对于一个给定的 $G(\ell,m)$, 存在一个 n 使得 Q_n 包含 $G(\ell,m)$ 作为它的子图. 事实上, 设 $p=\lceil\log_2 \ell\rceil$, $q=\lceil\log_2 m\rceil$ 且 $n=p+q$. 那么, $\ell \leqslant 2^p$ 且 $m\leqslant 2^q$, $Q_n=Q_p\times Q_q$. 因为 Q_p 包含 P_ℓ 作为它的子图且 Q_q 包含 P_m 作为它的子图, 所以由定理 4.3.2 知 Q_n 包含 $P_\ell\times P_m$ 作为它的子图. 我们将这一结论叙述为下列定理.

定理 10.1.1 网状网 $G(\ell,m)$ 是超立方体网络 Q_n 的子网, 其中 $n=\lceil\log_2 \ell\rceil+\lceil\log_2 m\rceil$. ∎

推广网状网到格网是相当自然的. n 维格网络 (grid network), 记为 $G(m_1,\cdots,$

m_n), 定义为 $P_{m_1} \times \cdots \times P_{m_n}$, 其中 P_{m_i} 是无向路, $i = 1, 2, \cdots, n$. 下面的结论比定理 10.1.1 更一般.

定理 10.1.2 格网 $G(m_1, \cdots, m_n)$ 是超立方体 Q_k 的子网, 其中 $k = \lceil \log_2 m_1 \rceil + \cdots + \lceil \log_2 m_n \rceil$. ∎

网状网的另一个推广是 n 维重格网 (multigrid network). 1 维和 2 维重格网如图 10.2 所示. 从这两个网, 我们不难得到 n 维格网的定义, 不再赘述, 留给读者作为练习.

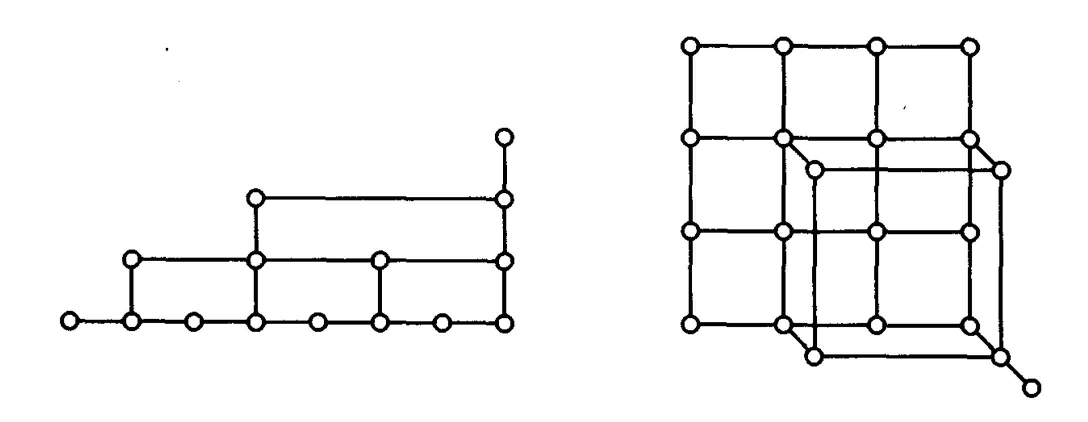


图 10.2 1 维和 2 维重格网

网状网, 格网和重格网的拓扑结构为实现并行计算系统的许多算法提供了很有用的通信模式. 特别地, 重格网对解决离散型椭圆微分方程是非常合适的, 因为解决这类问题的迭代法只要求对最邻近的格点进行迭代 (详细讨论可参见 Leighton[204]).

§10.2 金字塔网

n 维金字塔网 (pyramid network), 记为 $PN(n)$, 是由 Dyer 和 Rosenfeld[87] 提出来的. 它是一个基于网状网的固定结构, 也是重格网的一种推广. 它的顶点集

$$V(PN(n)) = \{(x, y, i):\ 1 \leqslant x, y \leqslant 2^i,\ 0 \leqslant i \leqslant n\}.$$

对每个固定的 i $(0 \leqslant i \leqslant n)$, 顶点子集 $V_i = \{(x, y, i):\ 1 \leqslant x, y \leqslant 2^i\}$ 称为第 i 层上的顶点集. 由 V_i 导出的子图是网状网 $G(2^i, 2^i)$. 每个 $(x, y, i) \in V_i$ 与 V_{i+1} 中 4 个顶点相邻:

$$(2x-1, 2y, i+1), \qquad (2x, 2y, i+1),$$

$$(2x-1, 2y-1, i+1), \qquad (2x, 2y-1, i+1).$$

顶点 $(1, 1, 0)$ 称为 $PN(n)$ 的根. 图 10.3 中所示的图是金字塔网 $PN(2)$.

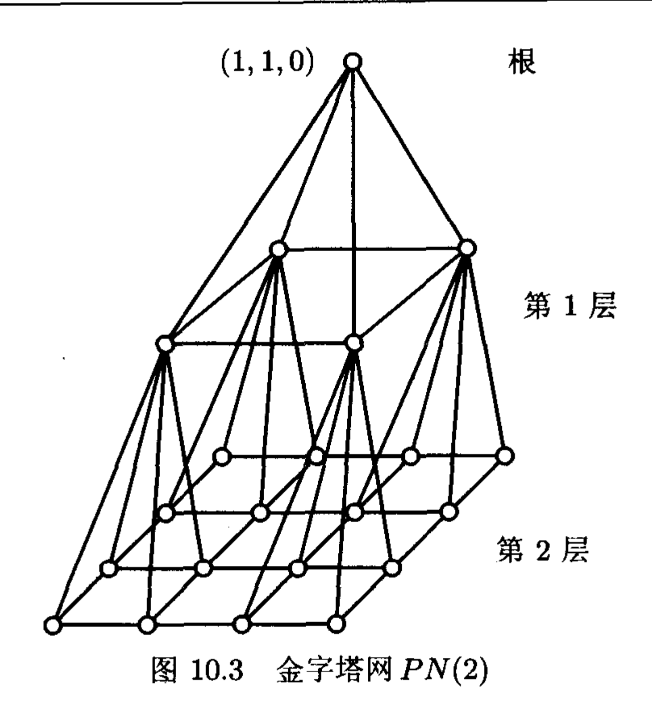


图 10.3 金字塔网 $PN(2)$

因为 $|V_i| = 2^i \cdot 2^i = 4^i$, 所以 $PN(n)$ 的顶点数

$$v(PN(n)) = 4^0 + 4^1 + \cdots + 4^i + \cdots + 4^n = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1).$$

因为 V_i 导出的子图是网状网 $G(2^i, 2^i)$, 所以第 i 层中的边数为 $2^{i+1}(2^i - 1)$. 第 i 层与第 $i-1$ 层之间的边数为 $|V_i|$. 因此, $PN(n)$ 的边数

$$\begin{aligned}\varepsilon(PN(n)) &= \sum_{i=0}^{n} 2^{i+1}(2^i - 1) + \sum_{i=1}^{n} 4^i \\ &= 4^{n+1} - 2^{n+2} \\ &= 4(4^n - 2^n).\end{aligned}$$

$PN(n)$ 的最小顶点度为 3, 最大顶点度为 9 如果 $n \geqslant 3$.

比较图 10.3 中 $PN(2)$ 和图 10.2 中 2 维重格网, 不难发现后者是前者的子图. 事实上, 不难证明 n 维重格网是 $PN(n)$ 的子网. $PN(n)$ 的最大距离是在第 n 层两对角顶点达到, 它们之间任何最短路必经过第 1 层, 因而有长 $2n$. 这意味着 $PN(n)$ 的直径是 $2n$. 这比 n 维重格网的直径 $3n$ 要小得多. 这两个事实说明金字塔结构提供了一个比 n 维重格网收敛更快的算法通信模式. 因此, 金字塔网是并行计算系统 (Leighton[204], Quinn[265]) 和图象处理系统 (Levialdi[206]) 中一个重要的结构. 在图象处理系统中, 金字塔网既可以作为硬件结构, 也可以作为软件结构. 在并行计算系统中, 许多并行算法能在金字塔网上有效地实现. 例如, 在超级计算机 Cray T3D [188] 和 T3E 上实现的某些并行算法.

下面介绍关于 $PN(n)$ 连通度的结果, 由 Cao 等人 [52] 得到.

定理 10.2.1 当 $n \geqslant 1$ 时, $\kappa(PN(n)) = \lambda(PN(n)) = \delta(PN(n)) = 3$.

证明 由 Whitney 不等式, 只需证明 $\kappa(PN(n)) = 3$. 但详细的证明留给读者, 这里证明 $\lambda(PN(n)) = 3$. 由 Whitney 不等式, 只需证明 $\lambda(PN(n)) \geqslant 3$. 令 $X \subset V(PN(n))$ 使得 $d(X) = \lambda(PN(n))$, 并令 $Y = V(PN(n)) \setminus X$. 不妨设 $V_0 \subseteq X$.

如果存在 i ($\geqslant 1$) 使得 $V_i \cap X \neq \emptyset$ 且 $V_i \cap Y \neq \emptyset$, 那么在 $V_i \cap X$ 和 $V_i \cap Y$ 之间至少存在两条边, 即 $|(V_i \cap X, V_i \cap Y)| \geqslant 2$. 对任何 $y \in V_i \cap Y$, 设 R 是根 (即 V_0) 到 y 的最短路. 显然, R 不含第 i 层边. 因为 $V_0 \in X$, 所以 R 含 $(X, Y) \setminus (V_i \cap X, V_i \cap Y)$ 中某些边. 于是,

$$\lambda(PN(n)) = d(X) = |(X, Y)| \geqslant |(V_i \cap X, V_i \cap Y)| + 1 \geqslant 3.$$

如果对每个 i ($1 \leqslant i \leqslant n$), 或者 $V_i \subseteq X$ 或者 $V_i \subseteq Y$, 那么存在 i 使得 $V_i \subseteq X$, $V_{i+1} \subseteq Y$ 或者 $V_{i-1} \subseteq Y$. 然而, 相继两个层之间至少有 4 条边, 这意味着 $\lambda(PN(n)) = d(X) \geqslant 4$. ∎

§10.3 立方连通圈网

在第 6 章我们介绍了超立方体网的许多优良性质, 因此它成为当今并行处理和并行计算系统的首选拓扑结构. 然而, 超立方体网有一个明显的缺点, 那就是随着网络规模的增加, 每个结点的接口 (即顶点度) 呈网络规模的对数增加. 这意味着超立方体网的扩充必导致网络设备的更换. 当设备接口有限时, 超立方体网络的大规模扩充是不可能的. 与此同时, 设备接口过多不利于 VLSI 布线的实现. 为了解决这一问题, 人们提出了许多有关超立方体网络的*有界度变形* (bounded-degree derivatives), 其中最为著名的就是立方连通圈.

n 维立方连通圈 (cube-connected cycle), 记为 $CCC(n)$, 是将长为 n 的无向圈 C_n 替代 n 维超立方体 Q_n 的每个顶点而构造出来的, 其中 Q_n 中第 i 维边连到 C_n 中第 i 个顶点. 例如, 图 10.4 中所示的是从 Q_3 按上述方法构造出来的 3 维立方连通圈 $CCC(3)$.

我们给出 n 维立方连通圈 $CCC(n)$ 的严格数学定义. Q_n 的顶点集如 6.1 节定义为 n 位 2 进制数集, C_n 的顶点集为 $\{1, 2, \cdots, n\}$. 用 $(x; i)$ 表示 $CCC(n)$ 的顶点, 其中 $x \in V(Q_n)$. 精确地说, $CCC(n)$ 的顶点集

$$V = \{(x; i) : x \in V(Q_n), 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

两顶点 $(x; i)$ 和 $(y; j)$ 由一条无向边相连当且仅当, 或者

(i) $x = y$ 且 $|i - j| \equiv 1 \pmod{n}$, 或者

(ii) $i = j$ 且 x 和 y 恰有第 i 个指标不同.

第一种类型的边称为*圈边* (cycle edges), 第二种类型的边称为*超立方体边* (hypercube edges).

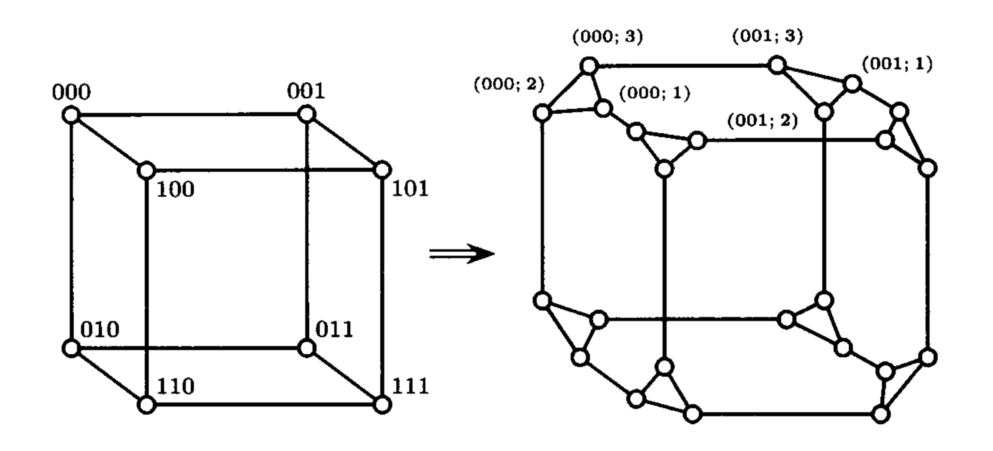


图 10.4 3 维立方连通圈 $CCC(3)$

从构造可以看出 $CCC(n)$ 是 3 正则的, 有 $n2^n$ 个顶点和 $3n2^{n-1}$ 条边. 不难看出 $CCC(n)$ 的连通度为 3 且含 Hamilton 圈. Krishnamoorthy 和 Krishanmirthy[194] 证明: $CCC(n)$ 的直径为 $\lfloor\frac{1}{2}(5n-2)\rfloor$.

4.4 节的例 4 提到 $CCC(n)$ 是 Cayley 图. 这个结果首先由 Carlsson 等人 [54] 得到. 下面给出它的证明.

定理 10.3.1 立方连通圈 $CCC(n)$ 是 Cayley 图, 因而是点可迁的.

证明 从 3.5 节的例 3, $\Gamma=(\boldsymbol{Z}_2)^n\times\boldsymbol{Z}_n$ 是群, 它的运算"$\circ$"定义为:

$$(\boldsymbol{x};i)\circ(\boldsymbol{y};j)=(\boldsymbol{M}^j\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y};i+j),\quad \forall\,(\boldsymbol{x};i),(\boldsymbol{y};j)\in(\boldsymbol{Z}_2)^n\times\boldsymbol{Z}_n,$$

其中第一个分量的加法是模 2 (属于 $(\boldsymbol{Z}_2)^n$), 第二个加法是模 n (属于 $\boldsymbol{Z}_n$), $\boldsymbol{M}$ 是 n 阶方阵:

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdot&0&1\\1&0&0&\cdot&0&0\\0&1&0&\cdot&0&0\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0&\cdot&0&0\\0&0&0&\cdot&1&0\end{pmatrix}.$$

Γ 的单位元是 $(\mathbf{0};0)$, 且逆元素

$$(\boldsymbol{x};i)^{-1}=(-\boldsymbol{M}^{n-i}\boldsymbol{x};n-i).$$

令

$$S=\{(10\cdots0;0),\ (00\cdots0;1),\ (00\cdots0;n-1)\},$$

则前两个元素是互逆的, 而后一个元素是自逆的. 因此, $S=S^{-1}$ 且 Cayley 图 $C_\Gamma(S)$ 是一个无向图. 为了完成证明, 只需证明 $CCC(n)\cong C_\Gamma(S)$.

将 $CCC(n)$ 的顶点 $(x;i)$ 中的 x 看成是一个列向量 $\boldsymbol{x}$. 定义影射

$$\begin{aligned}\varphi:(\boldsymbol{Z}_2)^n\times\boldsymbol{Z}_n&\to(\boldsymbol{Z}_2)^n\times\boldsymbol{Z}_n\\(\boldsymbol{x};i)&\mapsto(\boldsymbol{M}^{n-i+1}\boldsymbol{x};n-i+1).\end{aligned}$$

容易验证 φ 是双射. 下面, 证明 φ 保相邻性.

设 $(\boldsymbol{x};i)$ 和 $(\boldsymbol{y};j)$ 是 $CCC(n)$ 中任意两个顶点. 由定义, $(\boldsymbol{x};i)$ 和 $(\boldsymbol{y};j)$ 相邻当且仅当, 或者

(i) $x=y$ 且 $|i-j|\equiv 1 \pmod{n}$, 或者

(ii) $i=j$ 且 x 和 y 恰有 i 个坐标不同.

注意到

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{x};i)&=(\boldsymbol{M}^{n-i+1}\boldsymbol{x};n-i+1),\\\varphi(\boldsymbol{y};j)&=(\boldsymbol{M}^{n-j+1}\boldsymbol{y};n-j+1),\\\varphi(\boldsymbol{x};i)^{-1}&=(\boldsymbol{M}^{n-i+1}\boldsymbol{x};n-i+1)^{-1}=(-\boldsymbol{x};i-1)\end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{x};i)^{-1}\circ\varphi(\boldsymbol{y};j)&=(-\boldsymbol{x};i-1)\circ(\boldsymbol{M}^{n-j+1}\boldsymbol{y};n-j+1)\\&=(-\boldsymbol{M}^{n-i+1}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{M}^{n-j+1}\boldsymbol{y};n-j+i).\end{aligned}$$

如果 (i) 发生, 那么 $\varphi(\boldsymbol{x};i)^{-1}\circ\varphi(\boldsymbol{y};j)=(\boldsymbol{0},\pm\boldsymbol{1})\in\mathbf{S}$ 当且仅当 $(\boldsymbol{x};i)$ 和 $(\boldsymbol{y};j)$ 在 $C_\Gamma(S)$ 中相邻.

如果 (ii) 发生, 那么

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{x};i)^{-1}\circ\varphi(\boldsymbol{y};j)&=(\boldsymbol{M}^{n-i+1}(-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}),0)\\&=(10\cdots0,0)\in S\end{aligned}$$

当且仅当 $(\boldsymbol{x};i)$ 和 $(\boldsymbol{y};j)$ 在 $C_\Gamma(S)$ 中相邻. ∎

立方连通圈是由 Preparata 和 Vuillemin[263] 首先提出并研究的. 立方连通圈具有超立方体几乎所有的优良性质, 而且克服了超立方体大顶点度的缺点. 立方连通圈不仅能用来作为一般目的的并行处理系统的互连模式, 也能用于许多特殊的 VLSI 的布线. 立方连通圈为有效地执行解决一大类问题 (如快速 Fourier 变换, 分类和置换等) 某些算法提供了通信模式 (见 Preparata 和 Vuillemin[263]). 因此, 立方连通圈是替代超立方体的一个最合适的网络结构.

§10.4 蝶 形 网

超立方体网络的另一个重要的有界度变形是所谓的蝶形网. n **维蝶形网** (butterfly network), 记为 $BF(n)$ 有顶点集

$$V = \{(x;i):\ x \in V(Q_n), 0 \leqslant i \leqslant n\}.$$

两顶点 $(x;i)$ 和 $(y;j)$ 由一条无向边相连当且仅当 $j = i+1$ 且, 或者

(i) $x = y$, 或者

(ii) x 和 y 恰有 j 个坐标不同.

当 $x = y$ 时的边称为直接边 (straight edge), 其余的边称为交叉边 (cross edge). 对于固定的 i, 顶点 $(x;i)$ 称为 i 层上的顶点. 图 10.5 中所示的是 3 维蝶形网 $BF(3)$.

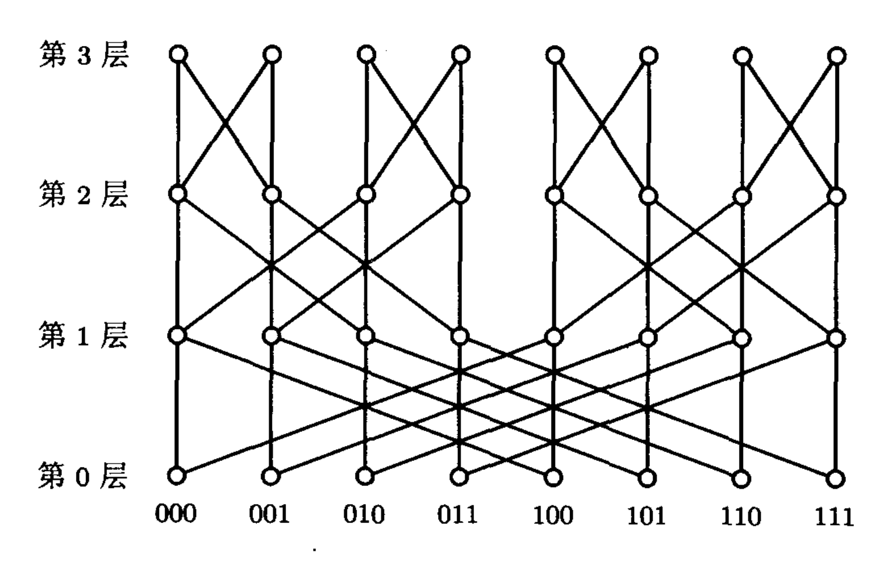


图 10.5 3 维蝶形网 $BF(3)$

由定义, 蝶形网 $BF(n)$ 有 $n+1$ 层, 每层有 2^n 个顶点, 所以 $BF(n)$ 有 $(n+1)2^n$ 个顶点. 0 层和 n 层上每个顶点的度为 2, 其余的顶点度为 4. 因此, $BF(n)$ 的边数

$$\varepsilon(BF(n)) = \frac{1}{2}(42^n + 4(n-1)2^n) = 2n2^n = n2^{n+1}.$$

因为 $BF(n)$ 是连通的且没有奇度点, 所以 $BF(n)$ 是 Euler 图.

蝶形网 $BF(n)$ 和超立方体网 Q_n 在结构上相当类似. 特别地, Q_n 中第 i 个顶点对应于 $BF(n)$ 中第 i 列顶点, Q_n 中第 i 维边 xy 对应于 $BF(n)$ 的两条交叉边 $(x;i-1)(y;i)$ 和 $(y;i-1)(x;i)$. 事实上, 将 $BF(n)$ 折叠起来 (即将 $BF(n)$ 中每列顶点合并成一个顶点, 然后去掉重边和环) 就得到 Q_n. 这个事实说明 Q_n 的每条边对应 $BF(n)$ 中一条长为 n 的路. 换句话说, Q_n 能以膨胀数 n 和膨胀率 $n+1$ 嵌入 $BF(n)$.

由于 $BF(n)$ 和 Q_n 之间有很大的相似性, $BF(n)$ 具有相当优良的性质. 其一, $BF(n)$ 有简单的递归结构, 即 $BF(n)$ 能被简单地划分成两个不交的 $BF(n-1)$ 之并. 去掉 $BF(n)$ 中第 n 层上所有顶点就能得到这两个不交的 $BF(n-1)$. 因为, 去掉 $BF(n)$ 中第 n 层上所有顶点就相当于去掉每列顶点中第 n 个坐标. 图 10.6 中所

示的两个不交的 $BF(2)$ 就是从 $BF(3)$ 去掉第 3 层上所有顶点后得到的, 其中一个由实线表示, 另一个是由虚线表示.

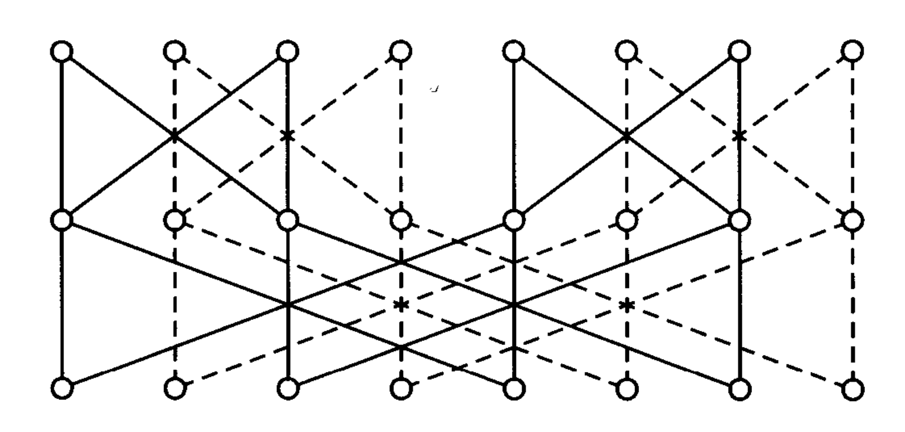


图 10.6 两个不交的 2 维蝶形网 $BF(2)$

$BF(n)$ 另一个有用的性质是, 两顶点 $(x;0)$ 和 $(y;n)$ 之间存在唯一的长为 n 的路, 它穿过每层恰好一个顶点, 并利用交叉边从第 i 到第 $i+1$ 层当且仅当 x 和 y 恰有第 $(i+1)$ 坐标不同. 由此, $BF(n)$ 的直径具有 n 阶. 事实上, Cao 等 [53] 已经证明 $\kappa(FB(n))=2$, $d(FB(n))=2n$.

出于计算上的需要, 有时将 $BF(n)$ 的第 0 层和第 n 层合并成一层, 即对每个 x, 合并顶点 $(x;0)$ 和 $(x;n)$ 为一个顶点. 这样得到的蝶形网称为**环绕蝶形网** (wrapped butterfly network), 记为 $WBF(n)$. 图 10.7 中所示的 3 维环绕蝶形网 $WBF(3)$.

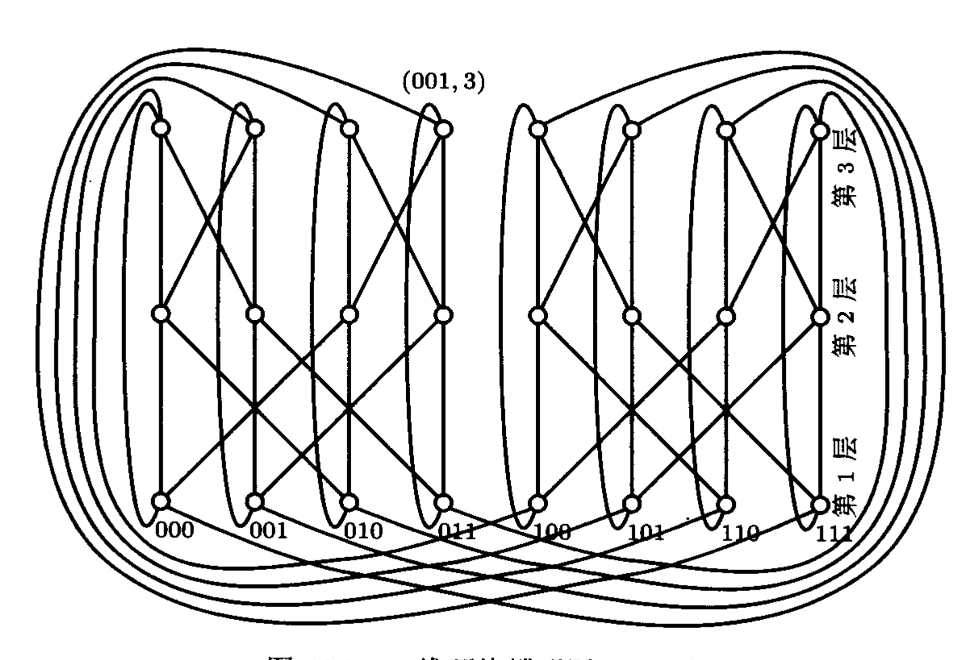


图 10.7 3 维环绕蝶形网 $WBF(3)$

环绕蝶形网 $WBF(n)$ 有 n 层, $n2^n$ 个顶点, 每个顶点度为 4, 因而是 Euler 图.

对 n 用归纳法容易证明 $WBF(n)$ 也是 Hamilton 图. 环绕蝶形网有某些另外的有用性质.

定理 10.4.1 对任何 i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, 存在 $\sigma_i \in Aut(WBF(n))$ 使得它作用在第 i 层顶点集上是一个循环置换.

证明 设 $\sigma_i \in Aut(WBF(n))$ 使得对每个 $\ell, i\,(0 \leqslant \ell,\ i \leqslant n-1)$,

$$\sigma_i(x_1x_2\cdots x_n;\ell) = (x_{i+1}x_{i+2}\cdots x_nx_1\cdots x_i;\ell - i),$$

其中 $\ell - i$ (mod n). 这是因为 $x_1x_2\cdots x_n$ 和 $y_1y_2\cdots y_n$ 恰有 ℓ 个坐标不同当且仅当对任何 ℓ 和 i, $x_{i+1}x_{i+2}\cdots x_nx_1\cdots x_i$ 和 $y_{i+1}y_{i+2}\cdots y_ny_1\cdots y_i$ 恰有 $(\ell - i)$ 个坐标不同. ∎

这说明 $WBF(n)$ 在任何层的循环置换下是对称的. 例如, 重画 $WBF(3)$ 如图 10.8 所示, 其中 $i=2$, 左右子网络的对称性是相当明显的. 事实上, $WBF(n)$ 有更高的对称性, 因为 Annexstein 等人 [10] 已经证明: $WBF(n)$ 是 Cayley 图, 因而是点可迁的.

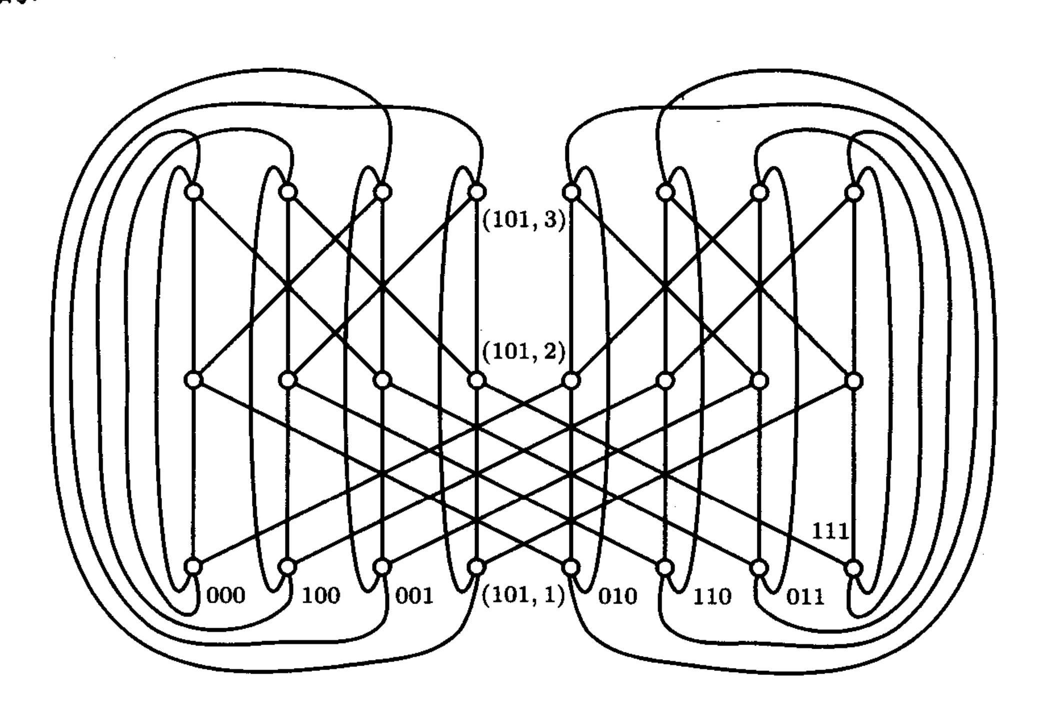


图 10.8 3 维环绕蝶形网 $WBF(3)$

乍一看, 图 10.4 中 $CCC(3)$ 与图 10.7 中的 $WBF(3)$ 差别很大. 实际上, 它们是相当类似的, 在某种意义上讲, 它们是一样的. 为了看出它们之间的联系, 考虑 $CCC(n)$ 和 $WBF(n)$ 的标号. 它们的顶点都为 $(x;i)$, 其中 $x \in V(Q_n) = \{0,1\}^n$ 且 $1 \leqslant i \leqslant n$. 而且 $WBF(n)$ 的直接边与 $CCC(n)$ 的圈边是一样的. 两网络之间的差别仅在于 $WBF(n)$ 的交叉边连接顶点 $(x;i-1)$ 和 $(y;i)$, 其中 x 和 y 恰有 i 个坐标不同, 而 $CCC(n)$ 的超立方体边连接顶点 $(x;i)$ 和 $(y;i)$. 因此, 可以从 $WBF(n)$

得到$CCC(n)$: 用一条超立方体边$(x;i)(y;i)$ 替代$WBF(n)$ 中的两条交叉边$(x;i-1)(y;i)$ 和$(y;i-1)(x;i)$.

上述讨论说明$CCC(n)$ 能以膨胀数 2 嵌入$WBF(n)$, 反之亦然. 从计算的角度看, 这两个网络本质上是一样的. 关于$WBF(n)$ 和$CCC(n)$ 之间关系更深入的讨论, 有兴趣的读者可参见 Feldmann 和 Unger[110].

§10.5 Beneš 网

n 维 Beneš 网是由两个背靠背的蝶形网组成, 记为$BB(n)$. $BB(n)$ 有$2n+1$ 层, 每层有2^n 个顶点. 前面的$n+1$ 层和最后的$n+1$ 层分别形成两个蝶形网$BF(n)$, 而中间一层是两个蝶形网公共层. 图 10.9 中所示的是 3 维 Beneš 网$BB(3)$.

由定义易知, n 维 Beneš 网$BB(n)$ 有$(n+1)2^{n+1}$ 个顶点和$n2^{n+2}$ 条边. 它的顶点度仅有 2 和 4, 因此, 是 Euler 图. 与$BF(n)$ 一样, $BB(n)$ 也有简单的递归结构. 事实上, 从$BB(n)$ 中去掉第 0 层和第 n 层就得到两个不交的$BB(n-1)$.

无论从运算能力, 还是从网络结构来看, Beneš 网和蝶形网没有什么多大的差别, 似乎没有定义 Beneš 网的必要. 但事实上并非如此. 人们之所以要定义 Beneš 网, 因为它是可重排网的杰出例子.

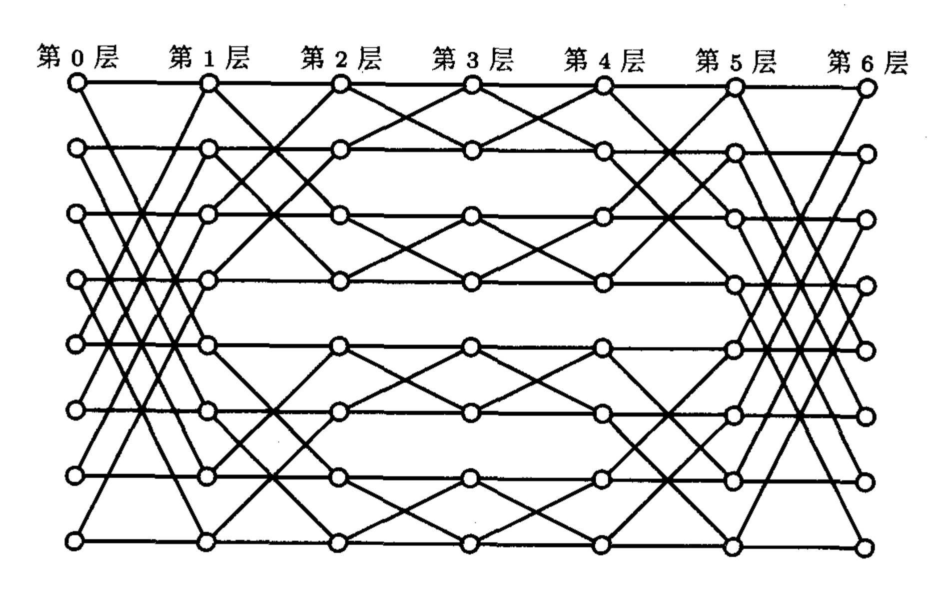


图 10.9 3 维 Beneš 网 $BB(3)$

设N 是网络, 它有n 输入设备集$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 和n 输出设备集$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$. 网络N 称为可重排网络 (rearrangeable network), 如果存在双射$\pi: X\to Y$ 使得N 中存在n 条边不交的从x_i 到$\pi(x_i)$ 的路, $i=1,2,\cdots,n$. 可重排网络在并行计算系统中有很重要的应用.

在$BB(n)$ 中, 第 0 层的每个顶点配置两个输入设备, 第$2n$ 层的每个顶点配置

两个输出设备. 该网络总共配置 2^{n+1} 个输入设备和 2^{n+1} 个输出设备. 例如, 图 10.10 中所示的网络是 $BB(2)$, 它已配置 8 个输入设备和 8 个输出设备. 每个顶点还配置一个 2×2 开关, 通过交叉边或者直接边连接两条从左边来的入边和两条到右边去的出边. 对于一个给定的置换

$$\pi = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 64581237 \end{pmatrix}$$

和每个 $i = 1, 2, \cdots, 8$, 图中给出了 8 条边不交的从输入设备 i 到输出设备 $\pi(i)$ 的路.

因为 $BB(n)$ 有 $n2^{n+2}$ 条边, 每条从输入设备 i 到输出设备 $\pi(i)$ 的路必含 $2n$ 条边, 所以无论置换 π 怎么选取, 2^{n+1} 条边不交的路必包含了 $BB(n)$ 中所有的边. 下面的结果属于 Beneš[21] 和 Waksman[304].

定理 10.5.1 从 2^{n+1} 个输入设备到 2^{n+1} 个输出设备的任何双射 π, $BB(n)$ 中存在 2^{n+1} 条边不交从输入设备 i 到输出设备 $\pi(i)$ 的路, $i = 1, 2, \cdots, 2^{n+1}$.

证明 对 n 用归纳法. 如果 $n = 1$, 那么没有什么可证的, 因为 $BB(1)$ 只是一个点. 假定结论对任何 $BB(n-1)$ 成立, 并设 $BB(n)$ 是 n 维 Beneš 网.

归纳步骤的关键是观察到 $BB(n)$ 的中间 $2n-1$ 层形成两个不交的 $n-1$ 维子网 $BB(n-1)$ (参见图 10.10). 只需弄清哪些路是通过上面的 $BB(n-1)$, 哪些路是通过下面的 $BB(n-1)$.

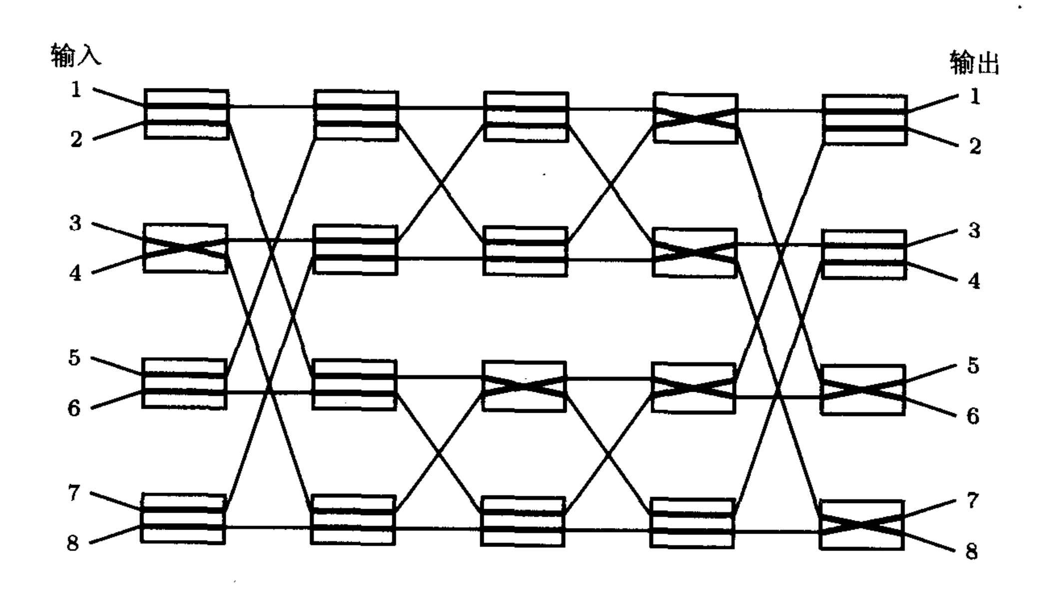


图 10.10 $BB(2)$ 中 8 条边不交的路

从 $BB(n)$ 的结构不难观察到配置在 0 层上每个顶点的两个输入设备分别是通过两条出边连到上面的子网和下面的子网络. 同样地, 配置在 $2n+1$ 层上每个顶点的两个输出设备分别是通过两条入边由上面的子网和下面的子网络连入的.

设 x 是 $BB(n)$ 的输入设备集, y 是 $BB(n)$ 的输出设备集. 设 A 和 B 分别是上面的子网络的输入设备集和输出设备集; C 和 D 分别是下面的子网络的输入设备集和输出设备集. 则

$$|X| = |Y| = 2^{n+1}, \quad |A| = |B| = |C| = |D| = 2^n.$$

因此, 每条从 $x_i \in X$ 到 $\pi(x_i) \in Y$ 的路必经过 $A \cup C$ 中一个输入设备和 $B \cup D$ 中的一个输出设备. 由归纳假设, 在上面的子网中存在 2^n 条边不交的从 $a_i \in A$ 到 $\pi(a_i) \in B$ 的路, $i = 1, 2, \cdots, 2^n$; 在下面的子网中也存在 2^n 条边不交的从 $C_j \in C$ 到 $\pi(c_j) \in D$ 的路, $j = 1, 2, \cdots, 2^n$. 这 2^{n+1} 条路是边不交的, 因而定理得证. ∎

如果 $BB(n)$ 的 0 层中每个顶点恰配置一个输入设备, 且在 $2n$ 层中每个顶点恰配置一个输出设备, 那么下面的结论成立. 其证明留给读者.

定理 10.5.2 对于 $BB(n)$ 中从 2^n 个输入设备到 2^n 个输出设备的任何双射 π, 存在 2^n 条点不交的从输入设备 i 到输出设备 $\pi(i)$ 的路, $i = 1, 2, \cdots, 2^n$. ∎

定理 10.5.1 和定理 10.5.2 对有效地模拟另外结构有许多重要的应用. 唯一的缺点是不知如何建立即时开关. 换句话说, 每个开关需要由知道置换路径的总控制告诉它做什么. 所幸的是, 人们已经发现了解决这个困难问题的许多方法, 感兴趣的读者可参见 Leighton[204].

§10.6 Ω 网

n 维 Ω 网, 记为 $\Omega(n)$, 有顶点集

$$V = \{(x; i) : \ x \in V(Q_n), 0 \leqslant i \leqslant n\},$$

两顶点 $(x; i)$ 和 $(y; i+1)$ 相邻当且仅当, 或者

(i) y 是 x 的左移位, 或者

(ii) y 是先取 x 的左移位, 然后改变最后一个比特.

Ω 网是重要的互连网络. 例如, 纽约大学 (NYU) 的 Ultracomputer 用的就是 Ω 网 (见 Gottlieb 等人 [130]).

下面的结果说明, Ω 网 $\Omega(n)$ 实际上就是蝶形网 $BF(n)$.

定理 10.6.1 $\Omega(n) \cong BF(n), \forall\, n \geqslant 1$.

证明 $\Omega(n)$ 和 $BF(n)$ 有相同的顶点集 V. 令 π 是 V 上的置换: 对任何 $x = x_1 x_2 \cdots x_n \in V(Q_n)$

$$\pi(x_1 x_2 \cdots x_n; i) = (x_{n-i+1} x_{n-i+2} \cdots x_n x_1 \cdots x_{n-i}; i).$$

例如, $\pi(100; 2) = (001; 2)$.

设 $x = x_1x_2\cdots x_n$, $y = y_1y_2\cdots y_n \in V(Q_n)$ 且 $(x;i),(y;j) \in V$. 由定义, $(x;i)$ 和 $(y;j)$ 在 $\Omega(n)$ 中相邻当且仅当 $j = i+1$, 并且, 或者

(i) y 是 x 的左移位, 或者

(ii) y 是先取 x 的左移位, 然后改变最后一个比特.

另一方面, 由定义, $(x;i)$ 和 $(y;j)$ 在 $BF(n)$ 中相邻当且仅当 $j = i+1$, 并且, 或者

(iii) $x = y$, 或者

(iv) x 和 y 恰有 $(i+1)$ 个坐标不同.

下证 $(x;i)$ 和 $(y;i+1)$ 在 $\Omega(n)$ 中相邻当且仅当 $\pi(x;i)$ 和 $\pi(y;i+1)$ 在 $BF(n)$ 中相邻.

如果 $(x;i)$ 和 $(y;i+1)$ 满足条件 (i), 那么 $y = x_2x_3\cdots x_nx_1$. 因此,

$$\pi(x;i) = (x_{n-i+1}x_{n-i+2}\cdots x_nx_1\cdots x_{n-i};i),$$
$$\pi(y;i+1) = (x_{n-i+1}x_{n-i+2}\cdots x_nx_1\cdots x_{n-i};i+1).$$

这说明 $\pi(x;i)$ 和 $\pi(y;i+1)$ 满足条件 (iii). 因此, 它们在 $BF(n)$ 中相邻.

如果 $(x;i)$ 和 $(y;i+1)$ 满足条件 (ii), 那么 $y = x_2x_3\cdots x_n\overline{x}_1$, 其中 $\overline{x}_i \in \{0,1\} \setminus \{x_1\}$. 因此

$$\pi(x;i) = (x_{n-i+1}x_{n-i+2}\cdots x_n\overline{x}_1x_2\cdots x_{n-i};i),$$
$$\pi(y;i+1) = (x_{n-i+1}x_{n-i+2}\cdots x_n\overline{x}_1x_2\cdots x_{n-i};i+1).$$

这说明 $\pi(x;i)$ 和 $\pi(y;i+1)$ 满足条件 (iv). 因此, 它们在 $BF(n)$ 中相邻.

同样地能证明: 如果 $\pi(x;i)$ 和 $\pi(y;i+1)$ 在 $BF(n)$ 中相邻, 那么 $(x;i)$ 和 $(y;i+1)$ 在 $\Omega(n)$ 中相邻. 于是, 置换 π 是 $\Omega(n)$ 与 $BF(n)$ 之间的同构, 即证明了 $\Omega(n) \cong BF(n)$. ∎

§10.7 移位交换网

n 维移位交换网 (shuffle-exchange network), 记为 $SE(n)$, 顶点集 $V = V(Q_n)$, 两顶点 $x = x_1x_2\cdots x_n$ 和 $y = y_1y_2\cdots y_n$ 相邻当且仅当或者

(i) x 和 y 恰有第 n 个坐标不同, 或者

(ii) x 是 y 的一个左, 或者右循环移位.

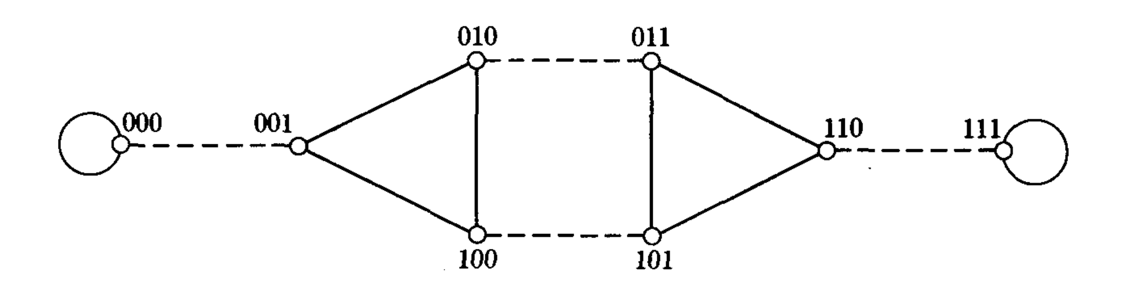


图 10.11 3 维移位交换网 $SE(3)$

由条件 (i) 定义的边称为交换边 (exchange edge). 另外的边称为移位边 (shuffle edge). 条件 (ii) 意味着,

$$y_1y_2\cdots y_n = x_2x_3\cdots x_nx_1, \qquad \text{或者}$$
$$y_1y_2\cdots y_n = x_nx_1\cdots x_{n-2}x_{n-1}.$$

图 10.11 中所示的是 3 维移位交换网 $SE(3)$, 其中虚线表示交换边, 实线表示移位边.

由定义知 $SE(n)$ 有 2^n 个顶点, 3 正则, 因而有 $3\cdot 2^{n-1}$ 条边. 它的直径是 $2n-1$, 其证明留给读者.

习 题

10.1 证明: 定理 10.1.1 和定理 10.1.2.

10.2 写出 n 维格网的定义, 并证明 n 维格网的直径为 $3n$.

10.3 证明: n 维重格网是 n 金字塔网 $PN(n)$ 的子网, 证明 $PN(n)$ 直径为 $2n$.

10.4 证明: $\kappa(PN(n)) = 3$.

10.5 证明: $WBF(n)$ 是 Hamilton 图.

10.6 证明: $WBF(n)$ 是 Cayley 图, 因而是点可迁的.

10.7 证明: 定理 10.5.2.

10.8 证明: n 维移位交换网 $SE(n)$ 的直径为 $2n-1$.

第四部分

互连网络拓扑结构分析

第 11 章　互连网络中的路由选择

路由选择是互连网络中重要的功能, 路由选择的优劣直接影响网络通信性能的有效性, 有许多参数能被用来度量路由选择的优劣. 在大规模系统中, 某些元件和连线发生故障是不可避免的, 故障的出现势必会对路由选择产生影响. 1.4 节已经介绍了路由选择概念. 这一章将介绍度量路由选择优劣的两个参数: 路由选择的转发指数和容错路由选择的传输延迟. 前者被用来度量网络结点的负载或者网络连线的阻塞, 而后者被用来度量路由选择的有效性.

§11.1　路由选择的转发指数

设 G 是 n 阶连通无向图或者强连通有向图. G 中的**路由选择** ρ 定义为 G 中所有 $n(n-1)$ 个有序顶点对 (x,y) 之间固定的路集. 由 ρ 确定的路径 $\rho(x,y)$ 承担从它的源 x 到目的地 y 的数据传输任务. 如果 $\rho(x,y)$ 不是一条边, 那么 $\rho(x,y)$ 的中间顶点具有转发功能.

如果由 ρ 确定的路径经过某个点的条数太多, 那么意味着该路由选择给这个顶点的负载太大. 如果负载超过该点的承载容量, 势必影响信息传输效率, 甚至导致整个网络的瘫痪.

因此, 一个“好”的路由选择不应该给任何顶点以太大的负载, 也即意味着由该路由选择确定的路径经过每个顶点的条数不能太多. 为了更准确地度量路由选择给每个顶点带来的负载, Chung 等 [67] 提出转发指数概念.

设 ρ 是图 G 中给定的路由选择, 记为 (G,ρ), x 是 G 中顶点. 顶点 x 对路由选择 ρ 的**转发指数**, 记为 $\tau_x(G,\rho)$, 定义为由 ρ 确定的路径经过 x 的条数. 参数

$$\tau(G,\rho)=\max\{\tau_x(G,\rho):\ x\in V(G)\}$$

称为 (G,ρ) 的**转发指数** (forwarding index); 参数

$$\tau(G)=\min\{\tau(G,\rho):\ \forall\ \rho\}\ \text{和}\ \tau_m(G)=\min\{\tau(G,\rho_m):\ \forall\ \rho_m\}$$

分别称为 G 的**转发指数**和**最小路由转发指数**. 显然, $\tau(G)\leqslant\tau_m(G)$.

例 11.1.1　考虑轮 W_7, 轮心为 x, 其余的顶点为 $0,1,\cdots,5$, 直径 $d(W_7)=2$. 最小的双向路由选择 ρ_m 定义如下: 对每个 $i=0,1,\cdots,5$,

$$\rho_m(i,i+2)=\rho(i+2,i)\equiv(i,i+1,i+2)(\mathrm{mod}\ 6);$$

对每个 $i=0,1,2$,

$$\rho_m(i,i+3)=\rho(i+3,i)\equiv(i,x,i+3)(\mathrm{mod}\ 6);$$

其余的是直接边. 那么,

$$\tau_x(W_7,\rho_m)=6,\ \tau_i(W_7,\rho_m)=2,\ i=0,1,\cdots,5.$$

因此, $\tau(W_7,\rho_m)=6$.

设 (G,ρ) 是 n 阶互连网络. 假定沿着由 ρ 确定的每条路径 $\rho(x,y)$ 的数据传输率是常数 b. 那么, 每个结点 (既作为数据源点, 又作为数据接收点) 的总传输率为 $2(n-1)b$. 整个网络结点之间的总传输率为 $n(n-1)b$. 结点的数据转发量受控于该点的数据容量 c_x, 因此 $c_x\geqslant 2(n-1)b+\tau_x b$, 其中 $\tau_x=\tau_x(G,\rho)$. 假定网络中每个结点的数据容量的最大值为 c, 则

$$2(n-1)b+\tau_x b\leqslant c_x\leqslant c.$$

例如, 考虑轮 W_7 和它给定在例 1 中的路由选择 ρ_m. 因为轮心 x 转发指数 $\tau_x=6$ 且该点的负载为 $2(7-1)b+6b=18b$, 所以 $18b\leqslant c$.

由于结点容量受控于 $2(n-1)b+\tau b\leqslant c$, 即,

$$b\leqslant\frac{c}{\tau+2(n-1)},\quad \text{其中 } \tau=\tau(G,\rho).$$

所以每个结点 (既作为数据源点, 又作为数据接收点) 的总传输率必满足

$$2(n-1)b\leqslant\frac{2(n-1)c}{\tau+2(n-1)}.\tag{11.1.1}$$

式 (11.1.1) 界定了有效的结点容量. 所以对应的总数据传输率界定了该网络的容量

$$n(n-1)b\leqslant\frac{n(n-1)c}{\tau+2(n-1)}.\tag{11.1.2}$$

例如, 对于轮 W_7 和定义在例 1 中的路由选择 ρ_m, 它的有效点容量为 $2c/3$, 网络容量为 $7c/3$.

由式 (11.1.1) 和式 (11.1.2) 知, 最大化网络容量归结为最小化路由选择的转发指数. 因此, 网络容量能否被充分利用将取决于路由选择. "好的" 路由选择应该有小的转发指数. 因此, 确定给定图的转发指数就显得很有意义了.

例 11.1.2　考虑完全图 K_n. 因为它的每对顶点之间有边相连, 所以任何点对之间的数据传输不必经过第三点. 因此, 它的任何路由选择都使 ρ 是最小的. 于是

$$0\leqslant\tau(K_n)\leqslant\tau_x(K_n,\rho)=0\ \Rightarrow\tau(K_n)=0.$$

例 11.1.3　设星 $K_{1,n-1}$ 的中心点为 x, 其余点为 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$. 显然, 它的任何路由选择 ρ 都是最小的. x 和 x_i 之间的数据传输直接通过边 $\rho(x,x_i)$ 和 $\rho(x_i,x)$; 而 x_i 和 x_j 之间的数据传输必通过 x. 因此, $K_{1,n-1}$ 的转发指数

$$\tau(K_{1,n-1})=\tau_x(K_{1,n-1},\rho)=(n-1)(n-2).$$

一般地, 确定图的转发指数是困难的, 因为 Saad[272] 证明了: 对于直径至少为 2 的图, 点转发指数问题是NP 完备的. Heydemann 等 [158] 给出 $\tau(G)$ 的下界和上界.

定理 11.1.1 设 G 是 n 阶强连通有向图, $V=V(G)$. 则

$$\frac{1}{n}\sum_{y\in V}\sum_{x(\neq y)\in V}(d(G;x,y)-1)\leqslant \tau(G)\leqslant (n-1)(n-2). \tag{11.1.3}$$

$\tau(G)$ 的上界能达到, 而且下界达到当且仅当存在最小路由选择 ρ_m 使得它在每个点有相等的转发指数.

证明 对于 G 中任何路由选择 ρ, 由 ρ 确定的路径经过顶点 x 的最大条数至多为总路径条数减去以 x 为端点的路径条数 (这个数为 $2(n-1)$). 因此, 得 $\tau(G)$ 的上界

$$\tau(G)\leqslant n(n-1)-2(n-1)=(n-1)(n-2).$$

由例 11.1.3 知, 星 $K_{1,n-1}$ 是达到这个上界的图.

至于 $\tau(G)$ 的下界, 首先观察到任何路径 $\rho(x,y)$ 至少包含 $d(G;x,y)-1$ 个中间点, 即 $d(G;x,y)-1$ 是 $\rho(x,y)$ 能经过的最小顶点数. 对于固定的顶点 y, 对所有 x $(\neq y)$ 求和, 即以 x 为起点的所有路径 $\rho(x,y)$ 要经过的中间点数至少为

$$\sum_{x(\neq y)\in V}(d(G;x,y)-1).$$

再对所有的 y 求和得

$$\sum_{y\in V}\sum_{x(\neq y)\in V}(d(G;x,y)-1).$$

由于经过每个顶点的最大路径数不小于 n 个顶点的平均数, 所以得到如式 (11.1.3) 中的 $\tau(G)$ 的下界.

下面证明定理的剩余部分. 事实上, 从上面的论述过程可以看到, 路径 $\rho(x,y)$ 恰经过 $d_G(x,y)-1$ 个中间顶点 $\Leftrightarrow$ $\rho(x,y)$ 是 G 中最短 (x,y) 路. 所以, 以 x 为起点的所有路径 $\rho(x,y)$ $(y\neq x)$ 要经过的中间点数恰为

$$\sum_{x(\neq y)\in V}(d(G;x,y)-1)$$

$\Leftrightarrow$ 对每个 $y\in V$ $(y\neq x)$, $\rho(x,y)$ 是 G 中最短 (x,y) 路. 因此, 由 ρ 确定的所有路径要经过的中间点数恰为

$$\sum_{y\in V}\sum_{x(\neq y)\in V}(d(G;x,y)-1).$$

$\Leftrightarrow$ 由 ρ 确定的所有路径都是 G 中最短路. 因此,

$$\tau(G,\rho)=\frac{1}{n}\sum_{y\in V}\sum_{x(\neq y)\in V}(d(G;x,y)-1)$$

$\Leftrightarrow$ ρ 是 G 的最短路由选择, 而且它在每个点都有相等的转发指数. ∎

最近, Xu 等 [348] 改进了式 (11.1.3) 中的上界为:

$$\xi(G)\leqslant(n-1)(n-2)-\left(2n-2-\Delta\left\lfloor 1+\frac{n-1}{\Delta}\right\rfloor\right)\left\lfloor\frac{n-1}{\Delta}\right\rfloor.$$

如果对任何 x 和 y $(\neq x)$ 均有 $\rho=\rho_m$ 且 $\tau_x(G,\rho_m)=\tau_y(G,\rho_m)$, 那么从式 (11.1.3) 下界的证明知,

$$\tau(G)=\tau_x(G,\rho_m)=\sum_{y\in V\setminus\{x\}}(d(G;x,y)-1),\quad \forall\, x\in V.$$

因此得

$$\tau(G)=\sum_{y\in V}d(G;x,y)-(n-1),\quad \forall\, x\in V. \tag{11.1.4}$$

利用等式 (11.1.4), 能容易计算某些图的转发指数.

例 11.1.4 考虑有向圈 C_n $(n\geqslant 3)$. 它的路由选择 ρ 是唯一的, 因而是最小的. 因为 C_n 是点可迁的, 所以对其中的任何顶点 x, 转发指数 $\tau_x(C_n;\rho)$ 都是相等的. 由等式 (11.1.4) 得

$$\sum_{y\in V}d(C_n;x,y)=1+2+\cdots+n-1=\frac{1}{2}n(n-1).$$

于是, C_n 的转发指数

$$\tau(C_n)=\sum_{y\in V}d(C_n;x,y)-(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

Heydemann 等 [158] 已推广等式 (11.1.4) 到 Cayley 图.

定理 11.1.2 设 G 是 n 阶连通的 Cayley 图. 则

$$\tau(G)=\sum_{y\in V}d(G;x,y)-(n-1),\quad \forall\, x\in V. \tag{11.1.5}$$

而且, 存在最小路由选择 ρ_m 使得 $\tau(G,\rho_m)=\tau(G)$.

证明 设 G 是 n 阶连通的 Cayley 有向图. 则存在 n 阶群 $\Gamma=(X,\circ)$ 和它的生成集 $S\subseteq X$ 使得 $G=C_\Gamma(S)$. 由定理 3.6.1, 保色自同构群 $\mathrm{Aut}^c(G)$ 是 $\mathrm{Aut}(G)$ 的子群. 而且, 对 G 的任何两顶点 u 和 v, 存在唯一的 $g\in X$ 和唯一的 $\phi_g\in\mathrm{Aut}^c(G)$ 使得 $\phi_g(u)=gu=v$.

选择 $u_0 \in X$. 对任何 $u \in X$, 令 $\rho(u_0, u)$ 是最短 (u_0, u) 路. 最小路由选择 ρ 如下: 对 X 中任何 u 和 v, 由 $\rho(u,v) = \phi(\rho(u_0, \phi^{-1}(v)))$ 定义 (u,v) 路, 其中 $\phi \in \mathrm{Aut}^c(G)$ 使得 $\phi(u_0) = u$. 注意到, 如果 $u = u_0$, 那么 ϕ 必是单位元, $\rho(u,v)$ 是确定的. 也注意到 $\rho(u,v)$ 是最短 (u,v) 路.

由定理 11.1.1, 只需证明

$$\tau_x(G,\rho) = \tau_y(G,\rho), \quad \forall\, x, y \in V(G). \tag{11.1.6}$$

令 σ 是 $\mathrm{Aut}^c(G)$ 中唯一元素使得 $\sigma(x) = y$. 则 σ 将由 ρ 确定的且经过 x 的每条 $\rho(u,v)$ 路径变换到由 ρ 确定的且经过 y 的另一条 $\rho(\sigma(u),\sigma(v))$ 路径. 事实上, 令 $\phi \in \mathrm{Aut}^c(G)$ 使得 $u = \phi(u_0)$. 则 $\sigma \circ \phi \in \mathrm{Aut}^c(G)$ 且 $\sigma \circ \phi(u_0) = \sigma(u)$. 于是, 由 $\rho(\sigma(u),\sigma(v))$ 的定义得

$$\begin{aligned}\rho(\sigma(u),\sigma(v)) &= \sigma \circ \phi(\rho(u_0, (\sigma \circ \phi)^{-1}\sigma(v))) \\ &= \sigma \circ \phi(\rho(u_0, \phi^{-1}(v)) = \sigma(\rho(u,v)).\end{aligned}$$

因为 σ 是自同构, 所以若 $u \neq u'$ 或 $v \neq v'$, 则 $\rho(\sigma(u),\sigma(v)) \neq \rho(\sigma(u'),\sigma(v'))$. 这意味着 $\tau_x(G,\rho) \leqslant \tau_y(G,\rho)$. 由对称性得 $\tau_x(G,\rho) \geqslant \tau_y(G,\rho)$. 这证明了等式 (11.1.6), 即定理得证. ∎

作为定理 11.1.1 和定理 11.1.2 的应用, 再举几个例子.

例 11.1.5 考虑超立方体 Q_n $((n \geqslant 2))$ 的转发指数. 因为它是 Cayley 图, 点可迁的, 所以由等式 (11.1.5), 只需计算顶点 $x = 00\cdots00$ 到所有其他顶点的距离. 因为距离 $d(Q_n; x, y)$ 等于顶点 y 中坐标为 1 的个数, 所以从 x 到所有其坐标中有 i 个 1 顶点的距离之和为 $i\binom{n}{i}$. 因此,

$$\sum_{y \in V} d(Q_n; x, y) = \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i} = n2^{n-1}.$$

由等式 (11.1.5), 得

$$\tau(Q_n) = n2^{n-1} - (2^n - 1) = 2^{n-1}(n-2) + 1.$$

因为当 $n \geqslant 2$ 时, $2^{n-1}(n-2)+1$ 为奇数, 所以 Q_n 中任何双向路由选择都不能达到 $\tau(Q_n)$. 这个例子说明, 定理 11.1.2 对双向路由选择是不成立的. 同时也说明, 在一般情况下, 无向图的转发指数并不都由双向路由选择获得.

例 11.1.6 考虑无向圈 C_n $(n \geqslant 3)$, 它是 Cayley 图, 可以利用等式 (11.1.5) 来计算 $\tau(C_n)$. 注意到对 C_n 中任何顶点 x, 存在两顶点使得它们到 x 之间的距离为 i, $i = 1, 2, \cdots, \lfloor \frac{1}{2}(n-1) \rfloor$; 而且如果 n 是偶数, 存在一个顶点使得它到 x 的距离为 $\frac{1}{2}n$. 分别对 n 的奇偶性来计算 $\tau(C_n)$.

如果 n 是奇数, 那么

$$\begin{aligned}\tau(C_n) &= \sum_{y\in V} d(C_n;x,y) - (n-1)\\ &= 2(1+2+\cdots+\frac{1}{2}(n-1)) - (n-1)\\ &= \frac{1}{4}(n-1)(n-3).\end{aligned}$$

如果 n 是偶数, 那么

$$\begin{aligned}\tau(C_n) &= \sum_{y\in V} d(C_n;x,y) - (n-1)\\ &= 2(1+2+\cdots+\frac{1}{2}(n-2)) + \frac{1}{2}n - (n-1)\\ &= \frac{1}{4}(n-2)^2.\end{aligned}$$

因此, 无向圈 C_n 的转发指数

$$\tau(C_n) = \begin{cases} \frac{1}{4}(n-2)^2, & \text{如果 } n \text{ 是偶数;}\\ \frac{1}{4}(n-1)(n-3), & \text{如果 } n \text{ 是奇数.}\end{cases}$$

由定理 11.1.2 知, 在连通 Cayley 图 G 中, 存在最小路由选择 ρ_m 使得 $\tau(G,\rho_m) = \tau(G)$, 即 $\tau(G) = \tau_m(G)$. Cayley 图的这一性质是很有用的, 它大大缩小了具有最小转发指数的路由选择的选取范围, 而且利用现行的求最短路算法就能找到理想的路由选择. 然而, 在一般情况下, 最小的转发指数并不都由最短路由选择获得.

例 11.1.7 考虑轮 W_7. 定义路由选择 ρ: 除 $\rho(2,5) = (2,1,0,5)$, $\rho(5,2) = (5,4,3,2)$ 外, 其余的路同例 11.1.1 定义的最小路由选择 ρ_m 中路一样. 由于

$$\begin{aligned}&\tau_x(W_7,\rho) = 4,\ \tau_2(W_7,\rho) = \tau_5(W_7,\rho) = 2,\\ &\tau_i(W_7,\rho) = 3,\ i = 0,1,3,4.\end{aligned}$$

所以, $\tau(W_7,\rho) = 4 < 6 = \tau(W_7,\rho_m)$.

这个例子说明: 在一般情况下, $\tau(G) \neq \tau_m(G)$. 这为确定网络的路由转发指数带来很大的困难.

现在考虑笛卡儿乘积图的转发指数. 首先介绍一个上界, 它由 Heydemann 等人 [158] 获得的.

定理 11.1.3 设 G 和 G' 是两个阶分别为 n 和 n' 的强连通有向图, 则

$$\tau(G\times G') \leqslant n\tau(G') + n'\tau(G) + (n-1)(n'-1). \tag{11.1.7}$$

不等号对最小路由选择仍然成立. 而且若 G 和 G' 都是 Cayley 图, 则等号成立.

证明 设 ρ 是 G 中路由选择, ρ' 是 G' 中路由选择使得

$$\tau(G) = \tau(G,\rho) \quad \tau(G') = \tau(G',\rho').$$

设 η 是 $G\times G'$ 中路由选择, 其中路 $\eta((i,j'),(k,\ell'))$ 定义如下:

如果顶点 (i,j') 和顶点 (k,ℓ') 都在 Gx' $(x'\in V(G'))$ 中或者都在 xG' $(x\in V(G))$ 中, 那么路 $\eta((i,j'),(k,\ell'))$ 定义为 $\rho(i,k)$ 或 $\rho'(j',\ell')$.

如果两顶点 (i,j') 和 (k,ℓ') 分别在 $Gx'(x'\in V(G'))$ 和 $xG'(x\in V(G))$ 中, 那么

$$\eta((i,j'),(k,\ell'))=\eta((i,j'),(k,j'))\cup\eta(k,j'),(k,\ell')),$$

其中 $\eta((i,j'),(k,j'))$ 表示 Gj' 中同构于 $\rho(i,k)$ 的路, $\eta((k,j'),(k,\ell'))$ 表示 kG' 中同构于 $\rho'(j',\ell')$ 的路.

不难验证, 如此定义的路由选择使不等式 (11.1.7) 成立, 详细的证明留给读者.

如果 ρ 和 ρ' 分别是 G 和 G' 中的最小路由选择, 那么 η 是 $G\times G'$ 中的最小路由选择. 因此仍有

$$\tau(G\times G',\eta_m)\leqslant n\tau(G',\rho'_m)+n'\tau(G,\rho_m)+(n-1)(n'-1).$$

定理得证. ∎

我们举一个例子来说明定理 11.1.3 的应用.

例 11.1.8 对 $n\geqslant 2$ 用归纳法来证明 $\tau(Q_n)=2^{n-1}(n-2)+1$. 显然, $\tau(Q_2)=1$. 假定 $\tau(Q_{n-1})=2^{n-2}(n-3)+1$. 由于 $Q_n=K_2\times Q_{n-1}$, $\tau(K_2)=0$, 而且 K_2 和 Q_{n-1} 都是 Cayley 图, 所以由定理 11.1.3, 得

$$\begin{aligned}\tau(Q_n)&=2^{n-1}\tau(K_2)+2\tau(Q_{n-1})+2^{n-1}-1\\&=0+2(2^{n-2}(n-3)+1)+2^{n-1}-1\\&=2^{n-1}(n-2)+1.\end{aligned}$$

记

$$\sum(G)=\frac{1}{n}\sum_{x\in V}\left(\sum_{y\in V\setminus\{x\}}(d(G;x,y)-1)\right).$$

由定理 11.1.2, Cayley 图 G 的转发指数 $\tau(G)=\Sigma(G)$. 由定理 11.1.3, 式 (11.1.7) 中等号对 Cayley 图是成立的. 一个很自然的问题是: 满足 $\tau(G)=\Sigma(G)$ 的两个图的笛卡儿乘积是否能使式 (11.1.7) 中等号成立. 回答是肯定的.

定理 11.1.4 (Xu 等 [345]) 设 G_i 是 n_i 阶强连通有向图, $\tau_i=\tau(G_i)=\Sigma(G_i)$, $i=1,2$. 则

$$\tau(G_1\times G_2)=n_1\tau_2+n_2\tau_1+(n_1-1)(n_2-1).$$

证明 任取 x_1x_2, $y_1y_2\in V=V_1\times V_2$, 由引理 4.2.1 知,

$$d(G_1\times G_2;x_1x_2,y_1y_2)=d(G_1;x_1,y_1)+d(G_2;x_2,y_2).$$

令 $\Sigma_i=\Sigma(G_i)$, $i=1,2$. 由定理 11.1.1, 有

$$\begin{aligned}\tau(G_1\times G_2)&\geqslant\frac{1}{n_1n_2}\sum_{x_1x_2\in U}\ \sum_{y_1y_2\in U\setminus\{x_1x_2\}}(d(G_1\times G_2;x_1x_2,\,y_1y_2)-1)\\&=\frac{1}{n_1n_2}\sum_{x_1x_2\in U}\ \sum_{y_1y_2\in U\setminus\{x_1x_2\}}(d(G_1;x_1,y_1)\\&\quad+d(G_2;x_2,y_2)-1)\\&=\frac{1}{n_1n_2}\,n_2^2\sum_{x_1\in V_1}\left(\sum_{y_1\in V_1\setminus\{x_1\}}(d(G_1;x_1,y_1)-1)\right)\\&\quad+\frac{1}{n_1n_2}\,n_1^2\sum_{x_2\in V_2}\left(\sum_{y_2\in V_2\setminus\{x_2\}}(d(G_2;x_2,y_2)-1)\right)\\&\quad+(n_1-1)(n_2-1)\\&=n_2\sum_1+n_1\sum_2+(n_1-1)(n_2-1)\\&=n_1\tau_2+n_2\tau_1+(n_1-1)(n_2-1).\end{aligned}$$

再由定理 11.1.3, 该定理成立. ∎

利用归纳法, 立即得到下面的结果, 其证明留给读者.

定理 11.1.5 (Xu 等 [345]) 设 G_i 是 n_i 阶强连通有向图, $\tau_i=\tau(G_i)=\Sigma(G_i)$, $i=1,2,\ldots,k$. 则

$$\begin{aligned}\tau(G_1\times G_2\times\ldots\times G_k)=&\sum_{i=1}^{k}n_1n_2\ldots n_{i-1}(\tau_i-1)n_{i+1}\ldots n_k\\&+(k-1)n_1n_2\ldots n_k+1.\end{aligned}$$ ∎

作为定理 11.1.5 的应用, 我们来确定几类网络的转发指数.

首先注意到 Gauyacq[124] 提出的一类包含 Cayley 图的点可迁图: 拟 Cayley 图 (quasi-Cayley). 并且证明了: 对于任意拟 Cayley 图 G 有 $\tau(G)=\Sigma(G)$. 因此, 定理 11.1.5 对所有拟 Cayley 图的笛卡儿乘积均成立.

例 11.1.9 n 维广义超立方体 $Q(d_1,d_2,\ldots,d_n)=K_{d_1}\times K_{d_2}\times\ldots\times K_{d_n}$, $d_i\geqslant 2$, $i=1,2,\ldots,n$. 对于完全图 K_d, $\tau(K_d)=0=\Sigma(K_d)$. 由定理 11.1.5, 有

$$\tau(Q(d_1,d_2,\ldots,d_n))=(n-1)d_1d_2\ldots d_n+1-\sum_{i=1}^{n}d_1d_2\ldots d_{i-1}d_{i+1}\ldots d_n.$$

特别地,

$$\tau(Q_n(d))=[(d-1)n-d]d^{n-1}+1,$$
$$\tau(Q_n)=\tau(Q_n(2))=(n-2)2^{n-1}+1.$$

例 11.1.10 无向超环面图 $C(d_1,d_2,\ldots,d_n)=C_{d_1}\times C_{d_2}\times\ldots\times C_{d_n}$. 由例 6,

$$\tau(C_d)=\left\lfloor\frac{(d-2)^2}{4}\right\rfloor=\frac{1}{d}\sum_{u\in V}\sum_{v\neq u}(d_{C_d}(u,v)-1)=\sum(C_d).$$

所以, 由定理 11.1.5, 有

$$\begin{aligned}\tau(C(d_1,d_2,\ldots,d_n)) &= \sum_{i=1}^{n} d_1d_2\ldots d_{i-1}(\tau_i-1)d_{i+1}\ldots d_n \\ &\quad + (n-1)d_1d_2\ldots d_n+1 \\ &= \sum_{i=1}^{n} d_1d_2\ldots d_{i-1}\left(\left\lfloor\frac{(d_i-2)^2}{4}\right\rfloor-1\right)d_{i+1}\ldots d_n \\ &\quad + (n-1)d_1d_2\ldots d_n+1 \\ &= \sum_{i=1}^{n} d_1d_2\ldots d_{i-1}\left\lfloor\frac{d_i^2}{4}\right\rfloor d_{i+1}\ldots d_n - d_1d_2\ldots d_n+1.\end{aligned}$$

特别地,

$$\xi(C_n(d)) = nd^{n-1}\left\lfloor\frac{d^2}{4}\right\rfloor-(d^n-1).$$

例 11.1.11 有向超环面图 $\overrightarrow{C}(d_1,d_2,\ldots,d_n)$ 定义为 $\overrightarrow{C}_{d_1}\times\overrightarrow{C}_{d_2}\times\ldots\times\overrightarrow{C}_{d_n}$. 由例 11.1.4,

$$\tau(\overrightarrow{C}_d)=\frac{(d-2)(d-1)}{2}=\sum(\overrightarrow{C}_d).$$

所以, 由定理 11.1.5, 有

$$\begin{aligned}\tau(\overrightarrow{C}(d_1,d_2,\ldots,d_n)) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(d_i-3)\right)d_1d_2\ldots d_n \\ &\quad + (n-1)d_1d_2\ldots d_n+1;\end{aligned}$$

特别地,

$$\tau(\overrightarrow{C}_n(d))=\frac{n}{2}d^n(d-1)-d^n+1.$$

关于转发指数的其他结果, 有兴趣的读者可参阅本节所引用的原始文献, 在那里还有许多没有解决的问题. 特别是, 目前还不知道, 对于给定的点可迁图 G, 确定 $\tau(G)$, 或者求路由选择 ρ 使得 $\tau(G,\rho)=\tau(G)$ 的问题是否是 NP 完备问题.

§11.2 路由选择的边转发指数

Heydemann 等 [158] 提出边转发指数的概念.

设 G 是连通的无向图或者是强连通的有向图, ρ 是 G 的路由选择. G 中边 e 对 ρ 的转发指数, 记为 $\pi_e(G,\rho)$, 定义为由 ρ 确定的路径经过边 e 的条数. (G,ρ) 的**边转发指数** (edge-forwarding index), 记为 $\pi(G,\rho)$, 定义为

$$\pi(G,\rho)=\max\{\pi_e(G,\rho):\ e\in E(G)\};$$

G 的边转发指数和最小路由边转发指数分别定义为

$$\pi(G)=\min\{\pi(G,\rho):\ \forall\ \rho\}\ 和\ \pi_m(G)=\min\{\pi(G,\rho_m):\ \forall\ \rho_m\}.$$

显然, $\pi(G)\leqslant \pi_m(G)$.

例 11.2.1 考虑轮 W_7 和它的两个路由选择 ρ_m 和 ρ, 它们分别在例 11.1.1 和例 11.1.7 中有定义. 每条边对 ρ_m 的转发指数为:

$$\pi_{ix}(W_7,\rho_m)=4,\ \pi_{i(i+1)}(W_7,\rho_m)=6,\ i=0,1,\cdots,5.$$

每条边对 ρ 的转发指数为

$$\pi_{2x}(W_7,\rho)=\pi_{5x}(W_7,\rho)=2,$$

$$\pi_{ix}(W_7,\rho)=4,\ i=0,1,3,4,$$

$$\pi_{i(i+1)}(W_7,\rho)=7,\ i=0,1,\cdots,5.$$

所以, $\pi(W_7,\rho_m)=6$, $\pi(W_7,\rho)=7$.

与点转发指数一样, 边转发指数也是受网络容量限制. “好的”路由选择和“好的”网络应该有小的边转发指数. 因此, 边转发指数也是度量路由选择优劣的重要参数. Heydemann 等 [159] 证明了: 对于直径不小于 3 的图, 最小双向一致路由选择边转发指数问题是 NP 完备的.

定理 11.2.1 (Heydemann 等 [158]) 设 $G=(V,E)$ 是 n 阶连通无向图. 则

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum_{x,y\in V}d(G;x,y)\leqslant \pi(G)\leqslant\left\lfloor\frac{1}{2}n^2\right\rfloor. \tag{11.2.1}$$

而且, $\pi(G)$ 的下界达到当且仅当 G 中存在最小路由选择 ρ 使得它在每条边上有相等的边转发指数.

证明 设 $G=(V,E)$ 是 n 阶连通无向图, ρ 是 G 中路由选择使得 $\pi(G)=\pi(G,\rho)$, $e\in E$ 使得 $\pi(G,\rho)=\pi_e(G,\rho)$. 则存在 $V(G)$ 的 2 部划分 $\{X,Y\}$ 使得 $e\in E(X)$. 令 $|X|=q$ 且 $|Y|=n-q$. 因为由 ρ 确定且经过边 e 的路径的任何两端点必分别在 X 和 Y 中, 所以, 这样的路径最多有 $2q(n-q)$. 因此

$$\pi(G)=\pi(G,\rho)=\pi_e(G,\rho)\leqslant 2q(n-q)\leqslant\left\lfloor\frac{1}{2}n^2\right\rfloor.$$

至于 $\pi(G)$ 的下界, 因为路径 $\rho(x,y)$ 至少有 $d(G;x,y)$ 条边, 所以, 每条 $\rho(x,y)$ 对边转发指数之和的贡献至少为 $d(G;x,y)$, 其中等号成立当且仅当 $\rho(x,y)$ 是最短路. 因此, ρ 的边转发指数之和

$$\sum_{e\in E}\pi_e(G,\rho)\geqslant\sum_{(x,y)\in V\times V}d(G;x,y).$$

于是,

$$\pi(G) = \pi(G,\rho) \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \sum_{(x,y)\in V\times V} d(G;x,y),$$

等号成立当且仅当 ρ 是最小路由选择, 而且它在每条上的转发指数是相等的. ∎

对于有向图也有类似的结论, 其证明留给读者作为练习.

定理 11.2.2 (Manoussakis 和 Tuza[239]) 设 G 是 n 阶强连通有向图, 则

$$\frac{1}{\varepsilon} \sum_{x,y\in V} d(G;x,y) \leqslant \pi(G) \leqslant (n-1)(n-2)+1.$$

等式

$$\pi(G) = \pi_m(G) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{x,y\in V} d(G;x,y)$$

成立当且仅当存在最小路由选择 ρ_m 使得它对任何有向边的转发指数都相等. ∎

例 11.2.2 $\pi(K_d) = 2$ (证明留给读者).

例 11.2.3 $\pi(C_d) = \left\lfloor \frac{d^2}{4} \right\rfloor$, $\pi(\overrightarrow{C}_d) = \frac{d(d-1)}{2}$ (证明留给读者).

由定理 11.2.1, Solé[287] 构造出无穷类图, 它们都有小的边转发指数.

关于笛卡儿乘积的边转发指数, Heydemann 等 [158] 获得如下结果, 证明类似于定理 11.1.3, 留给读者作为练习.

定理 11.2.3 设 G_1 和 G_2 分别是 n_1 和 n_2 阶连通图, 则

$$\pi(G_1 \times G_2) \leqslant \max\{n_1\pi(G_2),\ n_2\pi(G_1)\}. \tag{11.2.2}$$

为讨论式 (11.2.2) 成立的条件, 令

$$\Sigma'(G) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{(x\,y)\in V\times V} d(G;x,y).$$ ∎

定理 11.2.4 (Xu 等 [345]) 对 $i=1,2$, G_i 是 n_i 阶连通图, $\pi_i = \Sigma(G_i) = \Sigma'_i$, 则

$$\pi(G_1 \times G_2) = \max\{n_1\pi_2,\ n_2\pi_1\}.$$

证明 设 ρ 是使得 $\pi(G_1\times G_2) = \pi(G_1\times G_2,\rho)$ 成立的 $G_1\times G_2$ 中的路由选择. 由引理 4.2.1 知, 对任何 $u_1u_2, v_1v_2 \in U = V_1\times V_2$, 路径 $\rho(u_1u_2, v_1v_2)$ 的长至少为 $d(G_1;u_1,v_1) + d(G_2;u_2,v_2)$. 下面考虑两种情形.

首先考虑经过子图 $\cup_{y\in V_2} G_1\times\{y\}$ 中边的情况. 对于任意 $y\in V_2$, 令 $\ell_y(u_1u_2, v_1v_2)$ 表示路径 $\rho(u_1u_2,v_1v_2)$ 经过子图 $G_1\times\{y\}$ 中边的条数. 显然,

$$\sum_{y\in V_2} \ell_y(u_1u_2, v_1v_2) \geqslant d(G_1;u_1,v_1).$$

于是,

$$\sum_{u_1u_2,v_1v_2\in U}\sum_{y\in V_2}\ell_y(u_1u_2,v_1v_2)\geqslant\sum_{(u_2,v_2)\in V_2\times V_2}\left(\sum_{(u_1,v_1)\in V_1\times V_1}d_{G_1}(u_1,v_1)\right)$$
$$=n_2^2\sum_{(u_1,v_1)\in V_1\times V_1}d(G_1;u_1,v_1).$$

则路由选择 ρ 经过 $\cup_{y\in V_2}G_1\times\{y\}$ 中的边的总次数满足下面的不等式:

$$\sum_{y\in V_2}\sum_{e\in G_1\times\{y\}}\pi(G_1\times G_2,\rho,e)=\sum_{u_1u_2,v_1v_2\in U}\sum_{y\in V_2}\ell_y(u_1u_2,v_1v_2)$$
$$\geqslant n_2^2\sum_{(u_1,v_1)\in V_1\times V_1}d(G_1;u_1,v_1).$$

由于经过 $\cup_{y\in V_2}G_1\times\{y\}$ 中每条边的路径的最大数不会小于所有边的平均数, 从而

$$\begin{aligned}\pi(G_1\times G_2)&=\pi(G_1\times G_2,\rho)\\&\geqslant\frac{1}{n_2\varepsilon_1}n_2^2\left(\sum_{(u_1,v_1)\in V_1\times V_1}d(G;u_1,v_1)\right)\\&=n_2{\sum_1}'.\end{aligned}$$

另外的情形是考虑路由选择 ρ 经过子图 $\cup_{x\in V_1}\{x\}\times G_2$ 中边的情况, 同样地可以得到 $\pi(G_1\times G_2)\geqslant n_1\Sigma_2'$. 所以,

$$\begin{aligned}\pi(G_1\times G_2)&\geqslant\max\left\{n_2{\sum}_1',\ n_1{\sum}_2'\right\}\\&=\max\{n_2\pi_1,\ n_1\pi_2\}.\end{aligned}$$

再由定理 11.2.3, 立即知该定理成立. ∎

利用归纳法, 立即得到下面的结果, 其证明留给读者.

定理 11.2.5 (Xu 等 [345]) 对 $i=1,2,\ldots,k$, G_i 是 n_i 阶连通图, $\pi_i=\Sigma_i'$, 则

$$\pi(G_1\times G_2\times\ldots\times G_k)=\max_{1\leqslant i\leqslant k}\{n_1n_2\ldots n_{i-1}\pi_in_{i+1}\ldots n_k\}.$$ ∎

作为定理 11.2.5 的应用, 我们来确定几类网络的边转发指数.

例 11.2.4 n 维广义超立方体 $Q(d_1,d_2,\ldots,d_n)=K_{d_1}\times K_{d_2}\times\ldots\times K_{d_n}$. 因为 $\pi(K_d)=2=\Sigma'(K_d)$, 所以, 由定理 11.2.5, 有

$$\pi(Q(d_1,d_2,\ldots,d_n))=2\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_1d_2\ldots d_{i-1}d_{i+1}\ldots d_n\}.$$

特别地,

$$\pi(Q_n(d)) = 2d^{n-1},$$
$$\pi(Q_n) = 2^n.$$

例 11.2.5 无向超环面图 $C(d_1, d_2, \ldots, d_n) = C_{d_1} \times C_{d_2} \times \ldots \times C_{d_n}$. 因为

$$\pi(C_d) = \left\lfloor \frac{d^2}{4} \right\rfloor = \frac{1}{d} \sum_{(u,v)\in V\times V} d_{C_d}(u,v) = \sum{}'(C_d).$$

所以, 由定理 11.2.5, 有

$$\begin{aligned}\pi(C(d_1, d_2, \ldots, d_n)) &= \max_{1\leqslant i\leqslant n} \{d_1 d_2 \ldots d_{i-1} \pi_i d_{i+1} \ldots d_n\} \\ &= \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left\{d_1 d_2 \ldots d_{i-1} \left\lfloor \frac{d_i^2}{4} \right\rfloor d_{i+1} \ldots d_n\right\}.\end{aligned}$$

特别地,

$$\pi(C_n(d)) = d^{n-1} \left\lfloor \frac{1}{4} d^2 \right\rfloor.$$

例 11.2.6 有向超环面图 $\overrightarrow{C}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ 定义为 $\overrightarrow{C}_{d_1} \times \overrightarrow{C}_{d_2} \times \ldots \times \overrightarrow{C}_{d_n}$. 因为

$$\pi(\overrightarrow{C}_d) = \frac{d(d-1)}{2} = \sum{}'(\overrightarrow{C}_d).$$

所以, 由定理 11.2.5, 有

$$\pi(\overrightarrow{C}(d_1, d_2, \ldots, d_n)) = \frac{1}{2} \max_{1\leqslant i\leqslant n} \{d_1 \ldots d_{i-1} d_i (d_i - 1) d_{i+1} \ldots d_n\}.$$

特别地,

$$\pi(\overrightarrow{C}_n(d)) = \frac{1}{2} d^n (d-1).$$

最后讨论点转发指数和边转发指数之间的关系.

定理 11.2.6 (Heydemann 等 [158]) 对于每个 n 阶且最大度为 Δ 的连通无向图 G, 有

(a) $2\tau(G) + 2(n-1) \leqslant \Delta\pi(G)$;

(b) $\pi(G) \leqslant \tau(G) + 2(n-1)$;

(c) $\pi_m(G) \leqslant \tau_m(G) + 2(n-\delta)$.

证明 设 G 是 n 阶连通无向图, x 是 G 的顶点, ρ 是 G 的路由选择. G 中有 $2(n-1)$ 条以 x 为端点的路径. 经过 x 的路径在与 x 关联的边集 $E_G(x)$ 上产生的转发指数是 $2\tau_x(G,\rho)$. 因此, ρ 在与 x 关联的边集 $E_G(x)$ 上产生的边转发指数之和

$$\sum_{e\in E_G(x)} \pi_e(G,\rho) = 2\tau_x(G,\rho) + 2(n-1).$$

于是,

$$2\tau_x(G,\rho)+2(n-1)\leqslant\Delta\pi(G,\rho).$$

设 ρ' 是 G 中路由选择, 它使得 $\pi(G,\rho')$ 最小. 则对每个 $x\in V(G)$, 有

$$2\tau_x(G,\rho')+2(n-1)\leqslant\Delta\pi(G,\rho'),$$

$$2\tau(G,\rho')+2(n-1)\leqslant\Delta\pi(G).$$

因为 $\tau(G)\leqslant\tau(G,\rho')$, 所以

$$2\tau(G)+2(n-1)\leqslant\Delta\pi(G).$$

这证明了结论 (a).

为了证明结论 (b), 取 G 中一个路由选择 ρ_0 使得 $\tau(G,\rho_0)=\tau(G)$. 考虑由 ρ_0 确定且经过边 $e=xy$ 的路径. 边转发指数 $\pi_e(G,\rho_0)$ 最多为 $\tau_y(G,\rho_0)$ 加上以 y 为端点且经过 e 的路径数 (这个数至多是 $2(n-1)$). 于是,

$$\pi_e(G,\rho_0)\leqslant\tau_y(G,\rho_0)+2(n-1)\leqslant\tau(G)+2(n-1).$$

由 e 的任意性得

$$\pi(G)\leqslant\pi(G,\rho_0)\leqslant\tau(G)+2(n-1).$$

结论 (b) 得证.

(c) 的证明留给读者作为练习. ∎

§11.3 某些著名网络的转发指数

尽管网络路由转发指数的确定是NP-hard 问题, 但某些子问题的讨论是有意义的. 比如, Chung 等 [67] 提出最大度被限制的网络的点转发指数的问题, Heydemann 等 [158] 提出最大度被限制的网络的边转发指数的问题和连通度被限制的点和边转发指数的问题. 对这些问题的讨论和结果, 除提到的两篇原始文献外, 还可以参见 [44,351]. 还有许多有趣的问题和结果, 也存在许多未解决的问题. 由于篇幅的限制, 不一一介绍了, 有兴趣的读者可参见徐敏的博士论文 [350] 及其文末的参考文献.

确定转发指数的基本方法是首先通过计算网络距离和, 利用定理 11.1.1 和定理 11.2.1 得到转发指数的下界; 然后寻找适当的路由选择使其转发指数正好等于下界. 某些著名网络的转发指数已被确定, 这里罗列一些已知结果. 没有表明出处的, 都能在 Heydemann 等 [158] 和徐敏的博士论文 [350] 中找到.

1. 对于完全图 K_n, $\tau(K_n)=0$, $\pi(K_n)=2$.

2. 对于星 $K_{1,n-1}$, $\tau(K_{1,n-1})=(n-1)(n-2)$, $\pi(K_{1,n-1})=2(n-1)$.

3. 对于路 P_n, $\tau(P_n)=2\left\lfloor\frac{1}{2}n\right\rfloor\left(\left\lceil\frac{1}{2}n\right\rceil-1\right)$, $\pi(P_n)=2\left\lfloor\frac{1}{2}n\right\rfloor\left\lceil\frac{1}{2}n\right\rceil$.

4. 对于轮 W_n,

$$\tau_m(W_n)=n^2-7n+6,\quad n\geqslant 7,$$

$$\tau(W_n)=\lceil(3-2\sqrt{2})(n-1)^2+(\sqrt{2}-2)(n-1)+c\rceil,\quad \frac{1}{8}\sqrt{2}\leqslant c\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{2};$$

$$\pi_m(W_n)=2(n-5),\quad n\geqslant 8,$$

$$\pi(W_n)=2n-4\sqrt{2n}+O(1),\quad n\geqslant 8;$$

$$\pi(W_n)=2n-4p-2,\quad n=\frac{1}{2}p(p+5)+1.$$

5. 直径为 2, 围长为 5 的 d 正则图 G,

$$\tau(G)=\tau_m(G)=d(d-1);\quad \pi(G)=\pi_m(G)=4d-2.$$

6. 对于完全 2 部分图 $K_{m,n}$ $(m\geqslant n)$,

$$\tau_m(K_{m,n})=\tau(K_{m,n})=\left\lceil\frac{m(m-1)}{n}\right\rceil;$$

$\pi_m(K_{m,1})=2m$; 如果 $2\leqslant n\leqslant m$, 则

$$\left\lceil\frac{2m(m-1)+2n(n-1)}{mn}\right\rceil+2\leqslant\pi_m(K_{m,n})\leqslant\left\lceil\frac{m-1}{n}\right\rceil.$$

特别地,

$$\pi_m(K_{n,n})=\pi_m(K_{n,n})=\begin{cases}4, & \text{若 } n=2;\\ 5, & \text{若 } n=3,\ 4;\\ 6, & \text{若 } n\geqslant 5;\end{cases}$$

7. 对有向圈 C_n $(n\geqslant 3)$,

$$\tau(C_n)=\frac{1}{2}(n-1)(n-2);\quad \pi(C_n)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

对无向圈 C_n $(n\geqslant 3)$,

$$\tau_m=\tau(C_n)=\left\lfloor\frac{1}{4}(n-1)^2\right\rfloor;\quad \pi_m=\pi(C_n)=\left\lfloor\frac{1}{4}n^2\right\rfloor.$$

8. (Xu 等 [345]) 对于无向双环面网 $C(d_1,d_2,\cdots,d_n)$,

$$\tau(C(d_1,\cdots,d_n))=\sum_{i=1}^{n}d_1\cdots d_{i-1}\left\lfloor\frac{d_i^2}{4}\right\rfloor d_{i+1}\cdots d_n-d_1\cdots d_n+1;$$

$$\pi(C(d_1,\cdots,d_n))=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{d_1\cdots d_{i-1}\left\lfloor\frac{d_i^2}{4}\right\rfloor d_{i+1}\cdots d_n\right\}.$$

特别地,

$$\tau(C_n(d)) = nd^{n-1}\left\lfloor \frac{1}{4}d^2 \right\rfloor - (d^n - 1), \quad \pi(C_n(d)) = d^{n-1}\left\lfloor \frac{1}{4}d^2 \right\rfloor.$$

9. (Xu 等 [345]) 对于有向双环面网 $\overrightarrow{C}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$,

$$\tau(\overrightarrow{C}(d_1, \cdots, d_n)) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(d_i - 3)\right) d_1 \cdots d_n + (n-1)d_1 \cdots d_n + 1;$$

$$\pi(\overrightarrow{C}(d_1, \cdots, d_n)) = \frac{1}{2}\max_{1 \leqslant i \leqslant n}\{d_1 \cdots d_{i-1} d_i (d_i - 1) d_{i+1} \cdots d_n\}.$$

特别地,

$$\tau(\overrightarrow{C}_n(d)) = \frac{n}{2}d^n(d-1) - d^n + 1; \quad \pi(\overrightarrow{C}_n(d)) = \frac{1}{2}d^n(d-1).$$

10. (徐敏 [350] 对于循环有向图 $G(d^n; S)$, $S = \{1, d, \cdots, d^{n-1}\}$, $d \geqslant 2$, $n \geqslant 2$,

$$\tau(G(d^n; S)) = \frac{1}{2}(d-1)d^n n - (d^n - 1);$$

$$\pi(G(d^n; S)) = \frac{1}{2}(d-1)d^n.$$

11. (Xu 等 [345]) 对于广义超立方体网络 $Q(d_1, d_2, \cdots, d_n)$,

$$\tau(Q(d_1, \cdots, d_n)) = (n-1)d_1 \cdots d_n + 1 - \sum_{i=1}^{n} d_1 \cdots d_{i-1} d_{i+1} \cdots d_n,$$

$$\pi(Q(d_1, \cdots, d_n)) = 2 \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\{d_1 \cdots d_{i-1} d_{i+1} \cdots d_n\}.$$

特别地,

$$\tau(Q_n(d)) = ((d-1)n - d)d^{n-1} + 1; \quad \pi(Q_n(d)) = 2d^{n-1}.$$

对超立方体网络 Q_n,

$$\tau(Q_n) = (n-2)2^{n-1} + 1; \quad \pi(Q_n) = 2^n.$$

12. (Hou 等 [166]) 对折叠超立方体网络 FQ_n,

$$\tau(FQ_n) = \tau_m(FQ_n) = (n-1)2^{n-1} + 1 - \frac{n+1}{2}\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil},$$

$$\pi(FQ_n) = \pi_m(FQ_n) = 2^n - \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}.$$

13. (徐敏 [350]) 对于增广立方体网络 (augmented cube) AQ_n,

$$\tau(AQ_n) = \frac{2^n}{9} + \frac{(-1)^n}{9} + \frac{n2^n}{3}; \quad \pi(AQ_n) = 2^{n-1}.$$

14. (Chang 等 [56]) 对于交叉超立方体网络 CQ_n $(n \geqslant 2)$,

$$\pi(CQ_n) = \pi_m(CQ_n) = 2^n.$$

然而, $\tau(CQ_n)$ 还没有确定.

15. (Shahrokhi 和 Székely[282]) 对于立方连通网 $CCC(n)$ 和环绕蝶形网 $WBF(n)$,

$$\pi(CCC(n)) = \pi_m(CCC(n)) = \frac{5}{4}n^2 2^n(1 - o(1));$$
$$\pi(WBF(n)) = \pi_m(WBF(n)) = \frac{5}{4}n^2 2^{n-1}(1 + o(1)).$$

16. (Hou 和 Xu[164]) 对于 n 维 2Δ 正则的缠绕蝶形无向图 $UB_\Delta(n)$, 有

$$\tau(UB_\Delta(n)) < \frac{5n^2 - 4n}{4}\Delta^n - (n-1);$$

对于 n 维 Δ 正则的缠绕蝶形有向图 $B_\Delta(n)$, 有

$$\tau(B_\Delta(n)) = \frac{3n(n-1)}{2}\Delta^n - \frac{n(\Delta^n - 1)}{\Delta - 1} + 1.$$

17. (Gauyacq[124]) 对于星图网络 S_n,

$$2(n-1)!(n-1) + \lceil 2\alpha \rceil \leqslant \pi(S_n) \leqslant 2(n-1)!(n-1) + 2\lceil \alpha \rceil,$$

其中 $\alpha = (n-2)! \sum\limits_{i=2}^{n-1} \frac{n-i}{i}$.

18. (Gauyacq[124]) 对称群 S_n 关于集 $\{T_{i,j} : 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$ 的 Cayley 图称为完全对换图 (complete-transposition graph) CT_n, 其中 $T_{i,j}$ 是交换 i 和 j 的置换 [200].

$$2(n-2)!(2n-3) - \lfloor 2\beta \rfloor \leqslant \pi(CT_n) \leqslant 2(n-2)!(2n-3) - 2\lfloor \beta \rfloor,$$

其中 $\beta = 2(n-2)! \sum\limits_{i=3}^{n} \frac{1}{i}$.

19. 对于 de Brujin 无向图 $UB(d, n)$ 和 Kautz 无向图 $UK(d, n)$,

$$\tau(UB(d,n)) \leqslant (n-1)d^n, \quad \tau(UK(d,n)) \leqslant (n-1)d^n;$$

$$\pi(UB(d,n)) \leqslant 2nd^{n-1}, \quad \pi(UK(d,n)) \leqslant 2(n-1)d^{n-2}(d+1).$$

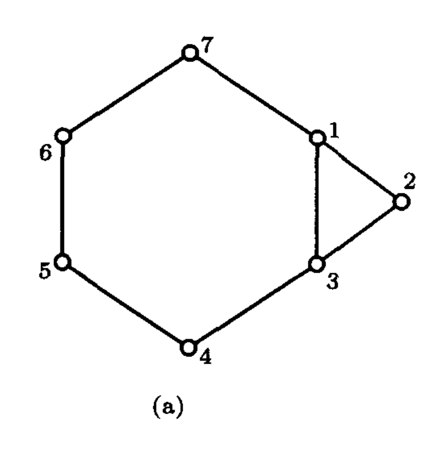
§11.4 容错路由选择的传输延迟

这一节考虑路由选择的容错性质. 设 G 是容错网络的拓扑结构, ρ 是它的路由选择. 如果点或者边故障发生在由 ρ 确定的固定路 $\rho(x,y)$ 中, 那么点 x 的数据不再利用 $\rho(x,y)$ 传输到 y. 然而, 因为 G 是容错的, 即 x 和 y 仍然是连通的, 所以, 点 x 的数据可以通过一系列其他的幸存的路传输到 y, 即存在一系列顶点 $z_1, z_2, \cdots, z_m$ 使得幸存的路序列 $\rho(x, z_1), \rho(z_1, z_2), \cdots, \rho(z_m, y)$ 仍然能正常工作. 点 x 的数据通过点 $z_1, z_2, \cdots, z_m$ 和 $m+1$ 条幸存的路 $\rho(x, z_1), \rho(z_1, z_2), \cdots, \rho(z_m, y)$ 传输到 y. 这个过程是在剩余顶点之间的幸存路径中进行. 为了使传输不能太大, 所经过幸存路径的数目要尽可能地小. Dolev 等 [78] 是通过幸存路径图的概念将这个问题归结为图论问题的.

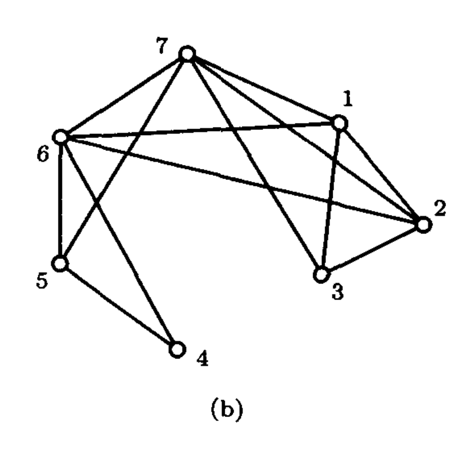
设 F 是 $V(G) \cup E(G)$ 的子集且 $|F| < \kappa(G)$. F 对应网络中故障点和边集. 令 $F_V = F \cap V(G)$, $F_E = F \cap E(G)$. 由 ρ 确定的路径称为回避 (avoid) F, 如果它不含 F 中任何元素.

幸存路径图 (surviving route graph), 记为 $R(G,\rho)/F$, 是有向图, 它的顶点集为 $V(G) \setminus F_V$; 如果 $\rho(x,y)$ 回避 F, 那么存在从 x 到 y 的有向边. 显然, 如果 G 是无向图且 ρ 是双向路由选择, 那么 $R(G,\rho)/F$ 是无向图.

例 11.4.1 考察图 11.1(a) 中所示的无向图 G. 如果取 G 中双向最小路由选择 ρ 使得路径 $\rho(i,j)$ 尽可能地经过边 34. 例如, 取 $\rho(4,7) = (4,3,1,7)$, 而不取路 $(4,5,6,7)$; 取 $\rho(1,5) = (1,3,4,5)$, 而不取路 $(1,7,6,5)$ 等等.



(a)



(b)

图 11.1 幸存路由图的例子

如果边 34 发生故障, 而且是唯一的故障, 即 $F = \{34\}$, 那么幸存路径图 $R(G,\rho)/F$ 如图 11.1(b) 所示, 它的直径是 3. 在这种情况下, 假定顶点 3 需要传播信息到所有其余的顶点. 因为顶点 3 只能沿 ρ 确定的路径传送这个信息, 该信息到不了顶点 4, 5 和 6. 如果顶点 7 重新传播这个信息, 这个信息能到达顶点 5 和顶点 6, 但

仍然到不了顶点 4, 因为 $\rho(7,4)$ 已被破坏. 为了确保顶点 4 得到这个信息, 顶点 5 或者 6 必须重新传播一次. 为了使每个顶点都得到信息, 重新传播的最大次数就是幸存路径图 $R(G,\rho)/F$ 的直径.

如果仅有顶点 2 失灵, 即 $F=\{2\}$, 那么由 ρ 确定的所有路径都不会破坏. 因此对应的幸存路径图是 6 阶完全图, 它的直径为 1.

如上所述, 幸存路径图 $R(G,\rho)/F$ 的直径就是为确定每个顶点都得到信息所必须重新传播的最大次数. 假定沿固定的路径传输信息所用的时间与路长无关, 那么幸存路径图的直径给出了完成传播所需时间的好的估计.

显然, 对于给定的路由选择 ρ, 幸存路径图 $d(R(G,\rho)/F)$ 的直径与故障集 F 有关. 如果 $\kappa(G)\geqslant 2$ 且 $|F|<\kappa(G)$, 那么 $d(R(G,\rho)/F)$ 的直径是确定的. 由于故障集 F 不是事先知道的, 所以有意义的度量是

$$d(G,\rho)=\max\{d(R(G,\rho)/F):\ F\subset V(G)\cup E(G),|F|<\kappa(G)\},$$

这个参数称为*容错路由选择 ρ 的延迟* (delay of the fault-tolerant routing). 因为沿着固定路径传输信息所需的时间常常受控于信息在该路径两端点的处理时间, 所以 $d(G,\rho)$ 是度量路由选择 ρ 优劣的参数. 显然, 小的 $d(G,\rho)$ 意味着路由选择 ρ 是"好的", 反之是"差的".

问题是: 对 G 中任何故障集 F ($|F|<\kappa(G)$), 怎样选取路由选择 ρ 使 $d(G,\rho)$ 尽可能小. 这个问题已吸引了人们极大的研究注意力, 并提出许多有趣的图论问题, 其中有些仍未解决. 特别地, 人们还不知道这个问题是否是 NP 完备问题.

容易得到 $d(G,\rho)$ 的下界.

定理 11.4.1 对任何图 G 和路由选择 ρ, 如果故障集非空, 那么 $d(G,\rho)\geqslant 2$.

证明 如果 G 是完全有向图, 那么路由选择 ρ 为两顶点之间的连边. 对任何含边 (x,y) 但不含顶点 x 和 y 的故障集 F, x 和 y 在 $R(G,\rho)/F$ 中的距离至少为 2. 因此, $d(R(G,\rho)/F)\geqslant 2$, 即 $d(G,\rho)\geqslant 2$.

如果 G 不是完全图, 那么 $d(G)\geqslant 2$. 于是存在两顶点 x 和 y 使得从 x 到 y 的任何路长至少为 $d(G)\geqslant 2$. 因此, 由任何路由选择 ρ 确定的路径 $\rho(x,y)$ 长至少为 2. 取故障集 F 使得它包含 $\rho(x,y)$ 的内部点, 但不含 x 和 y. 则 $d(R(G,\rho)/F)\geqslant 2$, 即 $d(G,\rho)\geqslant 2$. ∎

对于给定的容错网络 G, 如果存在路由选择 ρ 使得 $d(G,\rho)=2$, 那么称 ρ 是*最优的* (optimal).

例 11.4.2 完全图 K_n 有唯一的最小路由选择 ρ_m. 因此, 当 $n\geqslant 3$ 时, K_n 的最小路由选择是最优的. 事实上, 假定 F 是故障集, $|F|<n-1=\kappa(K_n)$. 那么对任何 $x,y\in V(K_n)\setminus F$, 或者 $xy\notin F$, 或者存在 $z\in V\setminus F$ 使得边 $xz,zy\notin F$ (因为 $|F|\leqslant n-2$). 这说明 K_n-F 中存在长至多 2 的 (x,y) 路, 即 $d(R(K_n,\rho_m)/F)\leqslant 2$. 因此, $d((K_n,\rho_m)/F)\leqslant 2$. 由定理 11.3.1 知, 最小路由选择 ρ_m 是最优的.

例 11.4.3 考虑轮 W_{1+n} $(n \geqslant 6)$. 取路由选择 ρ 如下: 轮周 C_n 上任何两顶点之间的最短路是 C_n 上的最短路, 其余的路是两顶点之间的连边. 易知, 当 $n \geqslant 6$ 时, 如此选取的路由选择 ρ 不是最小的. 但也容易看到, 无论怎样选取故障集 F, 只要 $|F| < 3 = \kappa(W_{1+n})$, 都有 $d(R(W_{1+n}, \rho)/F) \leqslant 2$. 由定理 11.3.1 知, $d(W_{1+n}, \rho) = 2$. 这说明 ρ 是最优的.

现在选取 W_{1+n} 的最小路由选择 ρ_m 如下: 轮周上任何不相邻的两顶点之间的最短路必经过轮心, 其余的路是两顶点之间的连边. 如果轮心发生故障, 而且是唯一的故障, 那么容易看到幸存路径图 $R(G, \rho_m)$ 是长为 n 的无向圈, 它的直径为 $\lfloor n/2 \rfloor$, 即 $d(R(W_{1+n}, \rho_m)/F) = \lfloor n/2 \rfloor$. 因此, 当 $n \geqslant 6$ 时, 有 $d(W_{1+n}, \rho_m) \geqslant \lfloor n/2 \rfloor \geqslant 3$.

从上面的例子可以看到, 最优的路由选择并不一定是最小的; 反之, 最小的路由选择并也不一定是最优的. 这给我们寻找最优路由选择带来很大困难. 尽管如此, 最小路由选择是有用的, 因为最小路由选择是容易找到的. 因此, 寻找一些网络使得它的任何最小路由选择有尽可能小的延迟就显得十分重要了.

文献中已经找到一些这样的网络, 我们列出它们, 并叙述相关的结果, 但不再叙述其证明.

由定理 7.2.2 和定理 8.1.4 知, de Brujin 有向图 $B(d,n)$ 和 Kautz 有向图 $K(d,n)$ 中任何两个顶点 x 和 y, 存在唯一的最短 (x,y) 路. 这说明 $B(d,n)$ 和 $K(d,n)$ 中的最小路由选择是唯一的. 设 ρ_1 和 ρ_2 分别是 $B(d,n)$ 和 $K(d,n)$ 中的最小路由选择. Homobono 和 Peyrat[163] 证明了 $d(B(d,n), \rho_1) = d(K(d,n), \rho_2) = 2$. 这说明 $B(d,n)$ 和 $K(d,n)$ 中的最小路由选择是最优的.

对超立方体 Q_n, Dolev 等 [78] 证明了对 Q_n 中的任何路由选择 ρ 有 $d(Q_n, \rho) \leqslant 3$, 而且对于最小路由选择 $\rho_{\ell r}$ 有 $d(Q_n, \rho_{\ell r}) = 2$, 其中 $\rho_{\ell r}(x,y)$ 定义在 5.1 节的注释 9 中 (即是通过从左到右依次改变 x 的坐标到达 y). 最小路由选择 $\rho_{\ell r}$ 是最优的.

Dolev 等人的上述结果被 Broder 等 [47] 推广到无向图的笛卡儿乘积图; 也被 Xu[317] 推广到有向超环面网 $\overrightarrow{C}(d_1, d_2, \cdots, d_k)$.

对于强连通的双环网 $G(n;\ r,\ s)$, Escudero 等 [95] 证明了存在路由选择 ρ 使得 $d(G(n;r,s),\rho) = 2$.

§11.5 幸存路径图直径的某些上界

一般说来, 对于给定的 (G,ρ), 确定 $d(G,\rho)$ 是相当困难的. 因此, 对于某些路由选择 ρ, 给出 $d(G,\rho)$ 的某些上界是有意义的. 这一节介绍一些上界. 首先介绍属于 Dolev 等 [78] 得到的上界.

定理 11.5.1 设 G 是 κ $(\geqslant 2)$ 连通无向图. 则存在双向路由选择 ρ 使得

$$d(G,\rho) \leqslant \max\{2\kappa - 2, 4\}.$$

证明 不失一般性, 假定 G 不是完全图. 设 $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_\kappa\}$ 是 G 的 κ 点分离集, $G_1,G_2,\cdots,G_m$ $(m\geqslant 2)$ 是 $G-S$ 的所有连通分支. 因为 G 是 κ 连通的, 所以由定理 1.5.4 知, 对任何 $x\in G_i$, 存在扇 $F_\kappa(x,S)$.

取 G 的路由选择 ρ 如下:

$$\rho(x,y)=\rho(y,x)=\begin{cases}\text{边 } xy, & \text{当 } xy\in E(G);\\ F_\kappa(x,S) \text{ 中 } xy \text{ 路}, & \text{当 } x\notin S \text{ 且 } y\in S;\\ xy \text{ 路}, & \text{其他情形}.\end{cases}$$

任取故障集 F, $|F|\leqslant\kappa-1$. 令 $R=R(G,\rho)/F$. 为了证明定理, 只需证明对 R 中任何两顶点 x 和 y 有 $d(R;x,y)\leqslant\max\{2\kappa-2,4\}$. 为此, 令

$$F_0=F\cap(S\cup E(G[S])),$$

$$F_j=F\cap(V(G_j)\cup E(G_j)\cup E_G(S,G_j)),\ j=1,2,\cdots,m.$$

则 $|F_0|+|F_1|+\cdots+|F_m|=|F|\leqslant\kappa-1$.

注意到, 对任何 $z\in V(G_j)\setminus F$, 存在 κ 条内点不交的 (z,s_j) 路 $\rho(z,s_j)$, 其中至少一条回避 F (因为 $|F|<\kappa=|S|$). 这说明在 R 中, 对任何 $z\in V(G_j)\setminus F$, 它必与 $S\setminus F$ 中某顶点相邻.

如果存在某个 $j\in\{1,2,\cdots,m\}$ 使得 $F_j=\emptyset$, 那么能断定 $d(R;x,y)\leqslant 4$. 事实上, 如果 $x,y\in V(G_j)$, 那么 R 中存在 (x,y) 路经过 $S\setminus F$ 中点. 因此, $d(R;x,y)\leqslant 2$. 如果 $x,y\in S\backslash F$, 那么也有 $d(R;x,y)\leqslant 2$, 因为存在某个顶点 $z\in V(G_j)$ 使得 (x,z,y) 是 R 中 (x,y) 路. 如果 x 和 y 既不在 $V(G_j)$ 中也不在 $S\setminus F$ 中, 那么容易得到 R 中长最多为 4 的 (x,y) 路, 它经过 $S\setminus F$ 中某个顶点和 $V(G_j)$ 中某个顶点.

现假定 $F_j\neq\emptyset$, $j=1,2,\cdots,m$, $m\geqslant 2$. 则 $|S\setminus F|\geqslant 3$. 设 $P=(x_0,x_1,\cdots,x_\ell)$ 是 R 之中一条最短 (x,y) 路, 其中 $x_0=x$ 且 $x_\ell=y$. 若 $\ell\leqslant 4$, 则没有什么可证的. 现在假定 $\ell\geqslant 5$, 需要证明 $\ell\leqslant 2\kappa-2$. 对 $x_i\in P$, 令

$$X_i=\{u\in S\setminus F:\ u\in N_R(x_i)\}\cup(\{x_i\}\cap S).$$

因为 $\ell\geqslant 5$ 且 $|S\setminus F|\geqslant 3$, 所以 $|N_R(x_i)\cap(S\setminus F)|\geqslant 1$,

$$|X_i|\geqslant 1,\ \text{和}\ |X_i|\geqslant 2\quad x_i\notin S.$$

P_{ij} 表示 P 在 x_i 与 x_j 之间的子路, $X(P_{ij})=X_i\cup\cdots\cup X_j$. 显然, $|X(P_{0\ell})|\leqslant|S|=\kappa$. 为了证明 $\ell\leqslant 2k-2$, 只需要证明不等式 $|X(P_{0\ell})|\geqslant 1+\lceil\ell/2\rceil$. 事实上, 能证明

$$|X(P_{0i})|\geqslant 1+\lceil i/2\rceil\quad\forall\, i=0,1,\cdots,\ell. \tag{11.5.1}$$

对 $i \geqslant 0$ 用归纳法. 当 $i=0,1,2$ 时, 不等式 (11.5.1) 成立是显然的, 因为 $|X_i| \geqslant 1$. 假定 $i \geqslant 2$ 且不等式 (11.5.1) 对所有 $0,1,\ldots,i-1$ 成立. 归纳步骤分为 $x_i \in S$ 和 $x_i \notin S$ 两种情形.

如果 $x_i \in S$, 那么对任何 $h \leqslant i-2$ 有 $x_i \notin X_h$. 若不然, $(P_{0h}, x_i, P_{(i+1)\ell})$ 是 R 中比 P 更短的 (x,y) 路, 矛盾于 P 的选取. 因此

$$|X(P_{0i})| \geqslant |X(P_{0(i-2)})| + 1 \geqslant 2 + \lceil (i-2)/2 \rceil = 1 + \lceil i/2 \rceil.$$

如果 $x_i \notin S$, 那么对任何 $h \leqslant i-3$ 有 $X_h \cap X_i = \emptyset$. 若不然, 能在 R 中构造一条比 P 更短的 (x,y) 路来. 因为 $|X_i| \geqslant 2$, $x_i \notin S$, 所以

$$|X(P_{0i})| \geqslant |X(P_{0(i-3)})| + 2 \geqslant 3 + \lceil (i-3)/2 \rceil \geqslant 1 + \lceil i/2 \rceil.$$

由归纳法原理, 不等式 (11.5.1) 成立. 因此, 定理得证. ∎

另外, Kawaguchi, Wada[187] 和 Peleg, Simons[255] 独立地证明了对于 κ $(\geqslant 2)$ 连通无向图 G, 如果存在独立集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_\kappa\}$ 使得对任何两个不同的 i 和 j 有 $N_G(x_i) \cap N_G(x_j) = \emptyset$, 那么存在路由选择 ρ 使得

$$d(G,\rho) \leqslant \begin{cases} 5, & \text{如果 } \kappa \text{ 是奇数;} \\ 7, & \text{如果 } \kappa \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

下面的结果属于 Imase 和 Manabe[179], 它给出规模足够大的网络中容错路由选择的延迟的上界.

定理 11.5.2 设 G 是 n 阶 κ 连通无向图且 $\kappa \geqslant 2$. 如果 $n \geqslant 2\kappa^2$, 那么存在双向路由选择 ρ 使得 $d(G,\rho) \leqslant 3$.

证明 由定理 1.5.5, $V(G)$ 中存在 κ 个不交的子集 $V_0, V_1, \cdots, V_{\kappa-1}$ 使得 $|V_i| = 2\kappa$ 且对每个 $i=0,1,\cdots,\kappa-1$, 导出子图 $G[V_i]$ 是连通的. $i=0,1,\cdots,\kappa-1$, 划分 V_i 为两个 κ 子集 $V_{i,0}$ 和 $V_{i,1}$. 令 $W = V(G) \setminus (V_0 \cup \cdots \cup V_{\kappa-1})$. 定义 G 中双向路由选择 ρ 如下:

$$\begin{aligned} \rho(x,y) = \ & \rho(y,x) \\ = \ & \begin{cases} \text{任意 } xy \text{ 路}, & x,y \in W; \\ F_\kappa(x, V_{i,0}) \text{ 中 } xy \text{路}, & x \in W,\ y \in V_{i,0}; \\ \text{任意 } xy \text{ 的路}, & x \in W,\ y \in V_{i,1}; \\ G[V_i] \text{中任意 } xy \text{ 路}, & x,y \in V_i; \\ F_\kappa(x, V_{i_2,j_2}) \text{ 中 } xy \text{ 路}, & x \in V_{i_1,j_1},\ y \in V_{i_2,j_2}, i_1 > i_2,\ j_1 = j_2; \\ F_\kappa(y, V_{i_1,j_1}) \text{ 中 } xy \text{ 路}, & x \in V_{i_1,j_1},\ y \in V_{i_2,j_2},\ i_1 > i_2,\ j_1 \neq j_2. \end{cases} \end{aligned}$$

图 11.2 中所示的正是这种构造, 其中 $\kappa = 2$.

设 F 是故障集, $|F| < \kappa$, $R = R(G,\rho)/F$. 需要证明对 R 中任何两顶点 x 和 y 之间的距离 $d(R;x,y) \leqslant 3$.

因为 $|F| < \kappa$, 所以存在 h $(0 \leqslant h \leqslant \kappa - 1)$ 使得 $G[V_h]$ 不含 F 中任何元素. 以下分三种情形.

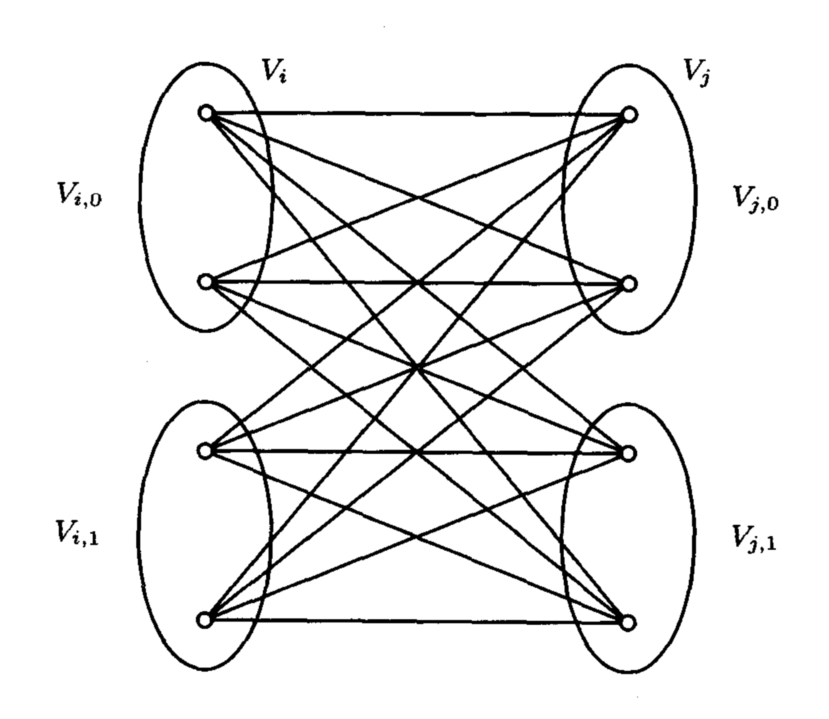


图 11.2　2 连通图 V_i 和 V_j 之间的路由选择的构造

情形 1　若 $x, y \in V_h$, 则由 ρ 的选取知, x 和 y 在 R 相邻. 因此, $d(R;x,y) = 1$.

情形 2　若 $x \notin V_h$ 且 $y \in V_h$, 则 $F_\kappa(x, V_h)$ 中至少存在不含 F 中任何元素的路. 设这条路为 $P(x,z)$, $z \in V_h$. 则 x 和 z 在 R 中相邻. 由情形 1 知, z 和 y 要么是同一个顶点, 要么在 R 中相邻. 所以, $d(R;x,y) \leqslant 2$.

情形 3　如果 $x, y \notin V_h$, 那么, 用同情形 2 一样的方法可知, 存在 $u, v \in V_h$ 使得 $d(R;x,u) = 1$ 且 $d(R;y,v) = 1$. 由情形 1 知, u 和 v 要么是同一个顶点, 要么在 R 中相邻. 因此, $d(R;x,y) \leqslant 3$. ∎

在同一篇论文中, Imase 和 Mnabe 还证明了: 对于 n 阶 κ $(\geqslant 2)$ 连通无向图 G, 如果 $n \geqslant \kappa^2$ 且 $n \neq 4$, 那么存在双向路由选择 ρ 使得 $d(G,\rho) \leqslant 3$.

下面考虑网络故障仅发生在点或者仅发生在边情况下的路由选择的延迟. 首先讨论网络故障仅发生在边的情形.

设 G 是 λ $(\geqslant 2)$ 边连通无向图, $F \subset E(G)$ 且 $|F| < \lambda$. Feldman[111] 证明了: G 中存在一个路由选择 ρ 使得 $d(G,\rho) \leqslant 2|F| + 1$. 但它的证明需要一定的篇幅. 这里

考虑 $|F|=1$ 的简单情形. 下面的结果属于 Dolev 等 [78].

定理 11.5.3 设 G 是 2 边连通无向图. 如果 G 仅一条边可能会出现故障, 那么对 G 的任何最小路由选择 ρ, 有 $d(R,\rho)\leqslant 3$.

证明 设 ρ 是 G 中最小路由选择, e 是 G 中故障边, $R=R(G,\rho)/\{e\}$. 需要证明对 G 中任何两顶点 x 和 y 有 $d(R;x,y)\leqslant 3$.

不失一般性, 假定 x 和 y 在 R 中不相邻. 因为 G 是 2 边连通的, 所以 $G-e$ 是连通的. 设 $P=(x,x_1,\cdots,x_m,y)$ 是 $G-e$ 中最短 (x,y) 路. 取 R 中与 x 相邻的顶点 x_j 使得 j $(1\leqslant j\leqslant m)$ 尽可能地大. 因为 x 和 y 在 R 中不相邻, 所以 $x_j\neq y$. 令 $e=ab$. 因为 $d(R;x,y)>1$, 所以 $\rho(x,y)$ 必含边 e. 不失一般性, 假定 $\rho(x,y)=(x,\cdots,a,b,\cdots,y)$. 因为 $\rho(x,y)$ 是 G 中最短路, 所以

$$d(G;x,a)\leqslant d(G;x,b),\quad \text{和}\quad d(G;y,b)\leqslant d(G;y,a).$$

由 j 的选取知 $d(R;x,x_{j+1})>1$. 因此 $e=ab\in\rho(x,x_{j+1})$. 因为 $d(G;x,a)\leqslant d(G;x,b)$, 所以 $\rho(x,x_{j+1})=(x,\cdots,a,b,\cdots,x_{j+1})$, $d(x_{j+1},b)\leqslant d(G;x_{j+1},a)$. 这意味着 $e=ab$ 不在 $\rho(x_{j+1},y)$ 中. 因此, $d(R;x_{j+1},y)=1$, 且

$$d(R;x,y)\leqslant d(R;x,x_j)+d(R;x_j,x_{j+1})+d(R;x_{j+1},y)=3.$$

定理得证. ∎

至于网络故障仅发生在点的情形, 只叙述一个结果, 其证明可参见 Dolev 等 [78].

定理 11.5.4 如果无向图 G 的故障集仅由顶点组成, 那么对任何最小路由选择 ρ, 有

$$d(G,\rho)\leqslant\sum_{x\in F}d_G(x).$$ ∎

关于容错路由选择的延迟, 还有许多有趣的结果和许多还没有解决的问题, 有兴趣的读者可参见两篇原始的研究文献 [78] 和 [47].

习　题

11.1 证明定理 11.1.5, 定理 11.2.2, 定理 11.2.3 和定理 11.2.5 和定理 11.2.6 (c).

11.2 证明: 无向路 P_n 的转发指数

$$\tau(P_n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}n(n-2), & \text{如果 } n \text{ 是偶数};\\ \dfrac{1}{2}(n-1)^2, & \text{如果 } n \text{ 是奇数}.\end{cases}$$

11.3 证明: 完全 2 部分图 $K_{m,n}$ $(m\geqslant n)$ 的转发指数 $\tau(K_{m,n})=\left\lceil\frac{m(m-1)}{n}\right\rceil$.

11.4 证明:

(a) 设 P 是 Petersen 图, 则 $\tau_m(P) = 6$ 且 $\pi_m(P) = 10$.

(b) 设 G 是 n 个 Petersen 图的笛卡儿乘积图, 则 $\tau(G) = 10^{n-1}(15n-10) + 1$ 且 $\pi(G) = 10^n$.

11.5 证明或者否定: 在连通 Cayley 图 G 中, 任何最小路由选择 ρ_m 均有 $\tau(G) = \tau_m(G)$.

11.6 证明: 设 H 是连通图 G 的支撑连通子图, 则 $\tau(G) \leqslant \tau(H)$.

11.7 设 G 是 n 阶 2 连通图, 证明: (Heydemann *et al.*[158])

(a) $\tau(G) \leqslant \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$, 而且这个上界是最好的;

(b) $\pi(G) \leqslant [n^2/4]$, 而且这个上界是最好的.

11.8 设 G 是 n 阶 k 连通无向图, $k \geqslant 1$, 证明:

(a) $\tau(G) \leqslant (n-1)[(n-k-1)/k]$;

(b) $\pi(G) \leqslant n[(n-k-1)/k]$.

11.9 设 G 是 n 阶 k 连通无向图, $k \geqslant 1, \Delta = \Delta(G)$. 证明:

(a) $\tau(G) \leqslant (n-1)[(n-k-1)/k] - (n-\Delta-1)$;

(b) $\pi(G) \leqslant n[(n-k-1)/k] - (n-\Delta)$.

11.10 设 G 是 n 阶 3 正则 3 连通无向图. 证明: $\tau(G) \leqslant [(n-3)(n-4)/3]$.

11.11 用 $\tau_{\delta,n}$ 和 $\pi_{\delta,n}$ 分别表示所有 n 阶最小度为 δ 的图 G 的最小 $\tau(G)$ 和最小 $\pi(G)$. 证明:

(a) $\tau_{\delta,n} = \left\lceil \frac{2(n-1-\delta)}{\delta} \right\rceil$;

(b) $\pi_{\delta,n} = \left\lceil \frac{2(n-1)}{\delta} \right\rceil$.

11.12 设 G 是 κ ($\geqslant 2$) 连通无向图 G. 证明: 如果存在独立集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_\kappa\}$ 使得对任何两个不同的 i 和 j 有 $N_G(x_i) \cap N_G(x_j) = \emptyset$, 那么存在路由选择 ρ 使得 (Kawaguchi, Wada[187] 和 Peleg, Simons[255])

$$d(G,\rho) \leqslant \begin{cases} 5 & \text{如果 } \kappa \text{ 是奇数}, \\ 7 & \text{如果 } \kappa \text{ 是偶数}. \end{cases}$$

第 12 章　互连网络的容错直径

这一章关心的仍然是互连网络的通信效率问题. 我们已经知道互连网络的通信效率大大依赖于数据从该网络的一个点传到另一个点的最大传输延迟. 在实时系统中, 传输延迟必须控制在一定的时限范围内, 因为超过这个时限到达的数据被认为是无用的.

如果互连网络的传输延迟超过给定时限, 那么人们常常是通过添加一些连接边以确保数据能在要求的时限内达到. 一个自然的问题是: 为了做到这一点, 至少需要添加多少条连接边?

如果实时系统是可容错的, 那么, 网络故障的发生可能会使传输延迟增加. 另一个自然的问题是: 当网络故障发生时, 传输延迟将增加多少?

这一章将上述两问题归结为标准的图论问题, 并提出两个度量参数: 交错图的直径和图的容错直径. 这一章将介绍一些有关这两个参数的基本研究结果.

§12.1　交错图的直径

这一节讨论上面提出的第一个问题. 假定 G' 是信息处理系统网络的拓扑结构, 它的最大传输延迟为 k'. 现有一组数据需要通过此网络在给定的时限 k 内从一个点传到另一个点. 如果 $k \geqslant k'$, 那么, 该数据可以在规定的时限 k 内从一个点传到任何另外的点. 但如果 $k < k'$, 为使数据能在规定的时限 k 内到达, 那么就必须通过添加连线对原网络进行改造使得改造后的网络 G 的传输延迟最多为 k'. 无限制的添加连线当然能做到这一点, 但不可取, 因为这样会增加过多的费用, 而且也不利于 VLSI 的布线. 因此, 添加的连线要尽可能的少. 这个最小数目究竟是多少? 我们已经知道, 网络传输是用图的直径来度量. 于是, 利用图论语言, 上述问题可以叙述如下:

给定直径为 k' 的图 G' 和正整数 k $(k < k')$. 图 G 是通过在 G' 中添加边而得到的图. 问题是: 需要在 G' 中至少添加多少条边, 才能使 G 的直径 $d(G) \leqslant k$?

因为当 $k = 1$ 时, n 阶 G 是完全图 K_n. 如果 G 是有向图, 那么所需要添加的边数为 $n(n-1) - \varepsilon(G)$; 如果 G 是无向图, 那么所需要添加的边数为 $\frac{1}{2}n(n-1) - \varepsilon(G)$. 为了避免这种情形发生, 假定 $k \geqslant 2$.

这个问题的变形是: 对于给定的两个正整数 t, k 和图 G', $k < d(G')$, 能在 G' 中添加 t 条边使得到的图 G 的直径 $d(G) \leqslant k$?

文献中, 这个问题被称为*添加边问题* (edge-addition problem), G 被称为图 G' 的*变更图* (altered graph). 这个问题首先由 Chung 和 Garey[68] 提出, 已吸引了相当多的注意力. 但它的解决是相当困难的, 因为 Schoone 等 [277] 已证明它是 NP 完

备的.

边添加问题的特殊变形是: 对于给定的正整数 t 和图 G', 在 G' 添加 t 条边后得到的变更图为 G. 添加的方式不同, 得到的变更图 G 可能不一样. 问这些变更图 G 的最小直径是多少?

更特殊的变形可以表述如下: 对于给定的 $k\,(\geqslant 2)$ 和 $t\,(\geqslant 1)$, 用 $F(t,k)$ 表示在直径为 k 的无向图中添加 t 边后得到的变更图的最小直径, 求 $F(t,k)$?

用 $P(t,k)$ 表示在无向路 P_{k+1} 中添加 t 边后得到的变更图的最小直径. 下述定理揭示了 $F(t,k)$ 与 $P(t,k)$ 之间的关系.

定理 12.1.1 (邓志国和徐俊明 [76]) 对任何正整数 t 和 k 均有 $F(t,k)=P(t,k)$.

证明 显然只需证明 $F(t,k)\geqslant P(t,k)$. 为此, 设 G 是直径为 k 的图, G' 是由 G 通过添加 t 条边集 B 后得到的直径为 $F(t,k)$ 的变更图. 令 $P=x_0x_1x_2\cdots x_k$ 是 G 中长为 k 的最短路, $V_i=\{x\in V(G):\ d(G;x,x_0)=i\}$. 则 $x_i\in V_i$, $i=0,1,\cdots,k$. 令 B_1 是 B 中其两端点都在 P 上的边集, $B_2=B\setminus B_1$, $H=P+B_1$. 则 H 是 G' 的子图. 如果 $B_2=\emptyset$, 那么 $F(t,k)=d(G')\geqslant d(H)\geqslant P(t,k)$.

现在假定 $B_2\neq\emptyset$. 令 $B_2'=\{xy\in B_2:\ x\in V_i,y\in V_j,i\neq j\}$, H' 是添加 B_2' 中所有边到 H 而得到的图, 其中若 $xy\in B_2'$, $x\in V_i,y\in V_j$, 则添加的边是 x_ix_j. 因为 H 是 H' 的支撑子图, 所以 $F(t,k)=d(G')\geqslant d(H)\geqslant d(H')\geqslant P(t,k)$. ∎

这个结论说明, 一般图的变更图的最小直径问题归结为无向路的变更图的最小直径问题. 下面考虑无向路 P_n 的变更图的最小直径. 容易验证 $P(1,n)=\lceil\frac{n}{2}\rceil$, 并且这个值能达到如果添加的边连接 P_{n+1} 的两端点. 这意味着添加一条边, 其直径几乎减少一半, 见图 12.1. 下面假定 $t\geqslant 2$. Schoone 等 [277] 确定了 $P(2,n)$ 和 $P(3,n)$. 为证明这两个结论, 先看一个例子.

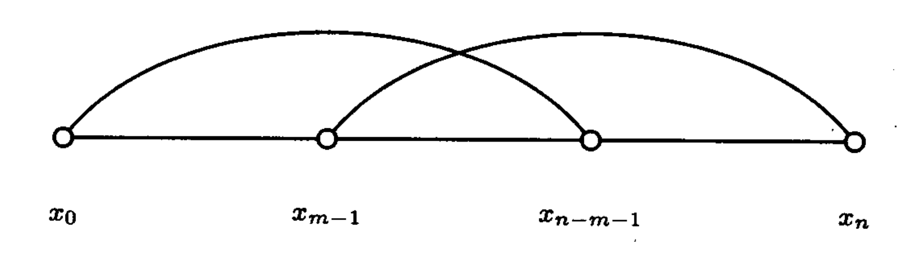


图 12.1 在路 P_{n+1} 中添加 2 条边后得到的变更图

例 12.1.1 $P(2,n)\leqslant\lceil\frac{1}{3}(n+1)\rceil$.

证明 为了证明这个结论, 只需在长为 n 的路中的合适位置上添加两条边使得到的变更图直径不超过 $\lceil\frac{1}{3}(n+1)\rceil$. 设 $P=(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ 是无向路, G 是在 P 中添加两条边 x_0x_{n-m-1} 和 $x_{m-1}x_n$ 后得到的变更图, 其中 $m=\lceil\frac{1}{3}(n+1)\rceil$ (参见图

12.1). 定义 3 个无向圈如下:

$$C^1 = P(x_0, x_{n-m-1}) + x_{n-m-1}x_0,$$

$$C^2 = P(x_{m-1}, x_n) + x_n x_{m-1},$$

$$C^3 = P(x_0, x_{m-1}) \cup P(x_n, x_{n-m-1}) + \{x_{m-1}x_n, x_{n-m-1}x_0\}.$$

那么,

$$\varepsilon(C^1) = n - m \leqslant 2m - 1,$$

$$\varepsilon(C^2) = n - m + 2 \leqslant 2m + 1,$$

$$\varepsilon(C^3) = 2m + 1.$$

容易验证, 对 G 中任何两顶点 x 和 y, 有

$$d(G; x, y) \leqslant \max\{d(C^i) : 1 \leqslant i \leqslant 3\} \leqslant m.$$

这说明 $P(2, n) \leqslant k = d(G) \leqslant m = \lceil \frac{1}{3}(n+1) \rceil$. ∎

定理 12.1.2 $P(2, n) = \lceil \frac{n+1}{3} \rceil$ $(n \geqslant 3)$; $P(3, n) = \lceil \frac{n+2}{4} \rceil$ $(n \geqslant 4)$.

证明 首先证明 $P(2, n) = \lceil \frac{n+1}{3} \rceil$. 由例 12.1.1, 只需证明 $P(2, n) \geqslant \frac{1}{3}(n+1)$. 令 $P = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 是一条路, $x_i x_{i'}$ 和 $x_j x_{j'}$ 是两条添加边, G 是变更图. 假定 $d(G) = k$, 需要证明 $n + 1 \leqslant 3k$.

不失一般性, 设 $i \leqslant j$, $i < i'$ 和 $j < j'$. 注意到顶点 $x_i, x_{i'}, x_j$ 和 $x_{j'}$ 将路 P 划分成长度分别为 a, b, c, d, e 的 5 段 (或许有的长度为 0). 于是

$$a + b + c + d + e = n. \tag{12.1.1}$$

计算 G 中某些顶点之间的距离导出 a, b, c, d 和 e 之间的关系. 分 3 种情形考虑.

情形 1 如果 $i' \leqslant j$ (参见图 12.2 (a)), 那么

$$a = i,\ b = i' - i,\ c = j - i',\ d = j' - j,\ e = n - j'.$$

于是,

$$a + c + e + 2 = d(G; x_0, x_n) \leqslant d(G) = k \tag{12.1.2}$$

考虑子路 $P(x_i, x_{i'})$ 的中心点和子路 $P(x_j, x_{j'})$ 的中心点之间的最大距离 ℓ_1 得不等式

$$\frac{1}{2}b + c + \frac{1}{2}d \leqslant \ell_1 \leqslant k. \tag{12.1.3}$$

由式 (12.1.1), (12.1.2) 和 (12.1.3) 得,

$$n \leqslant a + b + 3c + d + e \leqslant 3k - 2.$$

这意味着 $n + 1 \leqslant 3k - 1 < 3k$.

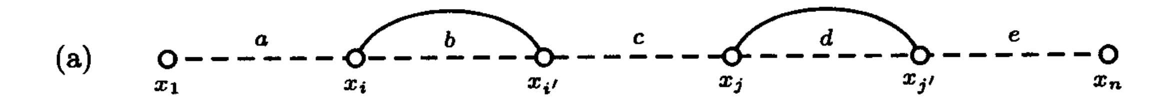


图 12.2 在 P_{n+1} 中添加 2 条边得到的 3 个变更图

情形 2 如果 $i \leqslant j < i' < j'$ (参见图 12.2 (b)), 那么

$$a = i,\ b = j - i,\ c = i' - j,\ d = j' - i',\ e = n - j'.$$

如果 $c + 2 = \min\{b+1, c+2, d+1\}$, 那么,

$$a + e + c + 2 = d(G; x_0, x_n) \leqslant d(G) = k. \tag{12.1.4}$$

考虑子路 $P(x_i, x_j)$ 的中心点与子路 $P(x_{i'}, x_{j'})$ 的中心点的最大距离 ℓ_2 得不等式

$$\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}d \leqslant \ell_2 \leqslant k. \tag{12.1.5}$$

由式 (12.1.1), (12.1.4) 和 (12.1.5) 得,

$$n = a + b + c + d + e \leqslant 3k - 2.$$

这意味着 $n + 1 \leqslant 3k - 1 < 3k$.

如果 $b + 1 = \min\{b+1, c+2, d+1\}$, 那么,

$$a + e + b + 1 = d(G; x_0, x_n) \leqslant d(G) = k. \tag{12.1.6}$$

考虑子路 $P(x_j, x_{i'})$ 的中心点与子路 $P(x_{i'}, x_{j'})$ 的中心点之间的最大距离 ℓ_3 得不等式

$$\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d \leqslant \ell_3 \leqslant k. \tag{12.1.7}$$

由式 (12.1.1), (12.1.6) 和 (12.1.7) 得,

$$n = a + b + c + d + e \leqslant 3k - 1.$$

这意味着$n+1 \leqslant 3k$.

同样地, 可以证明对于$d+1=\min\{b+1, c+2, d+1\}$, 有$n \leqslant 3k$.

情形 3 如果$i \leqslant j < j' \leqslant i'$ (参见图 12.2 (c)), 那么

$$a=i,\ b=j-i,\ c=j'-j,\ d=i'-j',\ e=n-i'.$$

则,

$$a+e+1=d(G;x_0,x_n) \leqslant d(G)=k. \tag{12.1.8}$$

不失一般性, 设$b \leqslant d$. 考虑子路$P(x_j, x_{j'})$ 的中心点与顶点u 的最大距离ℓ_4, 其中u 是 $P(x_i, x_j)$ 中点使得$d(G;u,x_i) \leqslant \frac{1}{2}(b+d)$, 或者$u$ 是 $P(x_{i'}, x_{j'})$ 中点使得$d(G;u,x_{j'}) \leqslant \frac{1}{2}(b+d)$. 于是, 得不等式

$$\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}(b+d) \leqslant \ell_4 \leqslant k. \tag{12.1.9}$$

由式(12.1.1), (12.1.8) 和(12.1.9) 得,

$$n=a+b+c+d+e \leqslant 3k-1.$$

这意味着$n+1 \leqslant 3k$.

用同样的方法 (但复杂得多), 可以证明 $P(3,n)=\lceil \frac{1}{4}(n+2) \rceil$. ∎

对于$t \geqslant 3$ 且$k \geqslant 4$, Chung 和 Garey[68] 给出$P(t,k)$ 的界:

$$\frac{k+1}{t+1}-1 \leqslant P(t,k) < \frac{k+1}{t+1}+3 \tag{12.1.10}$$

邓志国和徐俊明 [76] 改进了这些界, 得到:

$$\left\lceil \frac{k}{t+1} \right\rceil \leqslant P(t,k) \leqslant \left\lceil \frac{k-2}{t+1} \right\rceil +3. \tag{12.1.11}$$

特别地, $\lceil \frac{k}{5} \rceil \leqslant P(4,k) \leqslant \lceil \frac{k}{5} \rceil +1$, $\lceil \frac{k}{6} \rceil \leqslant P(5,k) \leqslant \lceil \frac{k}{6} \rceil +1$, $k \geqslant 4$, 且

$$P(t,(2k-1)t+h+1)=2k, \quad 0 \leqslant h \leqslant 2k-1. \tag{12.1.12}$$

式(12.1.12) 的证明在12.3 节 (见定理 12.3.4). 现在看一个例子.

例 12.1.2 (邓志国和徐俊明 [76]) $P(t,(2k-1)t+h+1) \leqslant 2k$, 其中$0 \leqslant h \leqslant 2k-1$.

证明 只需从长为n 的路中通过添加t 条边来构造变更图G, 其中$n=(2k-1)t+h+1$. 令$P=x_0x_1x_2\cdots x_n$ 是路, 添加的t 条边是

$$x_m x_{m+1+i(2k-1)}, \quad i=1,2,\cdots,t,$$

其中$0 \leqslant m \leqslant k$, $0 \leqslant h-m \leqslant k-1$ (参见图 12.3).

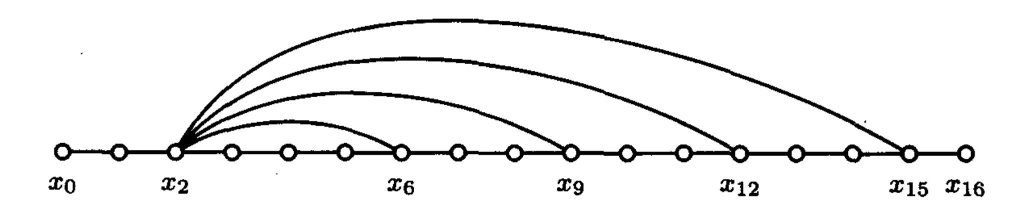


图 12.3 例 2 中变更图 G 的构造, 其中 $k=2$, $t=4$, $m=2$, $h=3$

这些边的端点划分 P 为 $t+2$ 段 $L_0, L_1, \cdots, L_t, L_{t+1}$, 其中

$$L_0 = P(x_0, x_m),$$

$$L_1 = P(x_m, x_{m+2k}),$$

$$L_i = P(x_{m+1+(i-1)(2k-1)}, x_{m+1+i(2k-1)}) \quad i = 2, 3, \cdots, t,$$

$$L_{t+1} = P(x_{m+1+t(2k-1)}, x_d).$$

现在证明 $d(G) \leqslant 2k$. 因为

$$\varepsilon(L_{t+1}) = d - (m+1+t(2k-1)) = h - m \leqslant k-1,$$

而且同一段的两顶点之间的距离最多为 $2k$, 所以只需考虑不同段两顶点之间的距离. 设 x 和 y 是分别在 L_i 和 L_j 中两顶点, $0 \leqslant i < j \leqslant t+1$. 因为 $d(G; x, x_m) \leqslant k$ 和 $d(G; y, x_m) \leqslant k$, 所以 $d(G; x, y) \leqslant 2k$, 即 $P(t, (2k-1)t+h+1) \leqslant d(G) \leqslant 2k$. ∎

§12.2 互连网络的边容错直径

在容错互连网络中, 故障可能出现在结点, 可能出现在连线, 也可能两者兼而有之. 无论哪种故障出现, 都会影响网络信息传输的有效性. 这一节讨论网络故障出现在连线的情形对信息传输有效性的影响. 当我们用图 G 来模拟网络拓扑结构时, 边故障的出现意味着在 G 中去掉一些边, 这必然会影响图的直径. 这就是文献中常常提到所谓的边减少问题 (edge-deletion problem). 用图论语言, 此问题可表述如下:

给定直径为 k' 的图 G' 和正整数 k ($k' \leqslant k$), 能从 G' 中最多去掉多少条边后得到的图 G 有直径不超过 k ?

与边添加问题一样, 这个问题的解也是困难的, 因为 Schoone 等 [277] 已经证明它是 NP 完备的.

这一节考虑与这个问题稍微不同的变形问题. 设 G 是 t 边连通图, 则从 G 中任意地去掉 $t-1$ 条边后得到的图 H 有确定的直径. 人们关心的是 H 的直径到底有多大. 这个问题导致了下面的图论概念.

设 G 是 t 边连通图, $x,y\in V(G)$, $F\subseteq E(G)$, $|F|<t$. G 中从 x 到 y 的 $(t-1)$ **边容错距离** (edge fault-tolerant distance), 记为 $D'_t(G;x,y)$, 定义为

$$D'_t(G;x,y)=\max\{d(G-F;x,y):\ F\subset E(G),|F|<t\}.$$

显然,

$$D'_t(G;x,y)=\max\{d(G-F;x,y):\ F\subset E(G),|F|=t-1\}.$$

G 的 $(t-1)$ **边容错直径** (edge fault-tolerant diameter), 记为 $D'_t(G)$, 定义为

$$D'_t(G)=\max\{d(G-F):\ F\subset E(G),|F|<t\}.$$

显然,

$$D'_t(G)=\max\{d(G-F):\ F\subset E(G),|F|=t-1\}.$$

例如, 对于无向圈 C_n $(n\geqslant 3)$, 有 $D'_2(C_n)=n-1$.

显然, 对任何 t 边连通图 G, 有

$$d(G)=D'_1(G)\leqslant D'_2(G)\leqslant\cdots\leqslant D'_{t-1}(G)\leqslant D'_t(G).$$

Plesnik[257] 首先证明了: 对任何无向图 G, 有 $D'_2(G)\leqslant 2d(G)$, 而且这个上界是最好的, 即存在一个 2 边连通无向图 G 使得 $D'_2(G)=2d(G)$. Chung 和 Garey[68] 注意到确定一般图的边容错直径是相当困难的, 因此提出研究下列极值问题.

用 $f(t,k)$ 和 $\overrightarrow{f}(t,k)$ 分别表示从直径为 k 的 $(t+1)$ 边连通无向图和有向图中任意去掉 t 条边后得到的图的最大可能的直径. 显然, 对任何直径为 k 的 t 边连通无向图 G 和有向图 D, 有

$$D'_t(G)\leqslant f(t-1,k),\quad D'_t(D)\leqslant\overrightarrow{f}(t-1,k). \tag{12.2.1}$$

人们感兴趣的是: 对于给定的 t 和 k, 确定 $f(t,k)$ 和 $\overrightarrow{f}(t,k)$ 的值. 虽然, 这个问题同样是困难的, 但对于较小的 t 和 (或者) k, $f(t,k)$ 的值已被确定. 比如, Plesnik[257] 证明了: $f(1,k)=2k$; Peyrat[256] 证明了: $f(t,2)=\overrightarrow{f}(t,2)=4$. 在下一节证明第一结论, 现在证明第二个结论.

定理 12.2.1 $f(t,2)=\overrightarrow{f}(t,2)=4$. 因此, 如果 $d(G)=2$, 那么 $D'_{t+1}(G)\leqslant 4$.

证明 仅对无向图来证明这个定理. 由不等式 (12.2.1), 只需证明 $f(t,2)=4$.

首先证明 $f(t,2)\leqslant 4$. 设 G 是直径为 2 的 $(t+1)$ 边连通无向图, $x,y\in V(G)$, 并不妨设 $d_G(x)\leqslant d_G(y)$. 令

$$A=N_G(x)\cap N_G(y)=\{a_1,a_2,\cdots,a_h\},$$

$$X=N_G(x)\setminus(A\cup\{y\})=\{x_1,x_2,\cdots,x_p\},$$

$$Y=N_G(y)\setminus(A\cup\{x\})=\{y_1,y_2,\cdots,y_q\}.$$

则

$$p \leqslant q, \quad 且\ d_G(x) = h + p + e_{xy},$$

其中

$$e_{xy} = \begin{cases} 1, & xy \in E(G); \\ 0, & xy \notin E(G). \end{cases}$$

因为对任何 $i = 1, 2, \cdots, p$ 有 $d(G; x_i, y_i) \leqslant 2$, 所以存在 p 条边不交 $x_i y_i$ 路 $P_1, P_2, \cdots, P_p$, 其中 $P_i = x_i y_i$ 或者 $P_i = (x_i, b_i, y_i)$, $b_i \notin \{x, y\}$. 因此, 存在 $d_G(x)$ 条边不交且长至多为 4 的 xy 路: 其中

(a) 1 条是 xy, 如果 $xy \in E(G)$;

(b) h 条是 $Q_i = (x, a_i, y)$, $a_i \in A$;

(c) p 条是 $P_1, P_2, \cdots, P_p$.

这意味着对任何 $F \subset E(G)$ $(|F| \leqslant t)$ 均有 $d(G - F) \leqslant 4$, 这是因为 $t < t + 1 \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G) \leqslant d_G(x)$.

为了证明这个上界能达到, 构造一个无向图 G 如下: 顶点集 $V(G) = \{x, y\} \cup X \cup Y \cup Z$, 其中 $|X| = |Y| = |Z| = t$; 边集

$$E(G) = \{xx' :\ x' \in X\} \cup \{yy' :\ y \in Y\} \cup \{zu :\ z \in Z, u \in X \cup Y\} + xy.$$

容易验证这样定义的无向图 G 是 $(t+1)$ 边连通的, 有直径 2, 且 $d(G - xy) = 4$. ∎

与此同时, Peyrat[256] 还证明了: 如果 t 足够地大, 那么

$$3\sqrt{2t} - 3 \leqslant f(t, 3) \leqslant 3\sqrt{2t} + 4.$$

当 $k \geqslant 3$ 时, 他还得到一个不依赖于 k 的更一般地的结果.

定理 12.2.2 对于 n 阶且直径为 k $(\geqslant 3)$ 的有向图, 有

$$\overrightarrow{f}(t, k) = \max\{4,\ n - 2t + 1\}.$$

证明 设 G 是 n 阶且直径为 k $(\geqslant 3)$ 的 $(t+1)$ 边连通图, $F \subset E(G)$, 且 $|F| = t$, $H = G - F$. 不妨假定 $d(H) = h \geqslant 5$. 需要证明 $h \leqslant n - 2t + 1$.

设 $x, y \in V(H)$ 使得 $d(H; x, y) = h$, $P = (x_0, x_1, \cdots, x_h)$ 是 H 中最短 (x, y) 路, 其中 $x_0 = x$ 且 $x_h = y$. 令

$$X = N_H^+(x) \setminus \{x_1\}; \quad Y = N_H^-(y) \setminus \{x_{h-1}\};$$

$$R = N_H^+(X \cup \{x_1\}) \setminus \{x_0, x_1, x_2\};$$

$$S = N_H^-(Y \cup \{x_{h-1}\}) \setminus \{x_h, x_{h-1}, x_{h-2}\};$$

$$T = V(G) \setminus (X \cup Y \cup R \cup S \cup V(P)).$$

因为这些子集是不交的且

$$|X|+|Y|+|R|+|S|+|T|=n-(h+1),$$

所以, 只需证明

$$|X|+|Y|+|R|+|S|+|T|\geqslant 2t-2. \tag{12.2.2}$$

(反证) 假定 $|X|+|Y|+|R|+|S|+|T|<2t-2$. 那么, 两个不等式

$$|X|+|R|\leqslant t-2,\quad 和\ |Y|+|S|\leqslant t-2$$

中至少一个成立. 不妨设第一个不等式成立, 即 $|X|+|R|\leqslant t-2$. 则

$$d_H^+(x)=|X|+1,\ d_H^+(x_1)\leqslant|X|+|R|+2\leqslant t,$$
$$d_H^+(u)\leqslant|X|+|R|+2\leqslant t,\quad \forall\, u\in X.$$

因为 $\delta^+(G)\geqslant t+1$, 所以

$$\begin{aligned}&d_G^+(x)-d_H^+(x)\geqslant(t+1)-(|X|+1)=t-|X|,\\&d_G^+(u)-d_H^+(u)\geqslant(t+1)-t=1,\quad\forall\,u\in X\cup\{x_1\}.\end{aligned} \tag{12.2.3}$$

令 $A=X\cup\{x,x_1\}$. 由不等式 (12.2.3), 导出如下矛盾:

$$t=|F|\geqslant\sum_{u\in A}(d_G^+(u)-d_H^+(u))\geqslant t-|X|+|X|+1=t+1.$$

矛盾的出现意味着不等式 (12.2.2) 成立.

下面证明上界可以达到. 构造有向图 G 如下: 它有有向路 $(x_0,x_1,\cdots,x_h)$, 另加 $2(t-1)$ 个顶点 a_i,b_i, $i=1,2,\cdots,t-1$, 以及下列有向边:

$$(x_0,x_h),(a_i,a_j),(b_i,b_j),\quad 1\leqslant i\neq j\leqslant t-1;$$
$$(a_i,b_i),(a_i,x_0),(a_i,x_1),(x_h,b_i),(x_{h-1},b_i),\ 1\leqslant i\leqslant t-1;$$
$$(x_i,a_j),(b_j,x_i),\ 0\leqslant i\leqslant h,\ 1\leqslant j\leqslant t-1;$$
$$(x_i,x_j),\quad 0\leqslant j<i\leqslant h.$$

容易验证 G 是 n 阶, 且 $(t+1)$ 边连通. 令

$$F=\{(x_0,x_h)\}\cup\{(a_i,b_i):\ 1\leqslant i\leqslant t-1\}.$$

则 $d(G-F)=h=n-2t+1$. ∎

在实际应用中, 常常不必要求 G 是 $(t+1)$ 边连通的, 仅要求 $G-F$ 是连通的. 这个事实导致人们研究一个与上述讨论稍微不同的情形.

用 $g(t,k)$ ($\overrightarrow{g}(t,k)$) 表示从直径为 k 的连通无向图 (强连通有向图) 中任意去掉 t 条边后得到的连通 (强连通) 图的最大直径. 显然,

$$f(t,k) \leqslant g(t,k), \quad \overrightarrow{f}(t,k) \leqslant \overrightarrow{g}(t,k). \tag{12.2.4}$$

人们感兴趣的仍然是: 对于给定的 t 和 k, 确定 $g(t,k)$ 和 $\overrightarrow{g}(t,k)$ 的值.

边容错直径对于有向图就变得相当简单. 事实上, 任何一个 n 阶强连通有向图的最大直径为 $n-1$. 下面构造一个阶为 n 且直径为 k ($\geqslant 3$) 的有向图 G, 其中有一条边, 去掉该边导致的有向图有直径 $n-1$. G 的顶点集

$$V(G) = \{x_0, x_1, \cdots, x_{(k-2)m}\}, \quad k \geqslant 3,$$

和边集

$$\begin{aligned} E(G) =& \{(x_0, x_{(k-2)m})\} \cup \{(x_i, x_{i+1}):\ 0 \leqslant i \leqslant (k-2)m-1\} \\ & \cup \{(x_{(k-2)m}, x_i):\ 0 \leqslant i \leqslant (k-2)m-1\} \\ & \cup \{(x_{(k-2)i}, x_0):\ 1 \leqslant i \leqslant m-1\}. \end{aligned}$$

图 12.4 中所示的是用上述方法构造的有向图, 其中 $n=9, k=4$ 且 $m=4$.

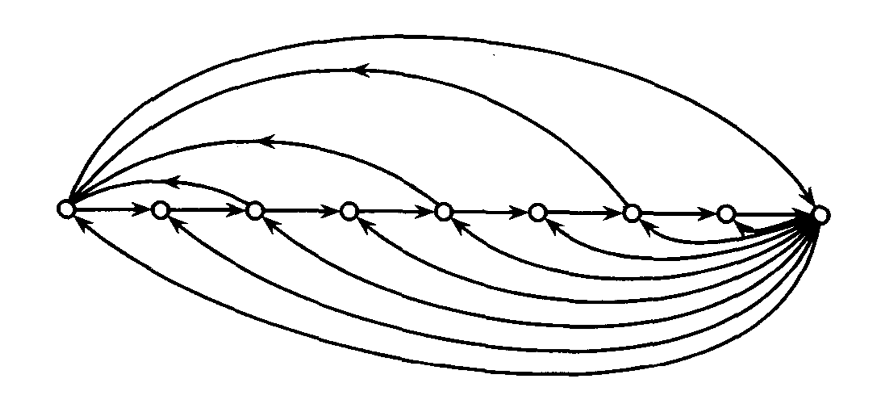


图 12.4　1 边容错直径为 8 的 9 阶有向图

容易验证这样构造出来的有向图 G 有直径 $d(G)=k$. 如果在 G 中去掉边 $(x_0, x_{(k-2)m})$, 那么得到的有向路 $(x_0, x_1, \cdots, x_{(k-2)m})$ 有长 $(k-2)m = n-1$. 这个例子说明

$$\overrightarrow{g}(t,k) = n-1, \quad \forall\, k \geqslant 3.$$

Schoone 等 [277] 确定了 $\overrightarrow{g}(t,1)$ 和 $\overrightarrow{g}(t,2)$.

定理 12.2.3 $\overrightarrow{g}(t,1) = \left\lfloor \sqrt{2t+\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \right\rfloor$.

证明 考虑完全有向图 K_n ($n \geqslant 3$) 和 $F \subset E(K_n)$ 使得 $|F| = t$ 且 $K_n - F$ 是强连通的. 则 $\varepsilon(K_n - F) \geqslant n$ 且 $t \leqslant n(n-1) - n = n(n-2)$. 设 $P = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$

是 $K_n - F$ 中一条长为 $n-1$ 的 (x_1, x_n) 路. 如果 P 最短, 那么

$$B = \{(x_i, x_{i+2}):\ 1 \leqslant i \leqslant n-2\} \not\subset E(K_n - F),$$

且

$$|B| = (n-2) + (n-3) + \cdots + 2 + 1 = \frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

这意味着如果 $d(K_n - F) = n-1$, 那么 $t \geqslant \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. 于是,

$$\vec{g}(t,1) = \begin{cases} = n-1, & \text{若 } \frac{1}{2}(n-1)(n-2) \leqslant t \leqslant n(n-2); \\ < n-1, & \text{若 } t < \frac{1}{2}(n-1)(n-2). \end{cases}$$

因此, 如果 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) \leqslant t < \frac{1}{2}n(n-1)$, 那么 $\vec{g}(t,1) = n-1$. 由此得

$$\left(n - \frac{3}{2}\right)^2 \leqslant 2t + \frac{1}{4} < \left(n - \frac{1}{2}\right)^2.$$

这意味着 $n-1 \leqslant \sqrt{2t + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} < n$. 因此,

$$n - 1 = \left\lfloor \sqrt{2t + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

定理得证. ∎

为了证明 $\vec{g}(t,2) = 2t+2$, 先证明如下引理.

引理 12.2.4 设 G 是 $k+1$ 阶且直径为 $k\,(\geqslant 2)$ 的强连通有向图, H 是在 G 中添加 t 条边后得到的变更图. 如果 $d(H) \leqslant 2$, 那么 $k \leqslant 2t+2$.

证明 设 x_0, x_k 是 G 中两顶点使得 $d(G; x_0, x_k) = k$, $P = (x_0, x_1, \cdots, x_k)$ 是 G 中最短 (x_0, x_k) 路. 则当 $j > i+1$ 时, G 不含边 (x_i, x_j). 所以, H 中所有边 (x_i, x_j) $(j > i+1)$ 必是添加的边. 因此, 如果 $d(H) = 1$, 那么添加的边数

$$t \geqslant (k-1) + (k-2) + \cdots + 1 = \frac{1}{2}k(k-1).$$

这意味着如果 $k \geqslant 2$, 那么 $2t \geqslant k(k-1) \geqslant k-2$.

下设 $d(H) = 2$, x_i 是 P 中最小标号的顶点使得 H 中不含边 (x_i, x_j) $(j > i+1)$. 则对每个 $j = 0, 1, \cdots, i-1$, 存在 $j'\,(\geqslant j+2)$ 使得 $(x_j, x_{j'}) \in E(H)$ 是添加的边. 所以, 这种类型的添加边至少有 i 条.

因为 $d(H) = 2$, 所以在 H 中, x_i 到其他所有顶点的距离至多为 2. 于是, 对所有的 j $(i+3 \leqslant j \leqslant k)$, 从 x_i 到 x_j 的长为 2 的有向路是通过点 $x_{j'}$ $(j' < i-1$, 或者 $i < j' < j-1)$ 和添加边 $(x_{j'}, x_j) \in E(H)$ 得到的. 这种类型的添加边至少有 $k - (i+3) + 1 = k-2-i$ 条. 于是,

$$t \geqslant \max\{i, k-2-i\} \geqslant \frac{1}{2}(k-2).$$

即, $2t \geqslant k-2$. ▮

定理 12.2.5 $\overrightarrow{g}(t,2)=2t+2$.

证明 首先证明 $\overrightarrow{g}(t,2)\leqslant 2t+2$. 设 G 是直径为 2 的有向图, H 是从 G 中去掉 t 条边后得到的强连通有向图. 令 $d(H)=h$, $x,y\in V(H)$ 使得 $d(H;x,y)=h$. 划分 $V(H)$ 为 $V_i=\{u: d(H;x,u)=i\}, i=0,1,\cdots,h$. 设 G' 和 H' 分别是收缩 G 和 H 中 V_i 为一个点 v_i 并去掉所有平行边和环后得到的有向图. 令 $d(G')=p$ 和 $d(H')=q$, 则 $p\leqslant 2$ 和 $q\leqslant h$. 因为 H' 是由一个有向路 $(x_0,x_1,\cdots,x_h\}$ 和某些形如 (x_i,x_j) $(j<i)$ 的边组成, 所以 $q=h$. 因为 G' 是由 H' 添加最多 t 条边得到的变更图, 所以由引理 12.2.4 知 $q\leqslant 2t+2$. 于是 $h\leqslant 2t+2$.

下面构造有向图 G 说明这个上界可以达到. G 的顶点集 $V(G)=\{x_0,x_1,\cdots,x_{2t+2}\}$ 且边集

$$\begin{aligned}E(G)=&\{(x_i,x_{i+1}): 0\leqslant i\leqslant 2t+1\}\\&\cup\{(x_i,x_j): 0\leqslant j<i\leqslant 2t+2\}\\&\cup\{(x_i,x_{2t+2-i}): 0\leqslant i\leqslant t-1\}.\end{aligned}$$

参见图 12.5, 其中 $n=8$ 和 $t=3$. 容易验证 $d(G)=2$, 从 G 中去掉边子集 $F=\{(x_i,x_{2t+2-i}): 0\leqslant i\leqslant t-1\}$ 后导致的子图有直径 $2t+2$. ▮

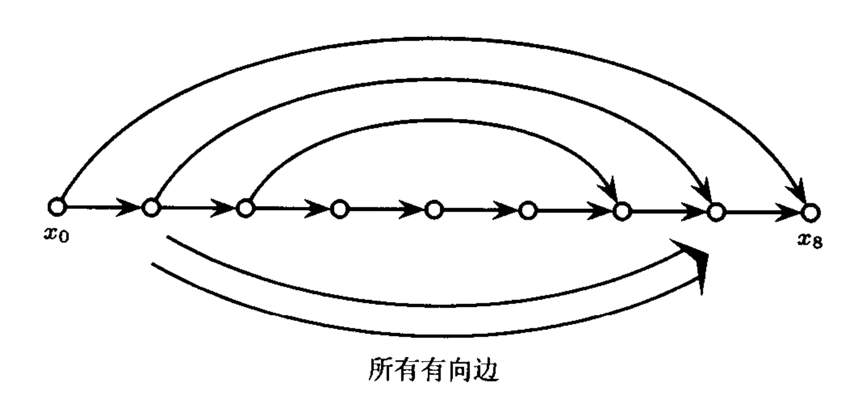


图 12.5 定理 12.2.5 的证明辅助图, 其中 $n=8$, $t=3$

§12.3 容错直径与变更图直径之间的关系

为了确定 $f(t,k)$ 或者 $g(t,k)$, 我们先讨论容错直径与变更图直径之间的关系. 下面的引理揭示了 $F(t,k)$ 和 $g(t,k)$ 关系, 证明是简单的, 留给读者作为练习.

引理 12.3.1 $F(t,g(t,k))\leqslant k\leqslant g(t,F(t,k))$. ▮

定理 12.3.2 (Chung 和 Garey[68]) 设 G 是连通的无向图. 如果对任何 $F\subset E(G)$ 且 $|F|=t$, $h=d(G-F)$ 是确定的, 那么 $d(G)\geqslant P(t,h)$.

证明 令 $H=G-F$, 则存在两顶点 x 和 y 使得 $d(H;x,y)=h$. 令

$$V_i=\{u\in V(H):\ d(H;x,u)=i\},\ i=0,1,\cdots,h.$$

由 x 的选取, 对每个 $i=0,1,\cdots,h$, 有 $V_i\neq\emptyset$. 因此, $\{V_0,V_1,\cdots,V_h\}$ 是 $V(H)=V(G)$ 的划分. 设 G' 和 H' 分别由 G 和 H 通过收缩每个 V_i 为一个顶点 v_i, 然后去掉平行边和环后得到的图. 则 $d(G')\leqslant d(G)$, 这是因为 G 中每条路仍保留在 G' 中, 而且平行边和环的移去不影响任何两顶点之间最短路的长. 容易看到, H' 是一条路 $P=(v_0,v_1,\cdots,v_h)$. 而且, G' 与 H' 的差别仅在于 G' 比 H' 至多多 t 条添加边, 这些添加边是 F 中在收缩时不平行边或者环的边. 因此, G' 是由路 P 添加 ℓ $(\leqslant t)$ 条边而得到的变更图. 于是, G' 的直径至少为 $P(\ell,h)$. 因此,

$$d(G)\geqslant d(G')\geqslant P(\ell,h)\geqslant P(t,h).$$

定理得证. ∎

定理 12.3.2 揭示了边添加问题和边减少问题之间的密切关系. 这个结论表明, 如果能从长为 h 的路通过添加 t 条边后得到直径为 k 的图, 则 h 就是 $g(t,k)$ 的上界. 这个事实也说明了确定 $P(t,k)$ 的重要性.

作为定理 12.3.2 的应用, 我们获得下面的结论.

定理 12.3.3 $f(1,k)=g(1,k)=2k$.

证明 考虑无向圈 C_{2k+1}, 立即得 $f(1,k)\geqslant 2k$. 下面证明 $f(1,k)\leqslant 2k$. 由式 (12.2.4), 只需证明 $g(1,k)\leqslant 2k$. 设 G 是直径为 k 的无向图, $e\in E(G)$ 使得 $d(G-e)=h=g(1,k)$. 由 $P(1,h)=\lceil\frac{h}{2}\rceil$ 和定理 12.3.2, 得

$$k=d(G)\geqslant P(1,h)=\left\lceil\frac{h}{2}\right\rceil\geqslant\frac{h}{2}.$$

这意味着 $g(1,k)=h\leqslant 2k$. ∎

应用定理 12.3.2, $P(2,k)=\lceil\frac{k+1}{3}\rceil$ 和 $P(3,k)=\lceil\frac{k+2}{4}\rceil$, 容易确定

$$g(2,k)=3k-1,\quad g(3,k)=4k-2\quad(k\geqslant 2).$$

另外, Schoone 等 [277] 确定了

$$g(t,2)=\begin{cases}t+3, & \text{当 } t=1,2,3,4,6;\\ t+2, & \text{其他},\end{cases}$$

和 $g(t,k)$ 的上下界

$$(t+1)k\geqslant g(t,k)\geqslant\begin{cases}(t+1)k-t, & \text{如果 } k \text{ 是偶数};\\ (t+1)k-2t+2, & \text{如果 } k\geqslant 3 \text{ 是奇数}.\end{cases}\qquad(12.3.1)$$

注意到上面得到的$g(t,k)$ 的上界是通过参数$P(t,h)$ 表示出来的，其中$h = g(t,k)$. 然而，这种表示对$k = 1$ 不成立. 例如，$g(4,1) = 3$. 为确保从一个完全图中去掉4条边后仍是连通的，那么这个完全图的阶至少是5. 另一方面，我们不能在长为3的路中添加4条边. 函数$g(t,1)$ 既不是单调增的，也不是单调减的. 例如，$g(4,1) = 3 = g(7,1)$，而$g(6,1) = 4$.

下面证明在本章第一节提及的结论，属于邓志国和徐俊明 [76].

定理 12.3.4 对于给定的t 和k,

$$\left\lceil \frac{k}{t+1} \right\rceil \leqslant P(t,k) \leqslant \left\lfloor \frac{k-2}{t+1} \right\rfloor + 3.$$

特别地，$P(t,(2k-1)(t+1)+1) = 2k$.

证明 先证明$P(t,k) \geqslant \frac{k}{t+1}$. 因为由引理12.3.1有$k \leqslant g(t,F(t,d))$，由式(12.3.1)有$g(t,F(t,k)) \leqslant (t+1)F(t,k)$，所以，$k \leqslant (t+1)F(t,k)$，即得 $P(t,k) = F(t,k) \geqslant \frac{k}{t+1}$.

令$n = (2k-1)(t+1)+1$. 于是，$P(t,n) \geqslant \left\lceil \dfrac{n}{t+1} \right\rceil = 2k$. 另一方面，在例12.1.2中$h = 2k-1$，得$P(t,n) \leqslant 2k$. 所以，$P(t,(2k-1)(t+1)+1) = 2k$.

现在证明 $F(t,k) \leqslant \frac{k-2}{t+1} + 3$. 为此，对给定的$t$，令$k(d) = (2d-1)(t+1)+1$. 因为$k(1) = t+2$ 且 $k(d+1) - k(d) = 2t+2$，所以对于给定的正整数k，存在正整数d和r 使得$k = (2d-1)(t+1)+1-r$，其中$0 \leqslant r \leqslant 2t+1$. 那么$k+r = (2d-1)(t+1)+1$. 因此，

$$F(t,k) \leqslant F(t,k+r) = 2d = \frac{k+r+t}{t+1} \leqslant \frac{k-2}{t+1} + 3.$$

定理得证. ∎

§12.4 互连网络的点容错直径

这一节考虑网络故障出现在结点的情形对信息传输有效性的影响. 当用图G来模拟网络拓扑结构时，结点故障的出现意味着在G中去掉对应的顶点，这必然会影响图的直径. 这就是文献中常常提到的所谓*点减少问题* (vertexe-deletion problem).

与边减少问题一样，可以引进图的点容错直径的概念. 设G 是w 连通图，F 是G 的顶点子集，$|F| < w$. 对于$G-F$ 中不同两顶点x 和y，从x 到y 的$(w-1)$ *点容错距离*，简称$(w-1)$ *容错距离* (fault-tolerant distance)，记为$D_w(G;x,y)$，定义为

$$D_w(G;x,y) = \max\{d(G-F;x,y):\ F \subset V(G) \setminus \{x,y\}, |F| < w\}.$$

显然,

$$D_w(G;x,y) = \max\{d(G-F;x,y):\ F \subset V(G) \setminus \{x,y\}, |F| = w-1\}.$$

图 G 顶点 $(w-1)$ 点容错直径, 简称 $(w-1)$ 容错直径 (fault-tolerant diameter), 记为 $D_w(G)$, 定义为

$$D_w(G) = \max\{d(G-F):\ F \subset V(G), |F| < w\}.$$

显然,

$$D_w(G) = \max\{d(G-F):\ F \subset V(G), |F| = w-1\}.$$

例如, 对于无向圈 C_n 和轮 W_{1+n}, $n \geqslant 3$. 易证 $D_2(C_n) = n-2 = D_3(W_{1+n})$, $D_1(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = D_2(W_{1+n})$, $D_1(W_{1+n}) = 2$.

容易看到, 对任何 w 连通图 G 有

$$d(G) = D_1(G) \leqslant D_2(G) \leqslant \cdots \leqslant D_{w-1}(G) \leqslant D_w(G).$$

人们感兴趣的是, 对于给定的 w 连通图 G, 确定 $D_w(G)$ 或者导出 $D_w(G)$ 与 $d(G)$ 之间的关系. 这个问题对实时系统中的某些应用是非常重要的. 一般说来, 这也是个相当困难的问题. 然而对某些著名的网络 G, $D_w(G)$ 的值已被确定, 将在下一节介绍这些结果. 这里讨论 $D_w(G)$ 的上界. 首先介绍 Chung 和 Garey[68] 得到的上界, 它与 $d(G)$ 无关.

定理 12.4.1 设 G 是 n 阶 m 连通图, 则对任何 $w \leqslant m$,

$$D_w(G) \leqslant \left\lfloor \frac{n-w-1}{m-w+1} \right\rfloor + 1.$$

而且, 这个上界可以达到.

证明 该定理对无向图和有向图均成立, 这里只给出无向图的证明. 设 G 是 m 连通无向图, $w \leqslant m$ 且 F 是 G 的 $w-1$ 个点故障集.

如果 $G-F$ 是完全图, 那么 $d(K_n - F) = d(K_{n-w+1}) = 1$. 下面假定 $G-F$ 不是完全图, 那么 $G-F$ 是连通的且 $d(G-F) = h \geqslant 2$. 设 x 和 y 是 $G-F$ 中两顶点使得 $d(G-F;x,y) = h$. 由 Menger 定理知, $G-F$ 中存在 $m-w+1$ 条内点不交的 (x,y) 路, 每条路的长至少是 h. 因此,

$$n-w+1 = |V(G-F)| \geqslant (m-w+1)(h-1)+2.$$

由此立即得到所要证的上界.

构造无向图 G 来说明这个上界是可以达到的. 对于给定正整数 $m, n, t\ (w \leqslant m)$, 令

$$p = \left\lfloor \frac{n-w-1}{m-w+1} \right\rfloor. \tag{12.4.1}$$

G 的顶点集 $V(G) = \{x,y\} \cup Z \cup U$, 其中 $|Z| = w-1$, $|U| = n-1-w$. 划分 U 成 p 个不交的子集 $U_1, U_2, \cdots, U_p$, 其中每个子集至少含 $m-w+1$ 个顶点. 令 $U_0 = \{x\}$

且 $U_{p+1}=\{y\}$. G 的边集是: 对每个 $i=0,1,\cdots,p$, U_i 中与 U_{i+1} 中每个顶点有边相连; Z 中每个顶点与 G 中所有其他的顶点有边相连. 图 12.6 中所示的就是这样的图 G, 其中 $n=11, m=4$, $t=3$.

可以直接验证 G 是 m 连通的且有直径 $d(G)=2$, 而且 $d(G-Z)=p+1$. ∎

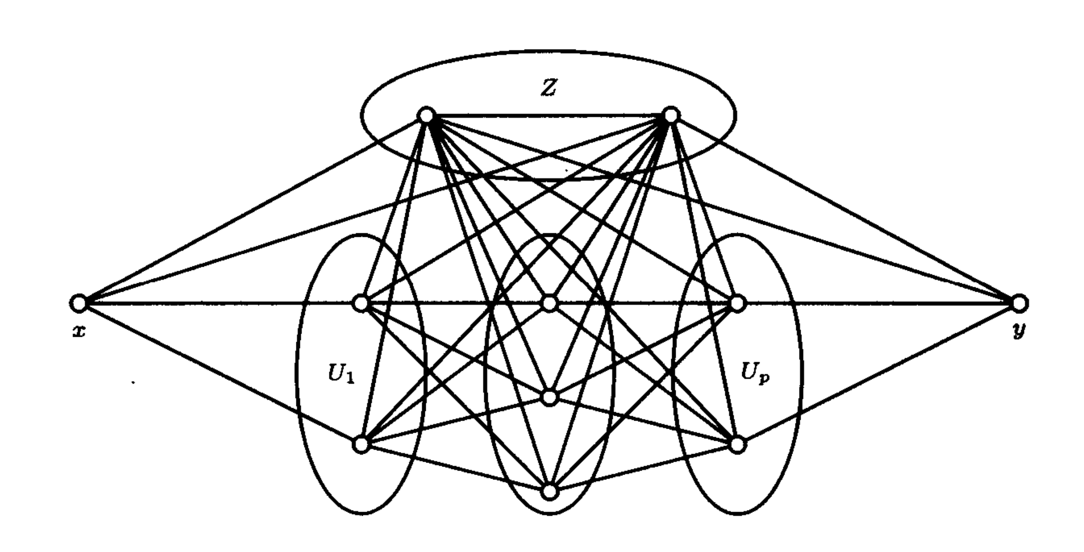


图 12.6 定理 12.4.1 的证明辅助图

作为定理 12.4.1 的应用, 立即得到以下两个推论.

推论 1 对于 n 阶 w 连通无向图 G, $D_w(G)\leqslant n-w$, 这个界可以达到. ∎

推论 2 设 G 是 n 阶 m 连通无向图. 如果 $w\leqslant m$, 那么

$$D_w(G)\leqslant\left\lceil\frac{1}{2}(p+1)\right\rceil\cdot d(G),$$

这个界可以达到, 其中 p 如式 (12.4.1) 中定义. ∎

Bond 和 Peyrat[38] 获得 $D_w(G)$ 的一些上界, 这些上界是通过 G 的最大度 Δ 和直径 k 来表示的. 例如, 对于 w 连通图 G,

$$D_w(G)\leqslant\begin{cases}(w-1)\Delta(k-1)-1, & \text{如果 } k \text{ 是偶数, 且 } \Delta\geqslant 5;\\ (w-1)\Delta(k-2)+6, & \text{如果 } k \text{ 是奇数.}\end{cases}$$

定理 12.4.2 (Bond 和 Peyrat[38]) 设 G 是 2 连通无向图. 如果 G 的最大度为 Δ ($\geqslant 2$), 直径为 k ($\geqslant 3$), 那么

$$D_2(G)\leqslant\Delta\left(2\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor-1\right)+k.$$

证明 设 $z\in V(G)$ 使得 $D_2(G)=d(G-z)$. 令 $H=G-z$, $d(H)=h$. 则 H 中存在两顶点 x_0 和 x_h 使得 $d(H;x_0,x_h)=h$. 设 $P=(x_0,x_1,\cdots,x_h)$ 是 H 中最

短 (x_0, x_h) 路, $m = \lfloor \frac{1}{2}k \rfloor$, 且

$$A = \{i:\ x_i \in V(P),\ d(G; x_i, z) > m\}.$$

对任何 $y \in N_G(z)$, 定义

$$I(y) = \{i:\ x_i \in V(P),\ d(G; x_i, y) < d(G; x_i, z)\}.$$

因为对每个 $x_i \in V(P)$, 或者 $i \in A$, 或者存在 $y \in N_G(z)$ 使得 $i \in I(y)$, 所以

$$h + 1 = |V(P)| \leqslant |A| + \sum_{y \in N_G(z)} |I(y) \setminus A|. \tag{12.4.2}$$

对任意两个 $i, j \in I(y) \setminus A$, 因为

$$d(H; y, x_i) \leqslant m - 1, \quad d(H; y, x_j) \leqslant m - 1,$$

所以, $d(H; x_i, x_j) \leqslant 2m - 2$. 于是,

$$|i - j| = d(H; x_i, x_j) \leqslant 2m - 2.$$

设 i 和 j 分别是 $I(y) \setminus A$ 中最小的和最大的数, 则

$$|I(y) \setminus A| \leqslant j - i + 1 \leqslant 2m - 1. \tag{12.4.3}$$

如果 $|A| > k + 1$, 那么 A 中存在 i 和 j 使得 $|j - i| > k$. 在这种情况下, 有

$$d(H; x_i, x_j) = |j - i| > k,\ d(G; x_i, z) + d(G; x_j, z) > k.$$

所以, $d(G; x_i, x_j) > k$, 矛盾. 因此

$$|A| \leqslant k + 1. \tag{12.4.4}$$

由不等式 (12.4.2), (12.4.3) 和 (12.4.4), 得

$$h + 1 = |V(P)| \leqslant k + 1 + \Delta(2m - 1).$$

定理得证. ∎

定理 12.4.3 (Xu 等 [353]) 设 G_i 是 k_i 连通无向图, $k_i \geqslant 1$, $i = 1, 2$. 则

$$D_{k_1+k_2}(G_1 \times G_2) \leqslant D_{k_1}(G_1) + D_{k_2}(G_2) + 1.$$

证明 令 $G = G_1 \times G_2$, $k = k_1 + k_2$. 由定理 4.2.3, $\kappa(G) \geqslant k$. 因此, $D_k(G)$ 是确定的. 令 $\delta_i = \delta(G_i)$, $i = 1, 2$. 则 $\delta_1 \geqslant k_1$, $\delta_2 \geqslant k_2$. 令 $F \subset V(G)$, $|F| = k - 1$, x

和 y 是 $G-F$ 中不同两顶点. 为了证明定理, 只需证明 $G-F$ 中存在具有要求长度的 xy 路 $R(x,y)$.

设 $x=x_1x_2$, $y=y_1y_2$, 其中 $x_1, y_1 \in V(G_1)$, $x_2, y_2 \in V(G_2)$, 并设 $P(x_1,y_1)$ 是 G_1 中最短 (x_1,y_1) 路, $Q(x_2,y_2)$ 是 G_2 中最短 (x_2,y_2) 路.

首先证明:

$$D_k(G) \leqslant \begin{cases} \max\{2+d(G_1),\ D_{k_1}(G_1)\}, & \text{如果 } x_2=y_2;\ \text{或者} \\ \max\{2+d(G_2),\ D_{k_2}(G_2)\}, & \text{如果 } x_1=y_1. \end{cases}$$

由笛卡儿乘积的交换率, 不妨设 $x_2=y_2$. 如果 $|F\cap V(G_1x_2)|<k_1$, 那么 G_1x_2-F 存在长至多为 $D_{k_1}(G_1)$ 的路. 如果 $|F\cap V(G_1x_2)|\geqslant k_1$, 令 $b_1,b_2,\ldots,b_{\delta_2}\in N_{G_2}(x_2)$, 那么 δ_2 个子图 G_1b_1, $G_1b_2,\ldots,G_1b_{\delta_2}$ 都同构于 G_1, 其中至少有一个, 比如 G_1b_1, 与 F 不交. 因此,

$$R:\ x_1x_2 \longrightarrow x_1b_1 \overset{P(x_1,y_1)b_1}{\longrightarrow} y_1b_1 \longrightarrow y_1y_2$$

是 $G-F$ 中长度不超过 $d(G_1)+2$ 的 xy 路.

下面假定 $x_1\neq y_1$ 且 $x_2\neq y_2$. 根据是否有 $y_1x_2, x_1y_2\in F$ 分两个情形.

情形 1 $y_1x_2\notin F$ 或者 $x_1y_2\notin F$. 不妨设 $y_1x_2\notin F$.

(a) $|V(G_1x_2)\cap F|\geqslant k_1$ 或者 $|V(y_1G_2)\cap F|\geqslant k_2$. 不妨设前者成立. 于是,

$$\begin{aligned}|V(y_1G_2)\cap F| &\leqslant |F|-|V(G_1x_2)\cap F| \\ &\leqslant k_1+k_2-1-k_1=k_2-1.\end{aligned}$$

因为 $b_1,b_2,\ldots,b_{\delta_2}\in N_{G_2}(x_2)$, 考虑 δ_2 不交子图 $G_1b_1,G_1b_2,\ldots,G_1b_{\delta_2}$. 其中至少有一个, 比如 G_1b_1, 不含 F 中点. 于是,

$$R:\ x_1x_2 \longrightarrow x_1b_1 \overset{P(x_1,\ y_1)b_1}{\longrightarrow} y_1b_1 \overset{y_1G_2-F}{\longrightarrow} y_1y_2$$

是 $G-F$ 中长度不超过 $1+d(G_1)+D_{k_2}(G_2)$ 的 xy 路.

(b) $|V(G_1x_2)\cap F|\leqslant k_1-1$ 且 $|V(y_1G_2)\cap F|\leqslant k_2-1$.

$$R:\ x_1x_2 \overset{G_1x_2-F}{\longrightarrow} y_1x_2 \overset{y_1G_2-F}{\longrightarrow} y_1y_2$$

是 $G-F$ 中长度不超过 $D_{k_1}(G_1)+D_{k_2}(G_2)$ 的 xy 路.

情形 2 $\{y_1x_2,x_1y_2\}\subseteq F$. 取 $c_1,c_2,\ldots,c_{\delta_1}\in N_{G_1}(x_1)$ 且 $d_1,d_2,\ldots,d_{\delta_2}\in N_{G_2}(y_2)$. 考虑 $(\delta_1+\delta_2)$ 个顶点对

$$\{c_1x_2,c_1y_2\},\ \{c_2x_2,c_2y_2\},\ \ldots,\ \{c_{\delta_1}x_2,\ c_{\delta_1}y_2\}, \tag{12.4.5}$$

$$\{x_1d_1,y_1d_1\},\ \{x_1d_2,y_1d_2\},\ \ldots,\ \{x_1d_{\delta_2},\ y_1d_{\delta_2}\}. \tag{12.4.6}$$

因为 $|F| \leqslant k_1 + k_2 - 1 < \delta_1 + \delta_1$, 所以式 (12.4.5) 和 (12.4.6) 中至少存在一对顶点, 比如 $\{c_1x_2, c_1y_2\}$, 不在 F 中. 那么, $c_1 \neq y_1$ 因为 $y_1x_2 \in F$.

(a) $|V(G_1y_2) \cap F| \geqslant k_1$. 于是,

$$|V(x_1G_2) \cap F| \leqslant k_2 - 1, \quad |V(G - G_1y_2) \cap F| \leqslant k_2 - 1.$$

考虑 δ_2 个不交子图 G_1d_1, G_1d_2, $\ldots, G_1d_{\delta_2}$. 因为 $\delta_2 \geqslant k_2 > k_2 - 1$, 这些子图中至少有一个, 比如 G_1d_1, 不含 F 中点. 因为 $c_1 \neq y_1$, 所以

$$R:\ x_1x_2 \xrightarrow{x_1G_2-F} x_1d_1 \xrightarrow{P(x_1,y_1)d_1} y_1d_1 \longrightarrow y_1y_2,$$

是 $G-F$ 中长度不超过 $1 + d(G_1) + D_{k_2}(G_2)$ 的 xy 路.

(b) $|V(c_1G_2) \cap F| \geqslant k_2$. 于是,

$$|V(G_1y_2) \cap F| \leqslant k_1 - 2, \ |V(G - c_1G_2 - x_1G_2) \cap F| \leqslant k_1 - 2.$$

考虑 $\delta_1 - 1$ 个不交子图 c_2G_2, c_3G_2, $\ldots$, $c_{\delta_1}G_2$. 因为 $\delta_1 - 1 \geqslant k_1 - 1 > k_1 - 2$, 这些子图中至少一个, 比如 c_2G_2, 不含 F 中点. 于是,

$$R:\ x_1x_2 \longrightarrow c_2x_2 \xrightarrow{c_2Q(x_2,y_2)} c_2y_2 \xrightarrow{G_1y_2-F} y_1y_2,$$

是 $G-F$ 中长度不超过 $1 + D_{k_1-1}(G_1) + d(G_2)$ 的 xy 路.

(c) $|V(G_1y_2) \cap F| \leqslant k_1 - 1$ 且 $|V(c_1G_2) \cap F| \leqslant k_2 - 1$.

$$R:\ x_1x_2 \longrightarrow c_1x_2 \xrightarrow{c_1G_2-F} c_1y_2 \xrightarrow{G_1y_2-F} y_1y_2$$

是 $G-F$ 中长度不超过 $1 + D_{k_1}(G_1) + D_{k_2}(G_2)$ 的 xy 路.

定理得证. ∎

定理 12.4.3 中上界是最好的. 例如, 考虑 $G = C_4 \times C_4$, 其中 C_4 是顶点集为 $\{1,2,3,4\}$ 的无向圈.

$$\kappa(C_4) = 2 = d(C_4) = D_2(C_4), \quad \kappa(G) = 4 = \kappa(C_4) + \kappa(C_4).$$

选取 $F = \{12, 14, 41\}$. G 中两顶点 11 和 43 在 $C_4 \times C_4 - F$ 中的距离为 5. 因此,

$$D_4(C_4 \times C_4) \geqslant 5 = 4 + 1 = D_2(C_4) + D_2(C_4) + 1.$$

§12.5 某些网络的点容错直径

这一节介绍某些著名网络的容错直径的值. 由于篇幅的限制, 略去有些结果的证明.

1. 超立方体网络 Q_n $(n \geqslant 2)$

由6.1 节的讨论知 $\kappa(Q_n) = n = d(Q_n)$. 对任何 $w \leqslant n$, 容错直径 $D_w(Q_n)$ 是确定的. 定理6.2.3 意味着

$$D_w(Q_n) = \begin{cases} n, & \text{若 } w \leqslant n-1; \\ n+1, & \text{若 } w = n. \end{cases}$$

该结果表明超立方体网络 Q_n 中点故障数不超过 $n-2$, 剩余网络的信息传输延迟不会增加, 只有当点故障数为 $n-1$ 时, 剩余网络的信息传输延迟才有可能增加1. 因此, Q_n 不仅有大的容错性, 而且还有高的传输效率.

2. 有向 de Brujin 网络 $B(d,n)$ $(d \geqslant 2, n \geqslant 1)$

由7.1 节知 $\kappa(B(d,n)) = d-1$ 且 $d(B(d,n)) = n$. 因此, 对于 $w \leqslant d-1$, 容错直径 $D_w(B(d,n))$ 是确定的. 由定理7.2.4 知,

$$D_w(B(d,n)) = n+1, \quad \text{若 } w \leqslant d-1.$$

3. 有向 Kautz 网络 $K(d,n)$ $(d \geqslant 2, n \geqslant 1)$

由8.1 节知 $\kappa(K(d,n)) = d$ 且 $d(K(d,n)) = n$. 因此, 容错直径 $D_w(K(d,n))$ 是确定的. 由定理8.1.5 知,

$$D_w(K(d,n)) \leqslant \begin{cases} n+1, & \text{若 } w \leqslant d-1; \\ n+2, & \text{若 } w = d. \end{cases}$$

Du 等 [81] 得到了 $D_w(K(d,n))$ 的值为

$$D_w(K(d,n)) = \begin{cases} n+1, & \text{若 } w \leqslant d-1, \text{ 或者 } w = d \text{ 且 } n = 2; \\ n+2, & \text{若 } w = d \text{ 且 } n \geqslant 3. \end{cases}$$

4. 无向 de Brujin 网络 $UB(d,n)$ $(d \geqslant 2, n \geqslant 1)$

由定理7.1.6 知 $\kappa(UB(d,n)) = 2d-2$ 且 $d(UB(d,n)) = n$. 因此, 当 $w \leqslant 2d-2$ 时, 容错直径 $D_w(UB(d,n))$ 是确定的. Esfahanian 和 Hakimi[98] 获得

$$D_w(UB(d,n)) = \begin{cases} = n, & \text{若 } w = 1; \\ \leqslant n+3+\log_d n, & \text{若 } 2 \leqslant w \leqslant d-1; \\ \leqslant n+\min\{n,\ 5+\log_d n\}, & \text{若 } w \leqslant 2d-2. \end{cases}$$

特别地, $\kappa(UB(2,n)) = 2$. Li 等 [207] 证明了: $UB(2,n)$ 中任何两顶点之间存在 2 条内点不交且长不超过 n 的路. 这个结果意味着

$$D_2(UB(2,n)) = n.$$

换句话说, $UB(2,n)$ 中任何一个顶点发生故障不影响传输延迟. 这个结果有点出乎意外.

5. 无向 Kautz 网络 $UK(d,n)$ $(d \geqslant 2, n \geqslant 1)$

由定理 8.1.6 知 $\kappa(UK(d,n)) = 2d-1$ 且 $d(UK(d,n)) = n$. 因此, 当 $w \leqslant 2d-1$ 时, 容错直径 $D_w(UK(d,n))$ 是确定的. Kumar 和 Reddy[197] 获得

$$D_w(UK(d,n)) = \begin{cases} = n, & \text{若 } w = 1; \\ \leqslant n + 4w, & \text{若 } 2 \leqslant w \leqslant d; \\ \leqslant 3n + 6, & \text{若 } w \leqslant 2d - 1. \end{cases}$$

当 $d > 2$ 时, Bond 和 Peyrat[39] 得到

$$D_w(UK(d,n)) = \begin{cases} = n; & \text{若 } w = 1; \\ \leqslant n + 1, & \text{若 } 2 \leqslant w \leqslant 2d - 2 \text{ 且 } n \geqslant 5; \\ \leqslant n + 2, & \text{若 } w \leqslant 2d - 1 \text{ 且 } n \geqslant 4. \end{cases}$$

6. 循环有向图 $G(d^n; 1, d, \cdots, d^{n-1})$

对于循环有向图 $G(d^n; S)$, 其中 $S = \{1, d, \cdots, d^{n-1}\}$, $d \geqslant 2$. Hamidoune[137] 证明了它的连通度为 n. 容易证明它的直径为 $n(d-1)$. Hsu 和 Lyuu[170], Duh 和 Chen[84] 得到 $D_n(G(d^n; S)) = n(d-1) + 1$. Liaw 等 [222] 进一步得到

$$D_w(G(d^n; S)) = \begin{cases} n(d-1), & \text{若 } 1 \leqslant w \leqslant n - 1; \\ n(d-1) + 1, & \text{若 } w = n. \end{cases}$$

7. 有向环面网 $\overrightarrow{C}(d_1, \cdots, d_n)$

当 $D_1 = d_2 = \cdots = d_n = d \geqslant 3$ 时, 用 $\overrightarrow{C}_n(d)$ 表示 $\overrightarrow{C}(d, d, \cdots, d)$. Liaw 和 Chang[219] 得到

$$D_w(\overrightarrow{C}_n(d)) = \begin{cases} n(d-1), & \text{若 } 1 \leqslant w \leqslant n - 1; \\ n(d-1) + 1, & \text{若 } w = n. \end{cases}$$

8. 广义超立方体网络 $Q(d_1, \cdots, d_n)$

由定理 6.4.1 知 $Q(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 的直径为 n, 且连通度为 $m = d_1 + d_2 + \cdots + d_n - n$. Duh 等 [86] 已证明 $D_m(Q(d_1, d_2, \cdots, d_n)) = n + 1$. Liaw 和 Chang[219] 进一步得到

$$D_w(Q(d_1,\cdots,d_n))=\begin{cases} n, & 若\ 1\leqslant w\leqslant n-1;\\ n, & 若\ w=n\ 且存在至少\ 2\ 个\ d_i\geqslant 3;\\ n+1, & 若\ w=n\ 且存在至少\ 1\ 个\ d_i\geqslant 3;\\ n+1, & 若\ n+1\leqslant w\leqslant m.\end{cases}$$

9. 立方连通圈 $CCC(n)$

由 10.3 节知 $\kappa(CCC(n))=3$ 且 $d(CCC(n))=\lfloor \frac{5}{2}n-1\rfloor$. Krishnamoorthy 等 [194] 得到

$$D_3(CCC(n))=\left\lfloor \frac{5}{2}n+2\right\rfloor.$$

10. 蝶形网 $BF(n)$

蝶形网 $BF(n)$ 的连通度为 2. Cao 等 [53] 得到

$$D_2(BF(n))=2n+2,\quad \text{for } n\geqslant 2.$$

11. 折叠超立方体 FQ_n

由定理6.5.3 知 FQ_n 有直径 $\lceil \frac{1}{2}n\rceil$ 且连通度 $n+1$. Duh 和 Chen[84] 获得 $D_{n+1}(FQ_n)=\lceil \frac{1}{2}n\rceil+1$. Liaw 和 Chang[220], Simó 和 Yebra[285] 独立得到更一般的结果.

$$D_w(FQ_n)=\begin{cases} \left\lceil \dfrac{1}{2}n\right\rceil, & 若\ 1\leqslant w\leqslant \left\lceil \dfrac{1}{2}n\right\rceil-1;\\ \left\lceil \dfrac{1}{2}n\right\rceil+1, & 若\ \left\lceil \dfrac{1}{2}n\right\rceil\leqslant w\leqslant n+1.\end{cases}$$

12. 金字塔网络 $PN(n)$

由定理 10.2.1 知, $\kappa(PN(n))=3$. Cao 等 [52] 获得

$$\begin{cases} D_2(PN(2))=5,\quad D_3(PN(2))=6,\\ D_2(PN(1))=2,\quad D_3(PN(1))=2,\\ D_i(PN(n))=2n+2i-2,\quad i=2,3,\ n\geqslant 3.\end{cases}$$

13. 星图 S_n

星图 S_n 是由 Akers 和 Krishnamurthy[5] 首先提出来的, 它有许多良好的性质, 参见 [4,7,184]. 它的连通度 $\kappa(S_n)=n-1$, 直径为 $\lfloor 3(n-1)/2\rfloor$. Latifi[202] 证明了:

$$D_{n-1}(S_n)=\begin{cases} \left\lfloor \dfrac{3}{2}(n-1)\right\rfloor+1, & 若\ n=3,5,n\geqslant 7;\\ \left\lfloor \dfrac{3}{2}(n-1)\right\rfloor+2, & 若\ n=4,6.\end{cases}$$

习　题

12.1 证明:

(a) $F(t,g(t,k)) \leqslant k \leqslant g(t,F(t,k))$ (即引理 12.3.1);

(b) $F(t,k) \leqslant F(t,k'),\quad f(t,k) \leqslant f(t,k'),\ k \leqslant k'$.

12.2 $C(t,n)$ 表示在无向圈 C_n 中添加 t 条边后得到的变更图的最小直径. 证明:

(a) $C(t,n+1) \geqslant P(t+1,n)$;

(b) $C(n,2) = \left\lceil \frac{1}{4}(n+2) \right\rceil,\ n \geqslant 5$. (Chung 和 Garey[68])

12.3 证明: 对任何整数 k 和 h, (邓志国和徐俊明 [76])

(a) $P(4,5(2k-1)+h) \leqslant 2k+1\ (2 \leqslant h \leqslant 5)$;

(b) $P(5,6(2k-1)+h) \leqslant 2k+1\ (2 \leqslant h \leqslant 6)$;

(c) 对任何整数 $d\,(\geqslant 4)$, $\left\lceil \frac{d}{5} \right\rceil \leqslant P(4,d) \leqslant \left\lceil \frac{d}{5} \right\rceil + 1,\ \left\lceil \frac{d}{6} \right\rceil \leqslant P(5,d) \leqslant \left\lceil \frac{d}{6} \right\rceil + 1$.

12.4 证明: $g(2,k) = 3k-1,\quad g(3,k) = 4k-2\quad (k \geqslant 2)$.

12.5 证明: 设 G 是 n 阶 w 连通无向图. 若它的 $(w-1)$ 容错直径为 $k\ (\geqslant 2)$, 则

$$\varepsilon(G) \leqslant (k-2)w + \frac{1}{2}(n-k)(n-k+3),$$

而且这个界是可以达到的. (韩国文和张忠良 [139])

12.6 设 n,t,k 是正整数, $n \geqslant 4, k \geqslant 2, t \geqslant 4$. 证明:

(a) $P(t,n) \leqslant k$ 如果 $n \leqslant k(t+1) - 2t + 4$;

(b) $P(t,n) \leqslant k$ 如果 $n \leqslant 2k(t+1) - t$;

(c) $P(t,n) \leqslant \frac{n-8}{t+1} + 3$;

(d) $\left[\frac{n-1}{5}\right] \leqslant P(4,n) \leqslant \left[\frac{n+3}{5}\right]$;

(e) $f(t,k) \geqslant (t+1)k - 2t + 4$ 如果 k 是奇数.

12.7 设 n,t,k 是正整数, $n \geqslant 4, k \geqslant 1, t \geqslant 4$. 证明:

(a) $C(t,n) \leqslant \begin{cases} k & \text{如果} n \leqslant k(t+1) - 2t + 5, k \geqslant 3; \\ 2k & \text{如果} n \leqslant 2k(t+1) - t + 1, k \geqslant 1; \end{cases}$

(b) $C(t,n) \leqslant k$ 如果 $n \leqslant k(t+2) - 2t + 2, k \geqslant 3$ 且 t 是偶数;

(c) 如果 $n \geqslant 5$, 那么 $C(t,n) \leqslant \begin{cases} \frac{n-7}{t+2} + 3 & \text{如果} t \text{是偶数} \\ \frac{n-8}{t+1} + 3 & \text{如果} t \text{是奇数}. \end{cases}$

(d) $\left[\frac{n}{4}\right] - 1 \leqslant C(3,n) \leqslant \left[\frac{n}{4}\right], n \geqslant 5.$;

第 13 章 并行系统中 Menger 型问题

上一章讨论了两个图论参数: $D_w(G)$ 和 $D'_w(G)$. 也就是说, 如果 $D_w(G)=\ell$ (或者 $D'_w(G)=\ell$), 那么对 G 中任何两顶点 x 和 y, 以及任何 $F\subseteq V(G)\setminus\{x,y\}$ (或者 $F\subseteq E(G)$), 只要 $|F|\leqslant w-1$, $G-F$ 中必含一条长不超过 ℓ 的 (x,y) 路.

这一章讨论与之对偶的问题: 对于给定的连通图 G 和正整数 ℓ, 确定最大的 w 使得 $D_w(G)$ (或者 $D'_w(G)$) $\leqslant\ell$. 这样的 w 将被称为 G 关于 ℓ 的有界连通度 (或者有界边连通度). 这两参数的确定在实时并行处理系统中有着重要的意义, 因为当信息传输延迟 ℓ 给定后, 这两个参数提供了网络容错性的度量. 换句话说, 该系统能容许 $w-1$ 个结点或者连线同时发生故障, 剩余网络任何两结点之间仍能在规定的时间内有效地传递信息.

由此导出另一个问题是: 对给定的连通图 G 和给定的正整数 ℓ, 确定 G 中任何两顶点之间内点 (或者边) 不交且长不超过 ℓ 的路的最大条数. 这个最大数将被称为 G 中关于 ℓ 的 Menger 数.

本章还讨论与之相关的其他问题, 如图中超长路问题和 Rabin 数.

§13.1 点不交限长路问题

当用连通图 G 来模拟并行计算或并行处理系统互连网络时, 可同时用 w 条内点不交的路来传输数据从一个顶点 x 到另一个顶点 y, 只要 $w\leqslant\zeta(G;x,y)$, 其中 $\zeta(G;x,y)$ 被称为 G 中 (x,y)-Menger 数. 然而, 如果该互连网络是实时系统, 那么每条用来传输数据的路长不能超过给定的时限 ℓ, 因为在这样的系统中任何超时到达的数据本质上是无用的. 由此导致人们需要考虑下面两个参数.

设 x 和 y 是 G 中任意两个顶点. G 中关于 ℓ 的 (x,y)-Menger 数, 记为 $\zeta_\ell(G;x,y)$, 定义为 G 中内点不交且长不超过 ℓ 的 (x,y) 路的最大数目. 同样地, 如果 $(x,y)\notin E(G)$, G 中关于 ℓ 的 (x,y) 有界连通度 (bounded connectivity), 记为 $\kappa_\ell(G;x,y)$, 定义为最小顶点数目使得从 $G\setminus\{x,y\}$ 中去掉这个数目的顶点就不存在长不超过 ℓ 的 (x,y) 路.

例如, 考虑图 13.1 中所示的图 G,

$$\zeta_4(G;x,y)=1=\kappa_4(G;x,y);\quad \zeta_5(G;x,y)=1,\quad \kappa_5(G;x,y)=2.$$

因为当 $\ell<d(G;x,y)$ 时, $\zeta_\ell(G;x,y)=\kappa_\ell(G;x,y)=0$, 所以为了避免这种情形, 假定 $\ell\geqslant d(G;x,y)\geqslant 2$. 又因为 n 阶连通图中任何两顶点之间的路长不超过 $n-1$, 所以假定 $\ell\leqslant n-1$. 由定义, 对任何 $d(G,x,y)\leqslant\ell'\leqslant\ell\leqslant n-1$, 显然有

$$\zeta_{\ell'}(G;x,y)\leqslant\zeta_\ell(G;x,y),\quad \kappa_{\ell'}(G;x,y)\leqslant\kappa_\ell(G;x,y).$$

当 $\ell = n-1$ 时, 事实上是对路长没有限制. 因此,

$$\zeta_{n-1}(G;x,y) = \zeta(G;x,y), \quad \kappa_{n-1}(G;x,y) = \kappa(G;x,y).$$

由 Menger 定理, 得等式

$$\zeta_{n-1}(G;x,y) = \kappa_{n-1}(G;x,y). \tag{13.1.1}$$

然而, 图 13.1 中所示的无向图表明, 一般说来, 对任意给定的 $\ell < n-1$, 式 (13.1.1) 中的等式是不成立的. 但下面的不等式对任何给定的 ℓ 总是成立的.

$$\zeta_\ell(G;x,y) \leqslant \kappa_\ell(G;x,y). \tag{13.1.2}$$

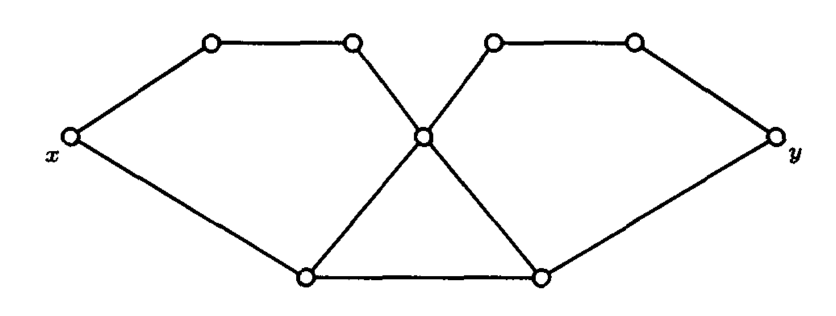


图 13.1 说明限长不交路的例子

这是因为, 为了破坏所有的长不超过 ℓ 的 (x,y) 路, 每条这样的路中至少要去掉一个顶点.

因此, 寻找某些特殊的 ℓ 使得式 (13.1.2) 中的等号成立是有意义的. Lovász 等 [229] 首先研究了这个问题, 并发现了某些特殊的 ℓ.

定理 13.1.1 对任何无向图 G 和其中不相邻两顶点 x 和 y, 有

$$\zeta_4(G;x,y) = \kappa_4(G;x,y).$$

证明 划分 $V(G)$ 为不交的子集 V_{ij} 如下:

$$z \in V_{ij} \Leftrightarrow d(G-y;x,z) = i \text{ 且 } d(G-x;z,y) = j.$$

显然, 可以不考虑 V_{11} 和所有的 V_{ij}, $i+j > 4$. 因此, 剩余的图记为 H, 它有如图 13.2 中所示的结构.

按下述方法从图 H 构造一个有向图 D: $V(D) = V(H)$ 且

$$(u,v) \in E(D) \Leftrightarrow uv \in E(H) \text{ 且 } d(H;x,v) > d(H;x,u).$$

这样构造的有向图 D 有如图 13.2 中所示的结构.

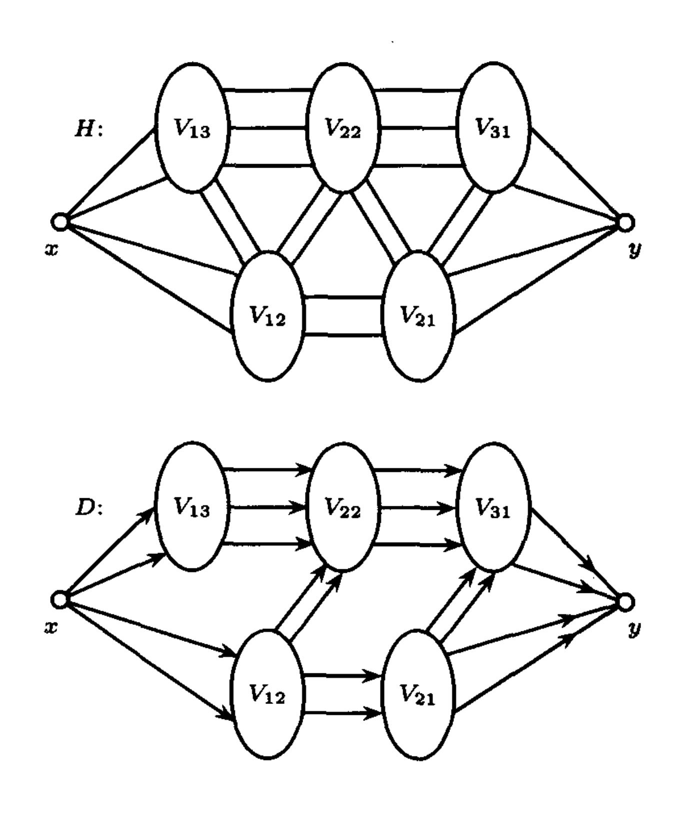


图 13.2 定理 13.1.1 的证明辅助图 H 和 D

不难看到, D 中每条 (x,y) 路的长不超过 4, 它在 H 中对应的 xy 路的长也不超过 4. 这意味着

$$\zeta_4(G;x,y) \geqslant \zeta_4(H;x,y) \geqslant \zeta(D;x,y).$$

由 Menger 定理, 有 $\zeta(D;x,y) = \kappa(D;x,y)$. 于是得

$$\zeta_4(G;x,y) \geqslant \kappa(D;x,y). \tag{13.1.3}$$

为了完成定理证明, 由不等式 (13.1.2), 只需证明 $\kappa_4(G;x,y) \leqslant \zeta_4(G;x,y)$. 由式 (13.1.3), 只需证明

$$\kappa_4(G;x,y) \leqslant \kappa(D;x,y).$$

事实上, 令 S 是 D 中 (x,y) 分离集且 $|S| = \kappa(D;x,y)$. 如果 $H-S$ 中存在长不超过 4 的 xy 路 P, 那么能从 P 构造 D 中长不超过 4 且不经过 S 的 (x,y) 路, 这与 S 的选取矛盾. 因此, $H-S$ 中不存在长不超过 4 的 xy 路. 这意味着 $\kappa_4(G;x,y) \leqslant \kappa(D;x,y)$. 定理得证. ∎

定理 13.1.2 对任何无向图 G 和其中的任何不相邻两顶点 x 和 y, 如果 $d = d(G;x,y)$, 那么

$$\zeta_d(G;x,y) = \kappa_d(G;x,y).$$

证明 按下列规则对 G 的某些边进行定向来构造有向图 D:

$$(u,v)\in E(D)\Leftrightarrow uv\in E(G) \text{ 且 } d(G;u,y)>d(G;v,y).$$

显然, G 中最短 xy 路必得到 D 中 (x,y) 路.

另一方面, D 中 (x,y) 路必是由 G 中最短 xy 路按上述规则定向而得到的. 事实上, 令 $P=(x_0,x_1,\cdots,x_h)$ 是 D 中 (x,y) 路, 其中 $x_0=x$ 且 $x_h=y$. 由 D 的构造, $d(G;x_{i-1},y)>d(G;x_i,y)$, $i=1,2,\cdots,h$. 这意味着, 当从 x 出发沿着 P 到 y 时, 每经过一条有向边, 其距离减少 1. 因此, P 至多有 d 条边, 即, $h\leqslant d$. 这说明 P 对应 G 中最短 xy 路. 于是

$$\zeta_d(G;x,y)=\zeta(D;x,y),\quad \kappa_d(G;x,y)=\kappa(D;x,y).$$

在 D 中应用 Menger 定理, 得 $\zeta_d(G;x,y)=\kappa_d(G;x,y)$. ∎

定理 13.1.2 也由 Entringer 等 [93] 获得. 一般地, $\zeta_\ell(G;x,y)$ 和 $\kappa_\ell(G;x,y)$ 之间的关系有下列结果, 它是由 Lovász 等 [229] 首先得到的.

定理 13.1.3 对任何无向图 G 和其中任何不相邻两顶点 x 和 y, 如果 $m=\ell-d(G;x,y)\geqslant 0$, 那么

$$\kappa_\ell(G;x,y)\leqslant (m+1)\zeta_\ell(G;x,y).$$

证明 对 $m\geqslant 0$ 用归纳法. 当 $m=0$ 时, 即为定理 13.1.2. 假定该结论对某个最小的整数 $m_0\geqslant 0$ 成立, 并假定 $m=\ell-d(G;x,y)=m_0+1$.

令 X 是 G 中覆盖所有最短 xy 路的最小顶点集, $d=d(G;x,y)$. 由定理 13.1.2, 有

$$|X|=\kappa_d(G;x,y)=\zeta_d(G;x,y)\leqslant\zeta_\ell(G;x,y).$$

考虑子图 $H=G-X$. 如果 $d(H;x,y)>\ell$, 那么 X 已覆盖了所有长不超过 ℓ 的 xy 路. 于是, 有

$$\kappa_\ell(G;x,y)\leqslant|X|\leqslant\zeta_\ell(G;x,y)\leqslant m\,\zeta_\ell(G;x,y),$$

结论成立. 下面假定 $d(H;x,y)\leqslant\ell$, 因此, 存在 r 使得 $d(H;x,y)=\ell-r$. 因为 X 覆盖了 G 中所有最短 xy 路, 所以 H 中不存在长为 $d(G;x,y)$ 的 xy 路. 这意味着 $d(H;x,y)>d(G;x,y)$. 因此,

$$0\leqslant r=\ell-d(H;x,y)<\ell-d(G;x,y)=m.$$

应用归纳假设到 H 中顶点 x 和 y, 得

$$\kappa_\ell(H;x,y)\leqslant(r+1)\,\zeta_\ell(H;x,y).$$

于是, 能选择一个顶点子集 Y 使得它覆盖所有长不超过 ℓ 的 xy 路, 且

$$\begin{aligned}|Y| &\leqslant |X| + \kappa_\ell(H;x,y)\\ &\leqslant |X| + (r+1)\,\zeta_\ell(H;x,y)\\ &\leqslant |X| + (r+1)\,\zeta_\ell(G;x,y).\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\kappa_\ell(G;x,y) \leqslant |Y| &\leqslant |X| + (r+1)\,\zeta_\ell(G;x,y)\\ &\leqslant (r+2)\,\zeta_\ell(G;x,y)\\ &\leqslant (m+1)\,\zeta_\ell(G;x,y).\end{aligned}$$

由归纳原理, 定理得证. ∎

定理 13.1.4 对任何无向图 G 和其中的任何不相邻两顶点 x 和 y, 均有

$$\kappa_\ell(G;x,y) \leqslant \left\lfloor \frac{\ell}{2} \right\rfloor \zeta_\ell(G;x,y).$$

证明 首先考虑 $d(G;x,y) \geqslant 1 + \lceil \frac{\ell}{2} \rceil$ 的情形. 如果 $\ell = 2k$ $(k \geqslant 1)$, 那么 $d(G;x,y) \geqslant 1+k$ 且

$$m+1 = \ell - d(G;x,y) + 1 \leqslant 2k - (1+k) + 1 = k = \left\lfloor \frac{\ell}{2} \right\rfloor.$$

如果 $\ell = 2k+1$ $(k \geqslant 1)$, 那么 $d(G;x,y) \geqslant 2+k$ 且

$$m+1 = \ell - d(G;x,y) + 1 \leqslant (2k+1) - (2+k) + 1 = k = \left\lfloor \frac{\ell}{2} \right\rfloor.$$

因此, 如果 $d(G;x,y) \geqslant 1 + \lceil \frac{\ell}{2} \rceil$, 那么由定理 13.1.3 知该结论成立.

下面假定 $d(G;x,y) \leqslant \lceil \frac{\ell}{2} \rceil$. 选取整数 h 使得 $d(G;x,y) \leqslant h \leqslant \ell$. 设 P_0 是 G 中最短 xy 路. 从 G 中去掉路 P_0 中所有内部点得子图, 记为 G_1. 显然, $d(G_1;x,y) \geqslant d(G;x,y)$. 令 P_1 是 G_1 中最短 xy 路. 从 G_1 中去掉 P_1 的所有内部点得子图 G_2. 继续这个过程, 直到子图 G_r, 其中不存在长不超过 h 的 xy 路, 但 G_{r-1} 中含长不超过 h 的最短 xy 路 P_{r-1} 为止. 为方便起见, 令 $H = G_r$. 那么 $d(H;x,y) \geqslant h+1$.

因为 H 是由 G 去掉 r 条内点不交 xy 路的所有内点而得到的, 而且这 r 条路的长都不超过 h 的最短 xy 路, 所以

$$\zeta_\ell(G;x,y) \geqslant \zeta_\ell(H;x,y) + r \tag{13.1.4}$$

因为从 G 中去掉的顶点数目最多为 $r(h-1)$, 所以

$$\kappa_\ell(G;x,y) \leqslant \kappa_\ell(H;x,y) + r(h-1). \tag{13.1.5}$$

而且, 如果 x 和 y 在 H 是连通的, 那么由定理 13.1.3 得

$$\begin{aligned}\kappa_\ell(H;x,y) &\leqslant (\ell-d(H;x,y)+1)\zeta_\ell(H;x,y)\\ &\leqslant (\ell-h)\ \zeta_\ell(H;x,y),\end{aligned}$$

即,

$$\kappa_\ell(H;x,y) \leqslant (\ell-h)\zeta_\ell(H;x,y). \tag{13.1.6}$$

由式 (13.1.5), (13.1.6) 和 (13.1.4) 得

$$\begin{aligned}\kappa_\ell(G;x,y) &\leqslant (\ell-h)\zeta_\ell(H;x,y)+r(h-1)\\ &\leqslant (\ell-h)(\zeta_\ell(G;x,y)-r)+r(h-1)\\ &= (\ell-h)\zeta_\ell(G;x,y)+r(2h-\ell-1),\end{aligned}$$

即,

$$\kappa_\ell(G;x,y) \leqslant (\ell-h)\zeta_\ell(G;x,y)+r(2h-\ell-1). \tag{13.1.7}$$

因为 ℓ 是非负的, 所以选取 h 是最大整数使得 $2h-\ell-1 \leqslant 0$. 因为 $h \leqslant \left\lfloor\frac{1}{2}(\ell+1)\right\rfloor = \left\lceil\frac{\ell}{2}\right\rceil$ 且 h 是整数, 所以 $h = \left\lceil\frac{\ell}{2}\right\rceil$, 它满足 $d(G;x,y) \leqslant h = \left\lceil\frac{\ell}{2}\right\rceil < \ell$. 因此,

$$\ell-h=\ell-\left\lceil\frac{\ell}{2}\right\rceil=\left\lfloor\frac{\ell}{2}\right\rfloor. \tag{13.1.8}$$

由于 $2h-\ell-1\leqslant 0$, 所以由式 (13.1.7) 和 (13.1.8) 得

$$\kappa_\ell(G;x,y) \leqslant \left\lfloor\frac{\ell}{2}\right\rfloor \zeta_\ell(G;x,y).$$

如果 x 和 y 在 H 中不连通, 那么 $\kappa_\ell(H;x,y) = \zeta_\ell(H;x,y) = 0$. 由式 (13.1.5) 和 (13.1.4) 得,

$$\kappa_\ell(G;x,y) \leqslant r(h-1) \leqslant (h-1)\zeta_\ell(G;x,y).$$

选取 h 使得 $h = \left\lfloor\frac{\ell}{2}\right\rfloor+1$, 它满足 $d(G;x,y) \leqslant h = \left\lfloor\frac{\ell}{2}\right\rfloor+1 \leqslant \ell$. 所以,

$$\kappa_\ell(G;x,y) \leqslant \left\lfloor\frac{\ell}{2}\right\rfloor \zeta_\ell(G;x,y).$$

定理得证. ∎

定理 13.1.4 中界对 $\ell=2,3$ 是紧的, 对 $\ell=5$ 也是紧的 (参见图 13.1). 然而, 定理 13.1.1 表明这个界对 $\ell=4$ 不是紧的. 由定理 13.1.4 和不等式 (13.1.2), 立即得到下面的推论.

推论　对任何无向图 G 和其中的不相邻两顶点 x 和 y, 如果 $\ell = 2$ 和 3, 那么 $\kappa_\ell(G;x,y) = \zeta_\ell(G;x,y)$. ∎

Itai, Perl 和 Shiloah[183] 已经证明了: 对任何图 G 和 $\ell \geqslant 5$, 确定 $\zeta_\ell(G;x,y)$ 是NP 完备的. Ronen 和 Perl[270] 给出求不交限长路最大条数的试探算法. 因此, 有意义的问题是想知道: $\kappa_\ell(G;x,y)$ 与 $\zeta_\ell(G;x,y)$ 之间的空隙到底有多大? Boyles 和 Exoo[45] 构造了一类图 G_m 和其中不相邻两顶点 x 和 y 满足

$$\zeta_{4m-3}(G_m;x,y)=1,\ \kappa_{4m-3}(G_m;x,y)=m. \tag{13.1.9}$$

这个表明

$$\kappa_{4m-3}(G_m;x,y)=m\zeta_{4m-3}(G_m;x,y).$$

对于给定 $\ell \geqslant 2$, 定义函数

$$s(\ell)=\sup\left\{\frac{\kappa_\ell(G;x,y)}{\zeta_\ell(G;x,y)}\right\},$$

其中, 上确界是对所有无向图 G 和其中的不相邻两顶点 x 和 y 而取的. 上面得到的结果表明

$$s(2)=s(3)=s(4)=1,\quad s(5)=2.$$

定理 13.1.4 和不等式 (13.1.9) 意味着

$$\left\lfloor\frac{1}{4}(\ell+3)\right\rfloor \leqslant s(\ell) \leqslant \left\lfloor\frac{\ell}{2}\right\rfloor.$$

关于 $s(\ell)$ 最好的界是:

$$\left\lfloor\frac{1}{3}(\ell+1)\right\rfloor \leqslant s(\ell) \leqslant \left\lfloor\frac{\ell}{2}\right\rfloor.$$

下界是 Chung[64] 得到的. 另外的结果, 感兴趣的读者可参见 Pyber 和 Tuza[264].

在结束这一节之前, 我们叙述两个值得进一步研究的问题. 第一个是获得 $s(\ell)$ 更紧的界. 要想给出有意义的改进, 可能需要新的方法和技巧. 第二个问题是对有向图来讨论以上的问题. 这一节所采用的方法和技巧不能推广到有向图, 尤其是确定有向图的 $s(\ell)$ 可能就更困难.

§13.2 Menger 数与有界连通度

这一节考虑信息传输延迟给定后, 互连网络整体通信效率和容错性问题. 换句话说, 对于给定的图 G 和给定的正整数 ℓ, 考虑 G 关于 ℓ 的 Menger 数和有界连通度问题.

设 G 是 n 阶连通无向图或者强连通有向图. 对于给定的正整数 ℓ $(1 \leqslant \ell \leqslant n-1)$, G 的关于 ℓ 的 Menger 数定义为参数

$$\zeta_\ell(G)=\min\{\zeta_\ell(G;x,y):\ \forall\, x,y\in V(G),(x,y)\notin E(G)\}.$$

同样地, G 的关于 ℓ 的有界连通度 (bounded connectivity) 定义为参数

$$\kappa_\ell(G) = \min\{\kappa_\ell(G; x, y) : \forall\, x, y \in V(G), (x, y) \notin E(G)\}.$$

为了避免非常简单的情形, 假定 $\ell \geqslant d(G) \geqslant 2$.

显然, 对于给定的 G 和 ℓ $(2 \leqslant d(G) \leqslant \ell \leqslant n-1)$, $\zeta_\ell(G)$ 和 $\kappa_\ell(G)$ 都是确定的, 而且

$$\zeta_d(G) \leqslant \zeta_{d+1}(G) \leqslant \cdots \leqslant \zeta_{n-1}(G),$$

$$\kappa_d(G) \leqslant \kappa_{d+1}(G) \leqslant \cdots \leqslant \kappa_{n-1}(G) = \kappa(G),$$

其中 $d = d(G)$. 在文献中, $\kappa_d(G)$ 称为 G 的持久度 (persistence), 它是 G 的直径脆弱性 (vulnerability) 的重要度量参数, 是由 Boesch 等 [36] 首先提出来的.

显然, 当 $\ell = n-1$ 时, 事实上是对路长不加限制. 所以由 Menger 定理有

$$\zeta_{n-1}(G) = \kappa_{n-1}(G) = \kappa(G).$$

一般地,

$$\zeta_\ell(G) \leqslant \kappa_\ell(G) \leqslant \kappa(G). \tag{13.2.1}$$

文献中, 曾有人断言: 当 $d = d(G)$ 时有 $\zeta_d(G) = \kappa_d(G)$. 很快就有人给出反例. 如, Exoo[102], Bondy 和 Hell[41]. 图 13.3 中所示的图 G 就是其中的反例之一, $d(G) = 5$, $\zeta_5(G) = 1$, 但 $\kappa_5(G) = 2$, 顶点 x 和 y 达到这些值.

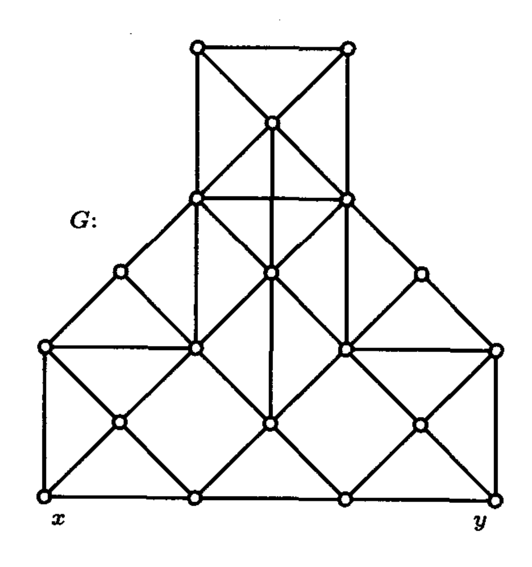


图 13.3 直径 5, $\zeta_5(G) = 1$ 且 $\kappa_5(G) = 2$ 的图 G

由 Menger 定理, 定理 13.1.1 和定理 13.1.4 的推论, 对任何 n 阶且直径至少为 2 的连通无向图 G 都有

$$\zeta_\ell(G) = \kappa_\ell(G), \quad 其中\ \ell = 2, 3, 4\ 或者\ n-1.$$

显然, 对任意的 G 和 ℓ, 确定 $\zeta_\ell(G)$ 也是困难的, 因为已经证明: 确定 $\zeta_\ell(G;x,y)$ 是NP 完备的. 因此, 对于某些著名的图和给定的 $\ell \geqslant 2$, 确定 $\zeta_\ell(G)$ 和 $\kappa_\ell(G)$ 的值是有意义的. 本节将对超立方体, de Brujin 图和 Kautz 图确定 $\zeta_\ell(G)$ 和 $\kappa_\ell(G)$. 首先, 讨论 $\kappa_\ell(G)$ 和 $D_w(G)$ 之间的关系.

定理 13.2.1 对任何连通图 G,

(a) 如果 G 是 $w+1$ 连通的, 那么 $\kappa_\ell(G)=w \Leftrightarrow D_w(G) \leqslant \ell < D_{w+1}(G)$;

(b) 如果 G 是 w 连通的, 那么 $D_w(G)=\ell \Leftrightarrow \kappa_{\ell-1}(G) < w \leqslant \kappa_\ell(G)$.

证明 (a) 假定 $\kappa_\ell(G)=w$. 一方面, G 中存在两顶点 x 和 y 使得 $(x,y)\notin E(G)$ 且 $\kappa_\ell(G;x,y)=w$. 于是, 存在 $F\subseteq V(G)\setminus\{x,y\}$, $|F|=w$ 使得 $G-F$ 中不存在长不超过 ℓ 的 (x,y) 路. 这意味着 $d(G-F;x,y)>\ell$, 即, $D_{w+1}(G;x,y)>\ell$. 因此, $D_{w+1}(G)>\ell$. 另一方面, 对 G 中任何两顶点 x,y 和任何子集 $S\subseteq V(G)\setminus\{x,y\}$, $|S|<w$, $G-S$ 中至少存在一条长不超过 ℓ 的 (x,y) 路. 这说明 $D_w(G)\leqslant \ell$.

反之, 如果 $D_w(G)\leqslant\ell$, 那么 G 中任何两顶点 x 和 y 有 $D_w(G;x,y)\leqslant D_w(G)\leqslant \ell$. 于是, 对任何子集 $S\subseteq V(G)\setminus\{x,y\}$ 且 $|S|<w$, $G-S$ 中至少存在一条长不超过 ℓ 的 (x,y) 路. 这意味着 $\kappa_\ell(G;x,y)\geqslant w$. 因此, $\kappa_\ell(G)\geqslant w$. 如果 $D_{w+1}(G)>\ell$, 那么存在两顶点 x,y 和一个子集 $F\subseteq V(G)\setminus\{x,y\}$ 使得 $|F|=w$ 且 $G-F$ 中不存在长不超过 ℓ 的 (x,y) 路. 这意味着 $\kappa_\ell(G;x,y)\leqslant w$. 因此, $\kappa_\ell(G)\leqslant w$, $\kappa_\ell(G;x,y)=w$.

类似地可以证明结论 (b), 留给读者作为练习. ∎

定理 13.2.2 对超立方体 Q_n, 如果 $2\leqslant n\leqslant \ell\leqslant 2^n-1$, 那么

$$\zeta_\ell(Q_n)=\kappa_\ell(Q_n)=\begin{cases} n-1, & \text{若 } \ell=n; \\ n, & \text{若 } l>n. \end{cases}$$

证明 因为 $d(Q_n)=n$, 所以当 $n\leqslant\ell\leqslant 2^n-1$ 时, $\zeta_\ell(Q_n)$ 和 $\kappa_\ell(Q_n)$ 都有确定的值. 设 x 和 y 是 Q_n 中不相邻两顶点. 由定理 6.2.3 知, Q_n 中存在 n 条内点不交且长不超过 $n+1$ 的 xy 路. 这意味着 $\zeta_{n+1}(Q_n;x,y)\geqslant n$. 因此, 当 $\ell\geqslant n+1$ 时, 由式 (13.2.1) 得

$$n\leqslant \zeta_\ell(Q_n)\leqslant \kappa_\ell(Q_n)\leqslant \kappa(Q_n)=n.$$

又由定理 6.2.3 知, Q_n 中任何两顶点 x 和 y 之间至少存在 $n-1$ 条内点不交且长不超过 n 的 (x,y) 路. 这意味着 $\zeta_n(Q_n)\geqslant n-1$. 另一方面, 由 12.5 节知, $D_{n-1}(Q_n)=n<n+1=D_n(Q_n)$. 由定理 13.2.1 知 $\kappa_n(Q_n)=n-1$. 于是,

$$n-1\leqslant \zeta_n(Q_n)\leqslant \kappa_n(Q_n)=n-1.$$

定理得证. ∎

定理 13.2.3 对 de Brujin 有向图 $B(d,n)$, 如果 $2\leqslant n\leqslant\ell\leqslant d^n-1$, 那么

$$\zeta_\ell(B(d,n))=\kappa_\ell(B(d,n))=\begin{cases} 1, & \text{若 } \ell=n; \\ d-1, & \text{若 } \ell>n. \end{cases}$$

证明 因 $d(B(d,n))=n$, 故当 $n\leqslant \ell\leqslant d^n-1$ 时, $\zeta_\ell(B(d,n))$ 和 $\kappa_\ell(B(d,n))$ 都有确定的值. 由定理 7.2.4 知, 对 $B(d,n)$ 中任何两顶点 x 和 y, 存在 $d-1$ 条内点不交且长不超过 $n+1$ 的 (x,y) 路. 因此, 当 $\ell\geqslant n+1$ 时, 由式 (13.2.1) 得

$$d-1\leqslant \zeta_\ell(B(d,n))\leqslant \kappa_\ell(B(d,n))\leqslant \kappa(B(d,n))=d-1.$$

考虑两顶点 x 和 y 使得 $d(B(d,n);x,y)=n$. 因 $n\geqslant 2$, 故 $(x,y)\notin E(B(d,n))$. 由定理 7.2.2 知, $B(d,n)$ 中存在唯一的长为 n 的 (x,y) 路. 由定理 13.1.2 知

$$\kappa_n(B(d,n);x,y)=\zeta_n(B(d,n);x,y)=1.$$

另一方面, 显然有 $\zeta_n(B(d,n))\geqslant 1$. 所以,

$$1\leqslant \zeta_n(B(d,n))\leqslant \kappa_n(B(d,n))\leqslant \kappa_n(B(d,n);x,y)=1.$$

定理得证. ∎

定理 13.2.4 对 Kautz 有向图 $K(d,n)$, 如果 $2\leqslant n\leqslant \ell\leqslant d^n+d^{n-1}-1$, 那么

$$\zeta_\ell(K(d,n))=\kappa_\ell(K(d,n))=\begin{cases}1, & 若\ \ell=n;\\ d-1, & 若\ \ell=n+1,\\ d, & 若\ \ell>n+1.\end{cases}$$

证明 因为 $d(K(d,n))=n$, 所以当 $n\leqslant \ell\leqslant d^n+d^{n-1}-1$ 时, $\zeta_\ell(K(d,n))$ 和 $\kappa_\ell(K(d,n))$ 都有确定的值. 设 x 和 y 是 $K(d,n)$ 的两顶点使得 $d(K(d,n);x,y)=n$. 由定理 8.1.4 知, $K(d,n)$ 中存在唯一的长为 n 的 (x,y) 路. 由定理 13.1.2 得

$$\kappa_n(K(d,n);x,y)=\zeta_n(K(d,n);x,y)=1.$$

另一方面, 显然有 $\zeta_n(B(d,n))\geqslant 1$. 所以

$$1=\zeta_n(K(d,n))\leqslant \kappa_n(K(d,n))\leqslant \kappa_n(K(d,n);x,y)=1.$$

由定理 8.1.5 知, 对 $K(d,n)$ 中任何两顶点 x 和 y, 存在 d 条内点不交且长不超过 $n+2$ 的 (x,y) 路. 所以, 当 $\ell\geqslant n+2$ 时, 有

$$d\leqslant \zeta_\ell(K(d,n))\leqslant \kappa_\ell(K(d,n))\leqslant \kappa(K(d,n))=d.$$

又由定理 8.1.5, 对 $K(d,n)$ 中任何两顶点 x 和 y, 存在 $d-1$ 条内点不交且长不超过 $n+1$ 的 (x,y) 路. 这意味着 $\zeta_{n+1}(K(d,n))\geqslant d-1$. 另一方面, 由 12.5 节知,

$$D_{d-1}(K(d,n))=n+1<n+2=D_d(K(d,n)).$$

由定理 13.2.1, 得 $\kappa_{n+1}(K(d,n)) = d-1$. 因此,

$$d-1 \leqslant \zeta_{n+1}(K(d,n)) \leqslant \kappa_{n+1}(K(d,n)) = d-1.$$

定理得证. ∎

最后, 介绍一个很有意义的函数. 对于给定的正整数 ℓ 和 w, 定义函数

$$h(\ell,w) = \min\{h:\ \kappa_\ell(G) \geqslant w \Longrightarrow \zeta_h(G) \geqslant w,\ \forall\ G\}.$$

Lovász 等 [229] 已经证明 $h(\ell,w)$ 对任何 ℓ 和 w 是存在的. Pyber 和 Tuza[264] 获得上界

$$h(\ell,w) < \binom{\ell+w-2}{\ell-2} + \binom{\ell+w-3}{\ell-2}.$$

特别地,

$$h(\ell,2) = \left\lfloor \frac{1}{4}(\ell-1)^2 \right\rfloor + 2,$$

并且获得上界

$$h(\ell,3) < \frac{4}{27}(\ell+1)^3.$$

Faudree 等 [109] 从另一个方面研究了点不交限长路的条数问题. 他们定义图 G 具有性质 $\mathscr{P}_{\ell,w}$ 意味着 G 中任何两顶点 x 和 y 之间存在 w 条内点不交且长不超过 ℓ 的 (x,y) 路, 并且获得 G 具有性质 $\mathscr{P}_{\ell,w}$ 的某些充分条件.

§13.3 边不交限长路问题

许多作者研究了边不交限长路问题, 如, Exoo[102, 103], Boyles, Exoo[45], Caccetta[49], Pyber, Tuza[264]. 设 x 和 y 是 G 中两顶点. G 的关于 ℓ 的 (x,y) 边 Menger 数, 记为 $\eta_\ell(G;x,y)$, 定义为 G 中边不交且长不超过 ℓ 的 (x,y) 路的最大条数. 同样地, G 的关于 ℓ 的 (x,y) *有界边连通度* (bounded edge-connectivity), 记为 $\lambda_\ell(G;x,y)$, 定义为最小边数, 从 G 中去掉这个数目的边后得到的子图不含长不超过 ℓ 的 (x,y) 路.

例如, 考虑图 13.4 中所示的无向图 G, $\eta_4(G;x,y)=1$, $\lambda_4(G;x,y)=2$.

因为 n 阶图 G 中任何路长不超过 $n-1$, 所以假定 $\ell \leqslant n-1$. 如果 $\ell = n-1$, 那么

$$\eta_{n-1}(G;x,y) = \eta(G;x,y),\ 且\ \lambda_{n-1}(G;x,y) = \lambda(G;x,y).$$

由 Menger 定理, 有等式

$$\eta_{n-1}(G;x,y) = \lambda_{n-1}(G;x,y).$$

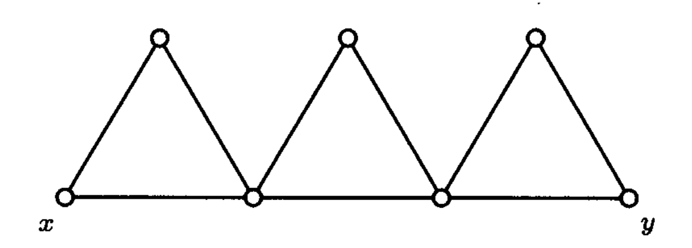


图 13.4 边不交限长路的例子

显然, 下面的不等式对任何 ℓ 总是成立的: $(d(G;x,y) \leqslant \ell \leqslant n-1)$

$$\eta_\ell(G;x,y) \leqslant \lambda_\ell(G;x,y). \tag{13.3.1}$$

与点情形一样, 参数 $\eta_\ell(G;x,y)$ 和 $\lambda_\ell(G;x,y)$ 是实时系统通信有效性的重要度量. 下面的结果属于 Exoo[102] 和 Pyber, Tuza[264], 它通过线图建立了 $\zeta_\ell(G;x,y)$, $\eta_\ell(G;x,y)$ 与 $\kappa_\ell(G;x,y)$, $\lambda_\ell(G;x,y)$ 之间的关系. 设 x 和 y 是 G 的两个不同顶点, 在 x 和 y 上分别添加环 e_x 和 e_y 后得到的新图记为 G'. 令 $L_G(x,y)$ 是 G' 的线图 $L(G')$.

定理 13.3.1 设 G 是无向图, x 和 y 是 G 中不同两顶点. 那么, G 中长为 ℓ 的 xy 路集与 $L_G(x,y)$ 中长为 $\ell+1$ 的 e_xe_y 无弦路集之间存在一一对应.

证明 设 $P = xe_1x_1e_2\cdots e_{\ell-1}x_{\ell-1}e_\ell y$ 是 G 中一条长为 ℓ 的 xy 路. 那么 $\ell+2$ 条边 $e_x, e_1, \cdots, e_\ell, e_y$ 是 $L_G(x,y)$ 的顶点, 并由此能导出 $L_G(x,y)$ 中一条长为 $\ell+1$ 的 e_xe_y 无弦路 $(e_x, e_1, \cdots, e_\ell, e_y)$.

反之, $L_G(x,y)$ 中任何一条长为 $\ell+1$ 的 e_xe_y 路的顶点集定义了 G 中一个边序列 $e_1, e_2, \cdots, e_\ell$, 这个序列导出 G 中一条 xy 链 W. 如果 W 不是路, 那么边集 $\{e_x, e_1, \cdots, e_\ell, e_y\}$ 中至少有 3 条与 G' 中同一个顶点关联. 在这种情形下, $L_G(x,y)$ 中的那条不是无弦路.

显然, 上面给出的对应是一一对应的. ∎

推论 1 设 G 是无向图, x 和 y 是 G 中不相邻两顶点, 则

$$\eta_{\ell-1}(G;x,y) = \zeta_\ell(L_G(x,y);e_x,e_y),$$

$$\lambda_{\ell-1}(G;x,y) = \kappa_\ell(L_G(x,y);e_x,e_y).$$

证明 图 G 中两条路是边不交的当且仅当 $L_G(x,y)$ 中对应的路是内点不交的. 由定理 13.3.1 知, 这个事实意味着

$$\eta_{\ell-1}(G;x,y) \leqslant \zeta_\ell(L_G(x,y);e_x,e_y).$$

另一方面, 如果 $P_1', P_2', \cdots, P_w'$ 是 $L_G(x,y)$ 中 w 条内点不交的 e_xe_y 路, 那么存在 w 条无弦 e_xe_y 路 $P_1, P_2, \cdots, P_w$ 使得 $P_i \subseteq P_i'$, 它们是内点不交的, $i = 1, 2, \cdots, w$. 这

意味着

$$\eta_{\ell-1}(G;x,y) \geqslant \zeta_\ell(L_G(x,y);e_x,e_y).$$

因为一个顶点集覆盖 $L_G(x,y)$ 中所有的长不超过 ℓ 的 e_xe_y 路当且仅当它也覆盖所有的无弦路, 所以

$$\lambda_{\ell-1}(G;x,y) = \kappa_\ell(L_G(x,y);e_x,e_y).$$

定理得证. ∎

推论 2 设 G 是无向图, $x,y \in V(G)$. 如果 $\ell = 2$ 或者 3, 那么

$$\eta_\ell(G;x,y) = \lambda_\ell(G;x,y).$$

证明 由定理 13.1.1, 定理 13.1.4 的推论和定理 13.3.1 得

$$\zeta_\ell(L_G(x,y);e_x,e_y) = \kappa_\ell(L_G(x,y);e_x,e_y).$$

因此,

$$\eta_{\ell-1}(G;x,y) = \lambda_{\ell-1}(G;x,y).$$

∎

Niepel 和 Šafăriková[250] 证明定理 13.1.3 对边的情形也是成立的. 类似于点的情形, 也可以定义函数

$$s'(\ell) = \sup\left\{\frac{\lambda_\ell(G;x,y)}{\eta_\ell(G;x,y)}\right\},$$

其中, 上确界是对所有无向图 G 和其中的不同两顶点 x 和 y 而取的. 定理 13.3.1 的推论 1 表明

$$s'(\ell) \leqslant s(\ell+1), \qquad \forall\ \ell \geqslant 2.$$

Niepel 和 Šafăriková[250], 和 Exoo[103] 获得

$$\left\lfloor\frac{\ell}{3}\right\rfloor + 1 \leqslant s'(\ell) \leqslant \left\lfloor\frac{\ell}{2}\right\rfloor.$$

也可以定义图 G 关于 ℓ 的边形式的 Menger 数和有界边连通度分别为

$$\left.\begin{aligned}\eta_\ell(G) &= \min\{\eta_\ell(G;x,y):\ x,y \in V(G)\},\\ \lambda_\ell(G) &= \min\{\lambda_\ell(G;x,y):\ x,y \in V(G)\},\end{aligned}\right. \qquad \ell \geqslant d(G).$$

由定理 13.3.1 和 Menger 定理得

$$\eta_\ell(G) = \lambda_\ell(G), \qquad \ell = 2,3,n-1.$$

与点情形一样, 当 $\ell = d(G)$ 时, 上面的等式不一定成立. 考察图 13.5 中所示的图 H, $d(H) = 4, \eta_4(H) = 1$, 而 $\lambda_4(H) = 2$, 其中 x 和 y 是达到这些值的两顶点.

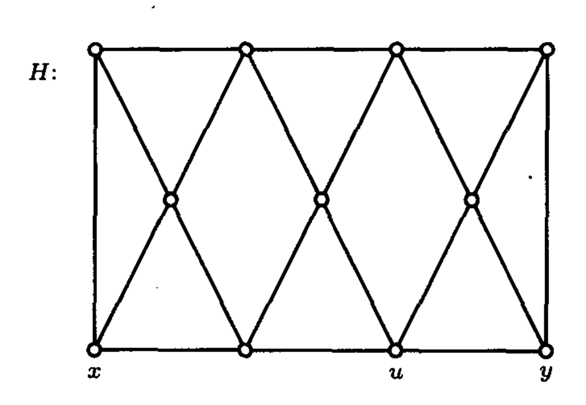


图 13.5 直径 4, $\eta_4(H)=1$ 且 $\lambda_4(H)=2$ 的图 H

有两个问题还没有解决. 一个问题是问: 对于边情形, 是否存在类似于定理 13.1.2 的结果? 另一个问题是问: 对于给定的图 G 和给定的 ℓ ($d(G)<\ell\leqslant n-2$), 是否一定有 $\kappa_\ell(G)\leqslant\lambda_\ell(G)$? Exoo[102] 证明了这个结论对 $\ell=d(G)=2$ 是成立的, 而且对任何 3 个正整数 ℓ,a,b, 存在一个图 G 使得

$$d(G)=\ell,\quad \kappa_\ell(G)=a,\quad \lambda_\ell(G)=b.$$

最后叙述一个类似于定理 13.2.1 的结果, 其证明留给读者.

定理 13.3.2 对任何连通图 G,

(a) 如果 G 是 $t+1$ 边连通的, 那么 $\lambda_\ell(G)=t\Leftrightarrow D'_t(G)\leqslant\ell<D'_{t+1}(G)$;

(b) G 是 t 边连通的, 那么 $D'_t(G)=\ell\Leftrightarrow\lambda_{\ell-1}(G)<t\leqslant\lambda_\ell(G)$. ∎

§13.4 点不交超长路问题

前面几节讨论了实时系统互连网络中限长路的 Menger 型问题. 这一节讨论与之对偶的问题: *超长路的*Menger *型问题*. 这个问题的研究对设计和评估互连网络的性能是有意义的. 例如, 在实时系统互连网络中, 对于给定的时限 ℓ, 网络中任何两结点之间存在足够数目的内点不交且长不超过 ℓ 的路可供使用, 但如果网络中某两个结点之间存在过多的长超过 ℓ 内点不交的路, 那么该网络有很差的使用率. 这样的考虑导致人们研究超长路问题, 这个问题首先是由 Montejano 和 Neumann-Lara[246] 提出并进行研究的.

设 G 是连通图, x 和 y 是 G 中两顶点, $\ell\geqslant 2$ 是正整数. 用 $\zeta'_\ell(G;x,y)$ 表示 G 内点不交且长至少为 ℓ 的 (x,y) 路的最大条数. 记

$$\zeta'_\ell(G)=\min\{\zeta'_\ell(G;x,y):\ \forall\, x,y\in V(G)\}.$$

显然,

$$\zeta'_2(G;x,y)=\zeta(G;x,y),\quad \zeta'_2(G)=\zeta(G).$$

设 $F \subset V(G)$, $x,y \in V(G-F)$. 记号 $< x,F,y >_G^{\ell}$ 表示 G 中每条长至少为 ℓ 的 (x,y) 路至少有一个内部点在 F 中.

Menger 定理断定: 如果 $< x,F,y >_G^2$ 意味着 $|F| \geqslant w$, 那么 G 中存在 w 条内点不交 (x,y) 路. Montejano 和 Neumann-Lara[246] 的下述结果推广了 Menger 定理.

定理 13.4.1 如果 $< x,F,y >_G^{\ell}$ 意味着 $|F| \geqslant w$, 那么

$$\zeta'_{\ell}(G;x,y) \geqslant \left\lceil \frac{w}{3\ell-5} \right\rceil.$$

证明 设 $t = \zeta'_{\ell}(G;x,y)$, 并选取 t 条这样的 (x,y) 路 $\{T_1,T_2,\cdots,T_t\}$ 使得 $\varepsilon(T_1)+\varepsilon(T_2)+\cdots+\varepsilon(T_t)$ 尽可能的小.

设 P_i 是 T_i 中前 $\ell-2$ 个内部顶点集, Q_i 是 T_i 中后 $\ell-2$ 个内部顶点集. 定义

$$P = \cup_{i=1}^t P_i, \quad Q = \cup_{i=1}^t Q_i.$$

令 $\{U_1,U_2,\cdots,U_t\}$ 是 G 中满足下列条件的路集:

(1) x 是 U_i 的起点, $i=1,2,\cdots,t$.

(2) U_i 是一个点 $x = z_i$, 或者 $V(U_i) \cap V(T_1 \cup \cdots \cup T_t) = \{x,z_i\}$, 其中 $z_i \in T_i \setminus (P_i \cup Q_i \cup \{x,y\})$ 是 U_i 的终点, $i=1,2,\cdots,t$.

(3) $V(U_i) \cap V(U_j) = \{x\}$, $i \neq j$.

设 T'_i 和 T''_i 分别是 T_i 的子路 $T_i(z_i,y)$ 和 $T_i(x,z_i)$. 如果 $\varepsilon(U_i) \neq 0$, 那么 $\varepsilon(U_i) \geqslant \ell-1$, 因为否则的话, 可以用 $U_i \cup T'_i$ 替代 T_i 得到比 $\varepsilon(T_1)+\varepsilon(T_2)+\cdots+\varepsilon(T_t)$ 更小的路集, 这与我们对路集 $\{T_1,T_2,\cdots,T_t\}$ 的选取矛盾.

对每个 $i=1,2,\cdots,t$, 定义一个集 R_i 如下: 若 $\varepsilon(U_i) \neq 0$, 则令 R_i 为 U_i 中前 $\ell-2$ 个内部顶点集; 若 $\varepsilon(U_i)=0$, 则令 $R_i = \emptyset$. 并令

$$R = \cup_{i=1}^t R_i.$$

假定 $\{U_1,U_2,\cdots,U_t\}$ 已被选定使得 $\varepsilon(T'_1)+\varepsilon(T'_2)+\cdots+\varepsilon(T'_t)$ 尽可能的小.

如果 W 是 G 中一条长至少为 ℓ 的 (x,y) 路, 且于 $P \cup Q \cup R$ 不交, 那么由 t 的最大性知, W 必与 $(\cup_{i=1}^t T_i) \setminus \{x,y\}$ 相交. 令 u 是 W 中与 $V(\cup_{i=1}^t (U_i \cup T_i)) \setminus \{x,y\}$ 相交的第一个交点. 由 $\varepsilon(T'_1)+\varepsilon(T'_2)+\cdots+\varepsilon(T'_t)$ 的最小性知, u 必属于 $V(\cup_{i=1}^t (U_i \cup T''_i)) \setminus (P \cup R)$.

设 Ω 是所有 $X = \{x_1,x_2,\cdots,x_t\}$ 的集使得 $x_i \in T'_i \setminus \{x,y\}$, $i=1,2,\cdots,t$.

要证明 $t \geqslant \left\lceil \frac{w}{3\ell-5} \right\rceil$. (反证) 假定 $t < \left\lceil \frac{w}{3\ell-5} \right\rceil$. 因为对每个 $X \in \Omega$, 有

$$|P \cup Q \cup R \cup X| \leqslant t(\ell-2)+t(\ell-2)+t(\ell-2)+t = t(3\ell-5) < w,$$

所以, 存在一条长至少为 ℓ 的 (x,y) 路 W_X, 它与 $P \cup Q \cup R \cup X$ 不交. 因此 W_X 必与 $\cup_{i=1}^t (U_i \cup T_i) \setminus \{x,y\}$ 相交, 第一个交点为 $u_X \in V(\cup_{i=1}^t (U_i \cup T''_i)) \setminus (P \cup R)$. 令 $W'_X = W_X(u_X,y)$.

考虑 G 的子图:

$$H = \bigcup_{i=1}^{t}(U_i \cup T_i) \bigcup_{X\in\Omega} W'_X.$$

那么必存在某个 i 使得 H 中每条 (x,y) 路含 P_i 或者 R_i. 这说明 H 中每条 (x,y) 路的长至少为 ℓ.

为了在 $\cup_{i=1}^{t}(U_i \cup T_i)$ 中分离 x 和 y, 至少需要 t 个顶点. 而且, 每个 t 个顶点的点割 X 必属于 Ω. 因为 $W'_X \subset H$, 所以 x 在 H 中不能分离 x 和 y. 这说明 $< x, F, y >_H^2$ 意味着 $|F| \geqslant t+1$. 因此, 应用 Menger 定理, H 中至少存在 $t+1$ 条内点不交的 (x,y) 路, 每条路长至少为 ℓ. 这矛盾于 t 的最大性, 定理得证. ∎

令

$$\zeta'_\ell(w) = \min\{\zeta'_\ell(G;x,y): \ \forall\ G,\ x,y\in V(G), < x,F,y >_G^\ell \Rightarrow |F| \geqslant w\}.$$

显然, Menger 定理表明 $\zeta'_2(w) = w$. 问题是: 对任何给定的 $\ell \geqslant 3$ 和 $w \geqslant 1$ 求 $\zeta'_\ell(w)$ 的值. 但这个参数值的确定是很难的. Montejano 和 Neumann-Lara[246] 获得其上下界:

$$\left\lceil \frac{w}{3\ell-5} \right\rceil \leqslant \zeta'_\ell(w) \leqslant \left\lceil \frac{w}{\ell-1} \right\rceil.$$

$\zeta'_\ell(w)$ 的下界可以直接由定理 13.3.2 得到, 而上界的证明是通过构造一个满足条件的无向图, 具体构造留给读者.

当 $\ell = 3$ 时, Hager[133] 改进上面的界为:

$$\left\lceil \frac{w+2}{3} \right\rceil \leqslant \zeta'_3(w) \leqslant \left\lceil \frac{w}{2} \right\rceil.$$

事实上, $\zeta'_3(w)$ 已由 Mader[238] 确定为:

$$\zeta'_3(w) = \left\lceil \frac{w}{2} \right\rceil.$$

这个结果表明: 对于图 G 和其中的两个顶点 x 和 y, 如果 G 中存在至多 w 条内点不交且长至少为 3 的 (x,y) 路, 那么 G 必含顶点子集 $F \subset V(G)\setminus\{x,y\}$, $|F| \leqslant 2w$ 使得 $G-F$ 中不含长至少为 3 的 (x,y) 路, 即, $d(G-F;x,y) < 3$.

§13.5 网络的 Rabin 数

这一节讨论网络传输延迟和容错性的另一种类型的度量参数: Rabin 数.

Rabin[266] 利用信息分散方法 (information dispersal algorithm) 给出超立方体网络 Q_n 的容错传输方案. 设 x 和 y 是 Q_n 中两顶点, 为了把数据包 P 从 x 传输到 y,

Rabin 首先分拆 P 为 n 个小数据组. 然后, 随机地选取 n 个不同的顶点 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ (称为随机中间点), 将 n 个数据组分别沿着 n 点不交长至多为 $n+1$ 的路传到随机中间点 $y_1, y_2, \cdots, y_n$. 第 2 步, 对称地将 n 个数据组分别从 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 沿着 n 点不交长至多为 $n+1$ 的路传到它们的目的地 y. 借助随机中间点的思想是由 Valiant[300] 首先提出来的, 它能减少数据拥塞, 从而加快数据传输效率. 点不交路的利用容许因故障而引起的数据组的丢失.

Valiant 的随机中间点思想能被用于许多类型的通信模式, 特别是一对多 (one-to-many) 的通信模式. 例如, 重广播就是属于这类一对多的通信模式. 给定一个信息源顶点和 w 个目的地顶点, 重广播问题要求数据传输从信息源到 w 个目的地顶点. 毋庸置疑, 被用来传递数据的路长要尽可能的小.

出于上面的考虑, Hsu 和 Lyuu[170] 研究了参数: Rabin 数. 之所以叫这个名称, 是由于 Rabin 首先考虑上述问题并确定了超立方体的 Rabin 数.

设 G 是 $w\ (\geqslant 1)$ 连通图, G 的 w-Rabin 数, 记为 $r_w(G)$, 定义为最小数 r 使得对 G 的任何 $w+1$ 个顶点 $x, y_1, \cdots, y_w$, G 中存在 w 条内点不交且长不超过 r 的 (x, y_i) 路, $i = 1, 2, \cdots, w$. 换句话说, G 中存在扇 $\mathscr{F}_w(x, Y)$ 使其中每条路长至多为 r, 其中 $Y = \{y_1, \cdots, y_w\}$.

显然, 如果 $1 \leqslant w \leqslant \kappa(G)$, 那么由定理 1.5.4 知, $r_w(G)$ 有确定的值, 且

$$d(G) = r_1(G) \leqslant r_2(G) \leqslant \cdots \leqslant r_{w-1}(G) \leqslant r_w(G).$$

例如, 当 $n \geqslant 3$ 时, $r_2(C_n) = n-2$; 当 $1 \leqslant w \leqslant n-1$ 且 $n \geqslant 2$ 时, $r_w(K_n) = 1$, 其中 C_n 和 K_n 分别是无向圈和完全图.

下面的结果属于 Liaw 等 [222], 它揭示了容错直径和 Rabin 数之间的关系.

定理 13.5.1 设 G 是 $w\ (\geqslant 1)$ 连通图, 则

$$D_w(G) \leqslant r_w(G). \tag{13.5.1}$$

证明 因为 G 是 $w\ (\geqslant 1)$ 连通的, 所以 $D_w(G)$ 和 $r_w(G)$ 都有确定的值. 选取 $Y' = \{y_1, y_2, \cdots, y_{w-1}\} \subset V(G)$ 和 $x, y_w \in V(G) \setminus Y'$ 使得

$$D_w(G) = D_w(G; x, y_w) = d(G - Y'; x, y_w).$$

令 $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_{w-1}, y_w\}$. 由 $r_w(G)$ 的定义知, G 中存在 (x, Y) 扇 $\mathscr{F}_w(x, Y) = \{P_1, P_2, \cdots, P_w\}$ 使得 $\varepsilon(P_i) \leqslant r_w(G)$, $i = 1, 2, \cdots, w$. 不妨设 P_w 是 $\mathscr{F}_w(x, Y)$ 中最长的路. 于是,

$$D_w(G) = d(G - Y'; x, y_w) \leqslant \varepsilon(P_w) \leqslant r_w(G).$$

定理得证. ∎

$D_2(C_n) = n-2 = r_2(C_n)$ 说明式 (13.5.1) 中等式是可能成立的. 考虑图 13.5 中所示的图 H, $D_2(H) = 4$, 而 $r_2(H) = 5$, x 和 $\{u, y\}$ 是达到这些值的顶点. 这说明式 (13.5.1) 中严格不等式也可能成立.

Hsu 和 Lyuu[170] 证明了: 对任意给定的 w 连通图 G 和正整数 ℓ, 确定 $r_w(G) \leqslant \ell$ 的问题是NP 完备的. 因此, 人们关心的是确定一些特殊的 w 连通图 G 的 $r_w(G)$ 的值. 下面介绍某些著名网络的Rabin 数. 由于篇幅所限, 略去所有的证明.

1. 超立方体 Q_n ($n \geqslant 2$)

从定理6.1.2 知 $\kappa(Q_n) = n = d(Q_n)$, 所以当 $w \leqslant n$ 时, $r_w(Q_n)$ 有确定的值. Rabin[266] 证明了 $r_n(Q_n) = n+1$, Liaw 和 Chang[219] 得到

$$r_w(Q_n) = D_w(Q_n) = \begin{cases} n, & \text{若 } 1 \leqslant w \leqslant n-1; \\ n+1, & \text{若 } w = n. \end{cases}$$

2. 有向 de Brujin 网络 $B(d,n)$ ($d \geqslant 2, n \geqslant 1$)

从定理7.1.2 知 $\kappa(B(d,n)) = d-1$, 所以当 $w \leqslant d-1$ 时, $r_w(B(d,n))$ 有确定的值. Du 等 [83] 确定了

$$r_w(B(d,n)) = D_w(B(d,n)) = n+1, \quad 1 \leqslant w \leqslant d-1.$$

3. 有向 Kautz 网络 $K(d,n)$ ($d \geqslant 2, n \geqslant 1$)

从定理8.1.2 知 $\kappa(K(d,n)) = d$, 所以当 $w \leqslant d$ 时, $r_k(K(d,n))$ 有确定的值. Du 等 [83] 确定了

$$r_d(K(d,n)) = D_d(K(d,n)) = n+2.$$

4. 循环有向图 $G(d^n; 1, d, \cdots, d^{n-1})$

循环有向图 $G(d^n; 1, d, \cdots, d^{n-1})$ ($d \geqslant 2$) 有连通度 n (Hamidoune[137]). Liaw 和 Chang[219] 得到

$$\begin{aligned} r_w(G(d^n;S)) &= D_w(G(d^n;S)) \\ &= \begin{cases} n(d-1), & \text{若 } 1 \leqslant w \leqslant n-1; \\ n(d-1)+1, & \text{若 } w = n. \end{cases} \end{aligned}$$

5. 有向超环面网 $\overrightarrow{C}(d_1, \cdots, d_n)$

当 $D_1 = d_2 = \cdots = d_n = d \geqslant 3$ 时, 用 $\overrightarrow{C}_n(d)$ 表示 $\overrightarrow{C}(d, d, \cdots, d)$. Hsu 和 Lyuu[170] 确定了 $r_n(\overrightarrow{C}_n(d)) = n(d-1)+1$. Liaw 和 Cheng[219] 获得

$$r_w(\overrightarrow{C}_n(d)) = D_w(\overrightarrow{C}_n(d)) = \begin{cases} n(d-1), & \text{若 } 1 \leqslant w \leqslant n-1; \\ n(d-1)+1, & \text{若 } w = n. \end{cases}$$

6. 广义超立方体 $Q(d_1, \cdots, d_n)$

$Q(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 有连通度 $m = d_1 + d_2 + \cdots + d_n - n$. Duh, Chen[84] 获得

$$r_n(Q_n(d)) = n + 1.$$

Liaw 和 Chang[219] 确定更一般的结果:

$$\begin{aligned} r_w(Q(d_1, \cdots, d_n)) &= D_w(Q(d_1, \cdots, d_n)) \\ &= \begin{cases} n, & \text{若 } 1 \leqslant w \leqslant n-1; \\ n, & \text{若 } w = n \text{ 且至少存在 2 个 } d_i \geqslant 3; \\ n+1, & \text{若 } w = n \text{ 且至少存在 1 个 } d_i \geqslant 3; \\ n+1, & \text{若 } n+1 \leqslant w \leqslant m. \end{cases} \end{aligned}$$

7. 蝶形网 $BF(n)$

n 维蝶形网 $BF(n)$ 的连通度为 2. Liaw 和 Chang[221] 证明

$$r_2(BF(n)) = D_2(BF(n)) = 2n + 2, \quad \text{若 } n \geqslant 2.$$

8. 折叠超立方体 FQ_n

由定理 6.5.3 知 FQ_n 有连通度 $n + 1$. Liaw 和 Chang[219] 获得了下界:

$$r_w(FQ_n) \geqslant D_w(FQ_n) = \begin{cases} \lceil \frac{1}{2}n \rceil, & \text{若 } 1 \leqslant w \leqslant \lceil \frac{1}{2}n \rceil - 1; \\ \lceil \frac{1}{2}n \rceil + 1, & \text{若 } \lceil \frac{1}{2}n \rceil \leqslant w \leqslant n+1. \end{cases}$$

Lai 等 [199] 证明了: $r_{n+1}(FQ_n) \leqslant \lceil \frac{1}{2}n \rceil + 1$ $(n \geqslant 4)$. $r_w(FQ_n)$ 的其他精确值还没有确定.

习 题

13.1 证明定理 13.2.1 (b) 和定理 13.3.2.

13.2 对任意给定的 3 个正整数 ℓ, a, b, 构造一个无向图 G 使得 $d(G) = \ell$, $\kappa_\ell(G) = a$, $\lambda_\ell(G) = b$.

13.3 构造无向图 G 使得 $\zeta'_\ell(w) = \lceil \frac{w}{\ell - 1} \rceil$.

第 14 章 互连网络的宽直径

上一章讨论了这样的问题: 对于给定的连通图 G 和正整数 ℓ, 确定最大数 w (它等于 $\zeta_\ell(G)$) 使得 G 中任何两顶点之间存在 w 条内点不交且长不超过 ℓ 的路. 这一章讨论与之对偶的问题: 对于给定正整数 w 和 w 连通图 G, 确定最小数 ℓ 使得 G 中任何两顶点之间存在 w 条内点不交且长不超过 ℓ 的路. 这样的最小数 ℓ 将被定义为 G 的宽直径.

对于实时处理系统的互连网络, 宽直径是度量网络性能的重要参数. 这一章将介绍宽直径的基本概念和一些基本结果.

§14.1 网络的宽直径

设 $x,y \in V(G)$, $\mathscr{P}_w(G;x,y)$ 表示 G 中 w 条内点不交的 (x,y) 路族 (collection of paths), w 称为 $\mathscr{P}_w(G;x,y)$ 的宽度 (width), $\mathscr{P}_w(G;x,y)$ 中路的最大长度称为 $\mathscr{P}_w(G;x,y)$ 的长, 记为 $\ell(\mathscr{P}_w(G;x,y))$.

显然, 如果 $1 \leqslant w \leqslant \zeta(G;x,y)$, 那么 $\mathscr{P}_w(G;x,y) \neq \emptyset$. $\mathscr{P}_w(G;x,y)$ 称为最小的 (minimum), 如果它的路长之和对 G 中所有宽度为 w 的 $\mathscr{P}_w(G;x,y)$ 来说是最小的. 为叙述方便, 当写 $\mathscr{P}_w(G;x,y) = \{P_1,P_2,\cdots,P_w\}$ 时, 总假定 $\varepsilon(P_1) \leqslant \varepsilon(P_2) \leqslant \cdots \leqslant \varepsilon(P_w)$. 因此, $\varepsilon(P_w) = \ell(\mathscr{P}_w(G;x,y))$. 令

$$
\begin{aligned}
&B_i = V(P_i) \setminus \{x,y\},\\
&B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{w-1} \cup \{x,y\},\\
&A = V(G) \setminus (B \cup B_w),\\
&b_i = |B_i|,\ i = 1,2,\cdots,w.
\end{aligned}
\tag{14.1.1}
$$

设 G 的阶是 n, 则

$$
n = 2 + |A| + \sum_{i=1}^{w} b_i. \tag{14.1.2}
$$

定理 14.1.1 设 G 是无向图, $x,y \in V(G)$, $\mathscr{P}_w(G;x,y) = \{P_1,P_2,\cdots,P_w\}$ 是 G 中最小 (x,y) 路族. 则

(a) P_i $(i = 1,2,\cdots,w)$ 是 G 中无弦路;

(b) P_i $(i = 1,2,\cdots,w)$ 中距离大于 2 的两个顶点在 A 中没有公共的邻点;

(c) 对 P_j 中任何独立集 S 和 $b_i \neq 0\,(1 \leqslant i \neq j \leqslant w)$, S 和 B_i 之间在 G 中的边数至多为 $b_i + |S| - 1$, 即 $|E_G(S,B_i)| \leqslant b_i + |S| - 1$.

证明 由 $\mathscr{P}_w(G;x,y)$ 的最小性, 结论 (a) 和 (b) 显然成立. 为证明结论 (c), 对 $i \neq j$, 令

$$P_i = (x = u_0, u_1, u_2, \cdots, u_{b_i}, u_{b_{i+1}} = y),$$
$$P_j = (x = v_0, v_1, v_2, \cdots, v_{b_j}, v_{b_{j+1}} = y).$$

设 H 是 G 中由边集 $E_G(S, B_i)$ 导出的子图. 下面证明 H 不含圈.

(反证) 假定 H 含圈 C. 因为 H 是划分为 $\{S, B_i\}$ 的 2 部分图, 所以 C 的长是至少为 4 的偶数. 于是, B_i 中存在两个顶点 u_a, u_b $(a < b)$, S 中存在两个顶点 v_h, v_t $(h < t)$ 使得 $u_a v_t, u_b v_h \in E(G)$. 因为 $b - a \geqslant 1$ 且 $t - h \geqslant 2$, 将 $\mathscr{P}_w(G;x,y)$ 中两条路 P_i 和 P_j 换成下面的两条路

$$P_i' = (x, u_1, u_2, \cdots, u_{a-1}, u_a, v_t, v_{t+1}, \cdots, v_{b_j}, y),$$
$$P_j' = (x, v_1, v_2, \cdots, v_{h-1}, v_h, u_b, u_{b+1}, \cdots, u_{b_i}, y),$$

得到另一个 (x,y) 路族 $\mathscr{P}'_w(G;x,y)$, 它的路长之和小于 $\mathscr{P}_w(G;x,y)$ 的路长之和. 这与 $\mathscr{P}_w(G;x,y)$ 的最小性矛盾. 因此, H 不含圈.

因为 H 有阶 $b_i + |S|$ 且不含圈, 所以

$$|E_G(B_i, S)| = |E(H)| \leqslant |V(H)| - 1 = b_i + |S| - 1.$$

定理得证. ∎

设 G 是 w 连通图, $w \geqslant 1$. 由 Menger 定理知, 对 G 中任何不同两顶点 x 和 y, $\mathscr{P}_w(G;x,y) \neq \emptyset$. G 中从 x 到 y *宽度为 w 的距离* (distance with width w), 或者简称 *w 距离* (w-distance), 记为 $d_w(G;x,y)$, 定义为所有 $\mathscr{P}_w(G;x,y)$ 的最小长度, 即,

$$d_w(G;x,y) = \min\{\ell(\mathscr{P}_w(G;x,y)) : \ \forall\ \mathscr{P}_w(G;x,y)\}.$$

换句话说, w 距离 $d_w(G;x,y)$ 是一个最小正整数 ℓ 使得 G 中存在 w 条内点不交且长不超过 ℓ 的 (x,y) 路.

G 的*宽度为 w 的直径* (diameter with width w), 简称 *w 直径* (w-diameter), 记为 $d_w(G)$, 定义为

$$d_w(G) = \max\{d_w(G;x,y) : \ \forall\ x, y \in V(G)\}.$$

换句话说, w 直径 $d_w(G)$ 是最大正整数 ℓ 使得 G 中任何不同两顶点 x 和 y, 存在 w 条内点不交且长不超过 ℓ 的 (x,y) 路.

显然, $d_1(G)$ 就是 G 的直径 $d(G)$, 而且有

$$d(G) = d_1(G) \leqslant d_2(G) \leqslant \cdots \leqslant d_{w-1}(G) \leqslant d_w(G). \tag{14.1.3}$$

例 14.1.1 对于$n \geqslant 3$, 无向圈C_n, 轮W_{n+1}和完全图K_n的宽直径为

$$d_1(C_n) = \left\lfloor \frac{1}{2}n \right\rfloor, \ d_2(C_n) = n-1;$$
$$d_1(W_{n+1}) = 2, \ d_2(W_{n+1}) = \left\lfloor \frac{1}{2}n \right\rfloor, \ d_3(W_{n+1}) = n-1;$$
$$d_1(K_n) = 1, \ d_w(K_n) = 2 \ (2 \leqslant w \leqslant n-1).$$

例 14.1.2 定义一类图, 称为广义轮 (generalized wheel), 记为$W(m,p)$, 它是$(m+p)$阶无向图. 定义为$W(m,p) = K_m \vee C_p$, 即完全图K_m和无向圈C_p $(p \geqslant 3)$的联. $W(0,p)$就是无向圈C_p, 而$W(1,p)$就是通常的轮W_{1+p}. 容易看到, 当$w \geqslant 2$且$p \geqslant 3$时, $W(m,p)$的连通度和宽直径分别为:

$$\kappa(W(m,p)) = m+2,$$
$$d_w(W(m,p)) = \begin{cases} 2, & 1 \leqslant w \leqslant m; \\ \lfloor \frac{p}{2} \rfloor, & w = m+1; \\ p-1, & w = m+2. \end{cases}$$

例 14.1.3 式 (14.1.3) 中等号是可以成立的. 例如, de Brujin 无向图$UB(2,n)$, $n \geqslant 2$. Li, Sotteau, Xu[207] 证明了: $UB(2,n)$中任何两顶点之间存在两条内点不交且长度不超过n的路. 这说明: $d_2(UB(2,n)) = n = d(UB(2,n))$.

通过以前的分析知道, 理想的互连网络G应该有尽可能大的连通度$\kappa(G)$和尽可能小的直径$d(G)$. 宽直径$d_w(G)$是将连通度$\kappa(G)$和直径$d(G)$结合起来考虑, 其中$1 \leqslant w \leqslant \kappa(G)$. 因此, 对于度量并行处理系统的互连网络的容错性和有效性, $d_w(G)$是比$\kappa(G)$和$d(G)$更合适的参数. 因此, 对于给定的图G和正整数w, 确定$d_w(G)$的值有非常重要的意义. 然而, Hsu[167] 已经证明这个问题是NP 完备的.

宽直径概念是由Hsu[167], Flandrin 和 Li[118] 独立提出来的. Hsu 用的是 "宽直径" 一词, 正如前面叙述的, 建立在路族 (Hsu 用的是 "container" 一词) 概念基础上; Flandrin 和 Li 使用的是 "w 直径" 一词, 是受Faudree 等 [109] 关于图具有性质$\mathscr{P}_{\ell,w}$的启发.

定理 14.1.2 设G是n阶w连通图, $w \geqslant 2$. 则$2 \leqslant d_w(G) \leqslant n-w+1$. 而且, 上界和下界都能达到.

证明 因为$w \geqslant 2$, 所以显然有$d_w(G) \geqslant 2$. 设x和y是G中不同两顶点, 取$\mathscr{P}_w(G;x,y) = \{P_1, P_2, \cdots, P_w\}$使得$d_w(G;x,y) = \varepsilon(P_w) = d_w(G)$. 因为$w \geqslant 2$, $|A| \geqslant 0$, $b_1 \geqslant 0$, $b_i \geqslant 1$ $(i = 2, 3, \cdots, w)$, 由式 (14.1.2), 有

$$\begin{aligned} b_w &= n-2-(b_1+b_2+\cdots+b_{w-1})-|A| \\ &\leqslant n-2-(w-2) = n-w. \end{aligned}$$

因此得

$$2 \leqslant d_w(G) = d_w(G;x,y) = \varepsilon(P_w) = b_w+1 \leqslant n-w+1.$$

一般说来, 这里给出$d_w(G)$ 的上界和下界是不能改进的. 即存在两个w 连通图$G = W(w-2, n-w+2)$ 和 $G' = K_{w+1}$ 使得$d_w(G) = n-w+1$ 和$d_w(G') = 2$. 定理得证. ∎

定理 14.1.3 设G 是n 阶图. 如果对任何$w \geqslant 2$, G 满足以下条件:

$$d_G(x) + d_G(y) \geqslant n + w - 1, \ \forall\, x, y \in V(G) \tag{14.1.4}$$

那么$d_w(G) = 2$, 而且条件(14.1.4) 是紧的.

证明 不难验证, 如果G 满足条件(14.1.4), 那么G 是w 连通的(见习题1.14). 因为 $w \geqslant 2$, 所以$d_w(G) \geqslant 2$. 下面证明$d_w(G) \leqslant 2$.

(反证) 假定$d_w(G) \geqslant 3$, 则G 中存在两顶点x, y 使得 $d_w(G; x, y) = d_w(G) \geqslant 3$. 选取最小的$\mathscr{P}_w(G; x, y) = \{P_1, P_2, \cdots, P_w\}$. 则$\varepsilon(P_w) \geqslant d_w(G; x, y) = d_w(G) \geqslant 3$. 令$H = P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_{w-1}$. 则

$$d_H(x) + d_H(y) = 2(w-1). \tag{14.1.5}$$

由$\varepsilon(P_w) \geqslant 3$ 和$\mathscr{P}_w(G; x, y)$ 的最小性知, x 和y 在$T = A \cup B_w$ 中没有公共的邻点. 由于$w \geqslant 2$, 所以$b_1 \geqslant 0$ 且$b_i \geqslant 1$, $i = 2, 3, \cdots, w$. 因此, 由定理14.1.1 知x 和y 在T 中的邻点数为

$$\begin{aligned} d_T(x) + d_T(y) &\leqslant |A| + 2 \leqslant |A| + |B_w| \\ &= n - 2 - (b_1 + b_2 + \cdots + b_{w-1}) \\ &\leqslant n - w, \end{aligned}$$

即,

$$d_T(x) + d_T(y) \leqslant n - w. \tag{14.1.6}$$

由式(14.1.5) 和(14.1.6) 得

$$d_G(x) + d_G(y) \leqslant 2(w-1) + (n-w) = n + w - 2.$$

这与条件(14.1.4) 矛盾. 因此, $d_w(G) \leqslant 2$.

为了证明条件(14.1.4) 是紧的, 考虑$G = W(w-2, 4)$. $d_w(G) = 3$ 且$n = w+2$. 然而, G 中任何不相邻两顶点度之和为$2w = n + w - 2$. 它不满足条件(14.1.4). ∎

§14.2 正则图的宽直径

这一节讨论正则图的宽直径. 首先介绍一个基本结果, 它的无向图情形是由Hsu 和Luczak[169] 首先得到.

定理 14.2.1 设G 是w 连通w 正则图. 如果$w \geqslant 2$, 那么$d_w(G) \geqslant d(G) + 1$.

证明 设x 和y 是G 中两顶点使得$d(G;x,y) = d(G)$. 因为G 是w 正则的且$w \geqslant 2$, 所以存在$z \in N_G^+(y)$, $z \neq x$. 考虑$\mathscr{P}_w(G;x,z) = \{P_1, P_2, \cdots, P_w\}$ 使得$d_w(G;x,z) = \varepsilon(P_w)$. 因此, 必存在$P_i \in \mathscr{P}_w(G;x,z)$ 包含顶点y. 这意味着

$$d_w(G) \geqslant d_w(G;x,z) = \varepsilon(P_w) \geqslant \varepsilon(P_i) \geqslant d(G;x,y) + 1 = d(G) + 1.$$

定理得证. ∎

w 连通w 正则图G 称为w 优的(w-optimal), 如果$d_w(G) = d(G) + 1$. 网络设计者的兴趣是构造w 优图, 由这样的图作为并行处理系统的网络拓扑结构是非常理想的.

唯一的2 连通2 正则无向图是圈C_n, 且$d_2(C_n) = n - 1$. 对一般的w 连通w 正则图G, 确定$d_w(G)$ 的值也不容易, 即使是无向图也是这样. 对于$w \geqslant 3$, Hsu 和Luczak[169] 得到下面关于$d_w(G)$ 的上界.

定理 14.2.2 对任何n 阶w 正则w 连通无向图G, 如果$w \geqslant 3$, 那么

$$d_w(G) \leqslant \left\lfloor \frac{1}{2} n \right\rfloor.$$

证明 设$x, y \in V(G)$ 使得$d_w(G;x,y) = d_w(G)$. 选取最小的$\mathscr{P}_w(G;\, x,y) = \{P_1, P_2, \cdots, P_w\}$. 则$\varepsilon(P_w) \geqslant d_w(G;x,y) = d_w(G)$. 令

$$\begin{aligned} &E_1 = E(P_1) \cup E(P_2) \cdots \cup E(P_{w-1}),\\ &E_2 = \{e \in E(G):\ e \text{ 与 } P_w \text{ 中某顶点关联}\}\\ &E_3 = E(G) \setminus (E_1 \cup E_2). \end{aligned}$$

则

$$|E_1| = \sum_{i=1}^{w-1} (b_i + 1), \quad |E_2| = b_w(w-1) + 1.$$

如果能证明$|E_3| \geqslant |A|$, 那么由式(14.1.2), 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} n w = |E(G)| &= |E_1| + |E_2| + |E_3| \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{w-1} (b_i + 1) + b_w(w-1) + 1 + |A| \\ &= n + (b_w + 1)(w - 2). \end{aligned}$$

因此,

$$d_w(G) \leqslant \varepsilon(P_w) = b_w + 1 \leqslant \left\lfloor \frac{1}{2} n \right\rfloor.$$

现在证明$|E_3| \geqslant |A|$. 由$\mathscr{P}_w(G;x,y)$ 的最小性知, 对任何$z \in A$, 有$|N_G(z) \cap B_w| \leqslant 3$. 因此,

$$|E_3| \geqslant \left\lceil \frac{1}{2} |A|(w-3) \right\rceil.$$

于是, 当 $w \geqslant 5$ 时, 有 $|E_3| \geqslant |A|$. 所以, 仅需要证明当 $3 \leqslant w \leqslant 4$ 时, 有 $|E_3| \geqslant |A|$.

令 $H = G[A]$. 如果 H 的每个连通分支都含圈, 那么, 显然有 $|E_3| \geqslant |A|$. 下面, 假定 H 中某连通分支 T 是树. 因为 $\varepsilon(T) = v(T) - 1$, 所以仅需要证明 T 和 B 之间在 G 中的边集 $E_G(T, B) \neq \emptyset$, 其中 $B = V(P_1 \cup \cdots \cup P_{w-1})$.

(反证) 假定 $E_G(T, B) = \emptyset$. 设 $v(T) = t \geqslant 1$, 则 $N_G(T) \subseteq V(P_w)$. 令 u 和 v 分别是 P_w 中与 T 中某顶点 u' 和 v' 相邻的第一个和最后一个顶点. 因为 G 是 w 正则的, 所以易知 $u \neq x$ 且 $v \neq y$. 选取 $u', v' \in N_G(\{u, v\}) \cap V(T)$ 使得 $d(T; u', v')$ 尽可能的小. 令 $d(T; u', v') = \ell$. 由 $\mathscr{P}_w(G; x, y)$ 的最小性, 易知子路 $P_w(u, v)$ 的长不超过 $\ell + 2$. 令 $S = V(P_w(u, v))$. 考虑 T 中顶点度, 有

$$|E_G(T, S)| = wt - 2(t - 1). \tag{14.2.1}$$

令 $S' = S \setminus \{u, v\}$. 因为 $E_G(T, B) = \emptyset$ 且 G 是 w 连通的, 所以 S' 中不在 $T \cup P_w$ 中的邻点至少有 $w - 2$ 个. 令

$$e_u = |N_G(u) \cap T|, \quad e_v = |N_G(v) \cap T|.$$

考虑 S 中顶点度, 有

$$\begin{aligned} |E_G(S, T)| &\leqslant (w - 2)(\ell + 1) - (w - 2) + e_u + e_v \\ &= (w - 2)\ell + e_u + e_v. \end{aligned} \tag{14.2.2}$$

由式 (14.2.1) 和 (§14.2), 得

$$(w - 2)(t - \ell) \leqslant e_u + e_v - 2.$$

因为 $t \geqslant \ell + 1$ 且 $e_u + e_v \leqslant 2(w - 2)$, 所以

$$w - 2 \leqslant (w - 2)(t - \ell) \leqslant e_u + e_v - 2 \leqslant 2(w - 2) - 2.$$

这意味着 $w = 4 = e_u + e_v$ 且 $t = \ell + 1$. 因此, T 是一条 $u'v'$ 路, $N_G(u) \cap T = \{u'\}$ 且 $N_G(v) \cap T = \{v'\}$. 这意味着 $e_u + e_v = 2$, 矛盾. ∎

一般说来, 定理 14.2.2 中 $d_w(G)$ 的上界是不能改进的, 因为对于无穷多个 w 和 n, Hsu 和 Luczak[169] 已构造了一类 n 阶 w 连通 w 正则图, 它的 w 直径等于 $\lfloor \frac{1}{2} n \rfloor$.

§14.3 笛卡儿乘积的宽直径

这一节通过研究笛卡儿乘积的宽直径来导出几类 w 优图来, 主要内容来自 Xu[328].

定理 14.3.1 设 G_i 是 w_i 连通有向图, 且 $r_{w_i}(G_i) \leqslant d(G_i)$, $i = 1, 2, \cdots, m$. 如果 $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_m$, 且 $w = w_1 + \cdots + w_m$, 那么

$$d_w(G) \leqslant \max\left\{\sum_{i=1}^{m} d(G_j) + 1;\ \sum_{j \neq i}^{m} d(G_j) + d_{w_i}(G_i);\ 1 \leqslant i \leqslant m\right\}.$$

证明 由定理 4.2.3 知, G 是 w 连通的, 因而 $d_w(G)$ 是确定的. 对 $m \geqslant 2$ 用归纳法来证明定理. 令

$$d = \max\{d(G_1) + d(G_2) + 1;\ d_{w_1}(G_1) + d(G_2);\ d(G_1) + d_{w_2}(G_2)\}. \tag{14.3.1}$$

要证明

$$d_{w_1+w_2}(G_1 \times G_2) \leqslant d. \tag{14.3.2}$$

为此, 设 $x = x_1x_2$ 和 $y = y_1y_2$ 是 $G_1 \times G_2$ 中任意两顶点, 其中 $x_1, y_1 \in V(G_1)$ 且 $x_2, y_2 \in V(G_2)$. 欲证式 (14.3.2), 只需证明由式 (4.2.1), (4.2.2) 和 (4.2.3) 定义的路 $\{R_1, \cdots, R_{w_1+w_2}\}$ 的长度不超过 d. 注意到假设:

$$\varepsilon(T_i) \leqslant r_{w_1}(G_1) \leqslant d(G_1), \quad i = 1, 2, \cdots, w_1,$$
$$\varepsilon(U_j) \leqslant r_{w_2}(G_2) \leqslant d(G_2), \quad j = 1, 2, \cdots, w_2.$$

如果 $y_1 \neq x_1$ 且 $y_2 \neq x_2$, 式 (4.2.1) 中的路长

$$\begin{cases} \varepsilon(R_1) = \varepsilon(P) + \varepsilon(W_1) \leqslant d(G_1) + d_{w_2}(G_2) \leqslant d, \\ \varepsilon(R_i) = 1 + \varepsilon(W) + \varepsilon(P_i') \leqslant d(G_2) + d_{w_1}(G_1) \leqslant d \\ \qquad i = 2, \cdots, w_1, \\ \varepsilon(R_{w_1+1}) = \varepsilon(W) + \varepsilon(P_1) \leqslant d(G_2) + d_{w_1}(G_1) \leqslant d, \\ \varepsilon(R_{w_1+j}) = 1 + \varepsilon(P) + \varepsilon(W_j') \leqslant d(G_1) + d_{w_2}(G_2) \leqslant d \\ \qquad j = 2, \cdots, w_2. \end{cases} \tag{14.3.3}$$

如果 $y_1 = x_1$ 或者 $y_2 \neq x_2$, 那么式 (4.2.2) 中路长

$$\begin{cases} \varepsilon(R_i) = 1 + \varepsilon(W) + \varepsilon(T_i) \leqslant 1 + d(G_2) + d(G_1) \leqslant d \\ \qquad i = 1, 2, \cdots, w_1, \\ \varepsilon(R_{w_1+j}) = \varepsilon(W_j) \leqslant d_{w_2}(G_2) \leqslant d \\ \qquad j = 1, 2, \cdots, w_2. \end{cases} \tag{14.3.4}$$

如果 $y_2 = x_2$ 或者 $y_1 \neq x_1$, 那么式 (4.2.3) 中路长

$$\begin{cases} \varepsilon(R_i) = \varepsilon(P_i) \leqslant d_{w_1}(G_1) \leqslant d \\ \qquad i = 1, \cdots, w_1, \\ \varepsilon(R_{w_1+j}) = 1 + \varepsilon(P) + \varepsilon(U_j) \leqslant 1 + d(G_1) + d(G_2) \leqslant d \\ \qquad j = 1, 2, \cdots, w_2. \end{cases} \tag{14.3.5}$$

因此, 式 (14.3.2) 成立, 即当 $m = 2$ 时, 定理成立. 假定当 $m - 1$ 时, 定理成立. 考虑 $m \geqslant 3$. 令

$$H = G_2 \times G_3 \times \cdots \times G_m,\ h = w_2 + w_3 + \cdots + w_m.$$

则 $G = G_1 \times H$ 且 $w = w_1 + h$. 因为笛卡儿乘积满足交换律和结合律, 所以由归纳假设得

$$\begin{aligned} d_w(G) &\leqslant \max\{d(G_1) + d(H) + 1;\ d_{w_1}(G_1) + d(H);\ d(G_1) + d_h(H)\} \\ &\leqslant \max\left\{\sum_{j=1}^{m} d(G_j) + 1;\ d_{w_1}(G_1) + \sum_{i=2}^{m} d(G_j);\right. \\ &\qquad \left. d(G_1) + \max\left\{\sum_{i=2}^{m} d(G_j) + 1;\ \sum_{j(\neq i)=2}^{m} d(G_j) + d_{w_i}(G_i);\ 2 \leqslant i \leqslant m\right\}\right\} \\ &= \max\left\{\sum_{i=1}^{m} d(G_j) + 1;\ \sum_{j(\neq i)=1}^{m} d(G_j) + d_{w_i}(G_i);\ 1 \leqslant i \leqslant m\right\} \end{aligned}$$

定理得证. ∎

推论 (Hsu[167]) 设 G 是 w 维有向超环面网 $\overrightarrow{C}(d_1, d_2, \cdots, d_w)$. 则 $d_w(G) = d(G) + 1$, 因而是 w 优的.

证明 因为 $G = \overrightarrow{C}(d_1, d_2, \cdots, d_w)$ 是 w 个有向圈 C_{d_i} ($d_i \geqslant 3$) 的笛卡儿乘积, 所以由定理 6.4.3 知 G 是 w 正则 w 连通的, 且

$$d(G) = \sum_{i=1}^{w}(d_i - 1),$$

$$r_1(C_{d_i}) = d(C_{d_i}) = d_i - 1,\ \forall\, i = 1, 2, \cdots, w.$$

由定理 14.2.1 知, $d_w(G) \geqslant d(G) + 1$. 另一方面, 由定理 14.3.1 有

$$d_w(G) \leqslant \sum_{i=1}^{w} d(C_{d_i}) + 1 = \sum_{i=1}^{w}(d_i - 1) + 1 = d(G) + 1.$$

因此, 得 $d_w(G) = d(G) + 1$. ∎

下面考虑无向图笛卡儿乘积的宽直径, 将获得比有向图更紧的上界.

定理 14.3.2 无向图笛卡儿乘积的宽直径有以下三个结论.

(a) 设 G_i 是阶至少为 3 的 w_i ($\geqslant 1$) 连通无向图, $i = 1, 2, \cdots, m$. 如果 $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_m$, 且 $w = w_1 + \cdots + w_m$, 那么

$$d_w(G) \leqslant \max\left\{\sum_{j \neq i}^{m} d(G_j) + d_{w_i}(G_i);\ 1 \leqslant i \leqslant m\right\}.$$

(b) 设 G 是 w ($\geqslant 2$) 连通无向图. 如果 $d_w(G) = d(G) + 1$, 那么 $d_{1+w}(K_2 \times G) \leqslant d(G) + 2$.

(c) 设 G_i 是 w_i ($\geqslant 1$) 连通无向图, $i=1,2$. 如果 G_i 是 w_i 正则的, $i=1$ 或 2, 那么 $d_{w_1+w_2}(G_1\times G_2)\geqslant d(G_i)+2$.

证明 (a) 只需证明

$$d_{w_1+w_2}(G_1\times G_2)\leqslant \max\{d_{w_1}(G_1)+d(G_2), d(G_1)+d_{w_2}(G_2)\}. \tag{14.3.6}$$

用证明定理 14.3.1 的方法来证明式 (14.3.6). 注意到不等式 (14.3.3), (14.3.4) 和 (14.3.5) 对有向图和无向图都是成立的. 为证明不等式 (14.3.6), 只需重新估计式 (14.3.4) 和 (14.3.5) 中路长可能使等式 (14.3.6) 不成立的那些路的长度. 因为对无向图来说, 式 (4.2.2) 中 T_i 是 G_1 中一条边 $a_i'=v_ix_1$; 式 (4.2.3) 中 U_j 是 G_2 中一条边 $b_j'=u_jx_2$. 于是, 只需考虑

$$\begin{cases} R_i = x_1x_2 \overset{a_ix_2}{\rightarrow} v_ix_2 \overset{v_iW}{\rightarrow} v_iy_2 \overset{a_i'y_2}{\rightarrow} x_1y_2 = y_1y_2, \\ \qquad i=1,2,\cdots,w_1 \\ R_{w_1+j} = x_1x_2 \overset{x_1b_j}{\rightarrow} x_1u_j \overset{Pu_j}{\rightarrow} y_1u_j \overset{x_1b_j'}{\rightarrow} y_1x_2 = y_1y_2, \\ \qquad j=1,2,\cdots,w_2. \end{cases} \tag{14.3.7}$$

的路长. 显然,

$$\varepsilon(R_i)\leqslant d(G_2)+2, \quad \forall\, i=1,2,\cdots,w_1;$$

$$\varepsilon(R_{w_1+j})\leqslant d(G_1)+2, \quad \forall\, j=1,2,\cdots,w_2.$$

因此, 为证明式 (14.3.6), 只需证明,

$$\max\{d(G_1)+d(G_2)\}+2\leqslant \max\{d_{w_1}(G_1)+d(G_2), d(G_1)+d_{w_2}(G_2)\}. \tag{14.3.8}$$

因为对任何阶至少为 3 的 m ($\geqslant 1$) 连通图 H,

$$\begin{cases} d(H)\geqslant 2, & \text{若 } m=1; \text{ 或者} \\ d_m(H)\geqslant 2, & \text{若 } m\geqslant 2, \end{cases} \tag{14.3.9}$$

所以由式 (14.3.9), 不等式 (14.3.8) 成立, 即结论 (a) 得证.

(b) 在假定条件下, 显然有 $d(K_2)+d_w(G)=d(G)+2$. 注意到, 式 (14.3.8) 的成立需要阶数至少为 3 的条件. 但在这里, 式 (14.3.8) 的成立也是显然的, 因为

$$\begin{aligned} \max\{d(K_2); d(G)\}+2 &= d(G)+2 = 1+d_w(G) \\ &= \max\{d(K_2)+d(G); d(K_2)+d_w(G)\}. \end{aligned}$$

因此在 (b) 的条件下, 结论 (a) 成立. 于是

$$d_{1+w}(K_2\times G)\leqslant \max\{d(K_2)+d(G); d(K_2)+d_w(G)\} = d(G)+2.$$

(c) 不妨设G_1是w_1正则的. 设$x_1, y_1 \in V(G_1)$使得$d(G_1; x_1, y_1) = d(G_1)$. 对任何$x_2 \in V(G_2)$, 令 $x = x_1x_2, y = y_1x_2$, 则 $x \neq y$. 因为G_1是w_1正则的, 所以$G_1 \times G_2$的$w_1 + w_2$条内点不交的xy路中至少有一条形如式 (14.3.7) 中的结构, 长度为$d(G_1) + 2$. 因此, $d_{w_1+w_2}(G_1 \times G_2) \geqslant d(G_i) + 2$. ∎

注 对定理 14.3.2 中的条件作两条注释.

1. 结论 (b) 中条件"$w_i \geqslant 2$"是必不可少的. 例如, $d_2(K_2 \times K_2) = 3 > 2 = d(K_2) + d(K_2)$.

2. 上面的例子也说明定理 14.3.2 的结论 (a) 中条件"阶数至少为 3"是必不可少的. 更复杂的例子是$G = K_2 \times UB(2,n)$, 其中$UB(2,n)$是无向 de Brujin 图, $n \geqslant 2$ (参见例 14.1.3). 由结论 (a) 知, $d_3(G) \leqslant n + 1$; 但由结论 (b) 知, $d_3(G) \geqslant n + 2$, 矛盾.

推论 1 设无向图G_i是w_i ($\geqslant 2$) 优的, $i = 1, 2, \cdots, m$. 则$G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_m$是$(w_1 + w_2 + \cdots + w_m)$优的.

证明 令$G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_m$, 且令$w = w_1 + w_2 + \cdots + w_m$. 因为无向图$G_i$是$w_i$ ($\geqslant 2$) 优的, 所以G_i是w_i正则w_i连通的, $i = 1, 2, \cdots, m$. 因而G是w正则w连通的, 且$d(G) = d(G_1) + \cdots + d(G_m)$. 由定理 14.2.1 知$d_w(G) \geqslant d(G) + 1$.

另一方面, 因为G_i是w_i优的, 所以$d_{w_i}(G_i) = d(G_i) + 1$, $i = 1, 2, \cdots, m$. 又因为G_i的阶数至少为 3, 由定理 14.3.2 (a) 知$d_w(G) \leqslant d(G) + 1$. 因此, $d_w(G) = d(G) + 1$, 即G是w优的. ∎

推论 2 (Duh 等 [86], Xu[327]) 广义超立方体$Q(d_1, d_2, \cdots, d_m)$是w优的, 其中$w = d_1 + \cdots + d_m - m$, $d_i \geqslant 3$, $i = 1, 2, \cdots, m$.

证明 因为广义超立方体$Q(d_1, d_2, \cdots, d_m) = K_{d_1} \times K_{d_2} \times \cdots \times K_{d_i}$, 且$K_{d_m}$是$d_i - 1$最优的, 所以由定理 14.3.2 知结论成立. ∎

推论 3 如果G是w优的, 其中$w \geqslant 2$, 那么$K_2 \times G$是$(1 + w)$优的.

证明 因为G是w优的, 所以$d_w(G) = d(G) + 1$. 由定理 14.3.2 (b) 知, 此推论成立. ∎

Hayes 和 Mudge[151], Krishnamoorthy 和 Krishnamurthy[194],Saad 和 Schultz[273] 独立地证明了超立方体Q_w是w优的. 这个结果可以直接从推论 3 得到.

推论 4 超立方体Q_w是w优的, $w \geqslant 2$.

证明 对$w \geqslant 2$用归纳法. 显然, $Q_2 = K_2 \times K_2$是 2 优的. 假定Q_{w-1}是$(w-1)$优的. 因为$Q_w = K_2 \times Q_{w-1}$, 所以, 由推论 2 立即知Q_w是w优的. ∎

§14.4 宽直径与独立数

下面的结果表明图的独立数与宽直径之间存在密切关系.

定理 14.4.1 设 G 是 w 连通无向图, $w \geqslant 2$, 且 $\alpha(G)$ 是 G 的独立数. 则 $d_w(G) \leqslant 2\alpha(G)$. 如果 $d \geqslant 2$ 且 $\alpha(G) \leqslant \lfloor \frac{1}{2}d \rfloor$, 那么 $d_w(G) \leqslant d$, 这个上界可以达到.

证明 设 x 和 y 是 G 中两顶点使得 $d_w(G;x,y) = d_w(G)$, 选取尽可能小的 (x,y) 路族 $\mathscr{P}_w(G;x,y) = \{P_1, P_2, \cdots, P_w\}$ 使得 $d_w(G;x,y) = \varepsilon(P_w) = b_w + 1 = d_w(G)$. 令 $P_w = (x = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{b_w-1}, x_{b_w}, y)$, $r = \lceil \frac{1}{2}(b_w+1) \rceil$, 并令

$$I = \{x_{2j}:\ 0 \leqslant j \leqslant r-1\}.$$

则因为 $2(r-1) \leqslant r_w$, 所以 $y \notin I$. 由 $\mathscr{P}_w(G;x,y)$ 的选取和 $y \notin I$ 知, I 中任何两顶点在 G 中不相邻. 因此, I 是 G 的独立集, 而且

$$\alpha(G) \geqslant |I| = \left\lceil \frac{1}{2}(r_w+1) \right\rceil \geqslant \frac{1}{2}(r_w+1).$$

由此得 $d_w(G) = r_w + 1 \leqslant 2\alpha(G)$.

广义轮 $W(w-2, 2n+1)$ 和 $W(w-2, d+2)$ 说明这个上界是可以达到的. ∎

定理 14.4.2 设 G 是 w 连通无向图, $d \geqslant 3$, 且 $\ell = \lfloor \frac{1}{3}d \rfloor$. 如果存在整数 s $(2 \leqslant s \leqslant \ell+1)$ 使得 G 中任何由 s 个顶点组成的独立集 S 满足条件:

$$\sum_{x\in S} d_G(x) \geqslant \begin{cases} n+w-d+1, & 若\ s=2; \\ n+(w+1)(s-1)-d-1, & 若\ s \geqslant 3, \end{cases} \tag{14.4.1}$$

那么 $d_w(G) \leqslant d$. 条件 (14.4.1) 是紧的, 而且宽直径的上界 d 是可以达到的.

证明 (反证) 假定 $d_w(G) > d$. 则 G 中存在两顶点 x, y 和尽可能小的 (x,y) 路族 $\mathscr{P}_w(G;x,y) = \{P_1, P_2, \cdots, P_w\}$ 使得 $d_w(G;x,y) = \varepsilon(P_w) = d_w(G) \geqslant d+1 \geqslant 4$. 令 $P_w = (x = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{b_w}, y)$. 考虑 P_w 的顶点子集

$$S = \begin{cases} \{x_{3j}:\ 0 \leqslant j \leqslant s-2\} \cup \{y\}, & 若\ xy \notin E(G); \\ \{x_{3j}:\ 0 \leqslant j \leqslant s-1\}, & 若\ xy \in E(G). \end{cases}$$

那么 $2 \leqslant |S| = s \leqslant \ell + 1$. 因为 $b_w \geqslant d \geqslant 3$, 所以 $3\ell \leqslant d \leqslant b_w$. 因此, 当 $xy \in E(G)$ 时, $y \notin S$. 因为 S 中任何两顶点在 G 中不相邻, 所以 S 是 G 中由 s 个顶点组成的独立集, 且

$$\sum_{u\in S} d_{P_w}(u) = \begin{cases} 2+2(s-2), & 若\ xy \notin E(G); \\ 1+2(s-1), & 若\ xy \in E(G). \end{cases} \tag{14.4.2}$$

对 S 中任何两顶点 u 和 v, 因为 $d(G;u,v) \geqslant 3$, 所以由定理 14.1.1 (b) 知, 它们在 A 中没有公共的邻点. 因此, 由式 (14.1.2) 知 S 在 A 中的邻点数

$$\sum_{u\in S} d_A(u) \leqslant |A| = n - 2 - \sum_{i=1}^{w} b_i. \tag{14.4.3}$$

如果 $xy \notin E(G)$, 那么由定理 14.1.1 (c) 知, S 在 B_i 中的邻点数

$$\sum_{u\in S} d_{B_i}(u) \leqslant b_i + s - 1,\ \forall\, i = 1, 2, \cdots, w-1.$$

因此, S 在 B 中的邻点数

$$\sum_{u\in S} d_B(u) \leqslant \sum_{i=1}^{w-1}(b_i + s - 1) = \sum_{i=1}^{w-1} b_i + (w-1)(s-1). \tag{14.4.4}$$

由式 (14.4.2) ~ (14.4.4) 得

$$\begin{aligned}\sum_{u\in S} d_G(u) &= \sum_{u\in S} d_{P_w}(u) + \sum_{u\in S} d_A(u) + \sum_{u\in S} d_B(u)\\ &\leqslant n + (w+1)(s-1) - 2 - b_w\\ &\leqslant n + (w+1)(s-1) - 2 - d.\end{aligned}$$

这矛盾于条件 (14.4.1).

如果 $xy \in E(G)$, 那么 $b_1 = 0$. 由下式代替式 (14.4.4)

$$\begin{aligned}\sum_{u\in S} d_B(u) &\leqslant 1 + \sum_{i=2}^{w-1}(b_i + s - 1)\\ &= \sum_{i=1}^{w-1} b_i + (w-2)(s-1) + 1.\end{aligned} \tag{14.4.5}$$

由式 (14.4.2), (14.4.3) 和 (14.4.5) 得

$$\begin{aligned}\sum_{u\in S} d_G(u) &= \sum_{u\in S} d_{P_w}(u) + \sum_{u\in S} d_A(u) + \sum_{u\in S} d_B(u)\\ &\leqslant n + w(s-1) - b_w\\ &= n + (w+1)(s-1) - b_w - 2 - (s-3)\\ &\leqslant n + (w+1)(s-1) - d - 2 - (s-3).\end{aligned}$$

这也矛盾于条件 (14.4.1). 因此 $d_w(G) \leqslant d$ 得证.

为了看到条件 (14.4.1) 是紧的, 考虑广义轮 $W(w-2, d+2)$, 其中 $d \geqslant 3$, $w \geqslant 2$. 它有阶 $n = w + d$, 连通度 w, w 直径 $d+1$, 独立数为 $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$. 然而, 其中任何由 s ($\geqslant 2$) 个顶点组成的独立集中所有顶点度之和为

$$sw = \begin{cases} = n + w - d, & 若\ s = 2;\\ < n + (w+1)(s-1) - d - 1, & 若\ s \geqslant 3.\end{cases}$$

它不满足条件 (14.4.1). 因而说明了条件 (14.4.1) 是紧的.

当 $d \geqslant 3$ 且 $w \geqslant 2$ 时, 不难看到广义轮 $W(w-2, d+1)$ 说明当 $s=2$ 时, w 直径的上界 d 不能改进. 为了看到当 $s \geqslant 3$ 时, w 直径的上界 d 也不能改进, 考虑 $H(w,d) = K_{w-1} \vee P_{d+1}$. 当 $d \geqslant 3$ 且 $w \geqslant 2$ 时 $H(w,d)$ 有阶 $w+d$, 连通度 w, 独立数 $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$, w 直径为 d. $H(w,d)$ 中任何由 s ($\geqslant 3$) 个顶点组成的独立集 S 中所有顶点度之和

$$\sum_{u \in S} d_H(u) \geqslant 2w + (w+1)(s-2) = n + (w+1)(s-1) - d - 1$$

满足条件 (14.4.1). 然而, 如果 $s=2$, 那么 $H(w,d)$ 中存在不相邻两顶点, 比如 P_{d+1} 的两端点, 它们的顶点度之和为 $2w = n + w - d$. 它不满足条件 (14.4.1). ∎

定理 14.4.2 中条件 $d \geqslant 3$ 也不能改为 $d = 2$. 例如, 设 G 是由 K_4 和 K_2 的并, 添加 4 条边连接 K_2 中不同顶点到 K_4 中不同顶点而得到的图. G 有阶 $n = 6$, 独立数 2, 连通度 3. 如果 $w = 2$, 那么 G 满足条件 (14.4.1) 中 $s = d = 2$ 的情形. 然而, $d_2(G) = 3 > 2$. 注意到 K_2 的两顶点不满足定理 14.4.1 中顶点度条件, 所有定理 14.4.1 和定理 14.4.2 是相互独立的结论.

推论　设 G 是 w 连通无向图, $d \geqslant 3$ 且 $w \geqslant 2$. 如果 G 中任何不相邻两顶点 x 和 y 满足

$$d_G(x) + d_G(y) \geqslant n + w + 1 - d,$$

那么 $d_w(G) \leqslant d$.

§14.5　宽直径与容错直径

这一节讨论 w 图 G 中参数 $d_w(G)$ 与 $\zeta_\ell(G)$, 和参数 $r_w(G)$, $d_w(G)$ 与 $D_w(G)$ 之间的关系. $d_w(G)$ 和 $\zeta_\ell(G)$ 的下列关系的证明完全类似于定理 13.2.1 的证明, 留给读者作为练习.

定理 14.5.1　对任何图 G,

(a) 如果 G 是 $w+1$ 连通的, 那么 $\zeta_\ell(G) = w \Leftrightarrow d_w(G) \leqslant \ell < d_{w+1}(G)$;

(b) 如果 G 是 w 连通的, 那么 $d_w(G) = \ell \Leftrightarrow \zeta_{\ell-1}(G) < w \leqslant \zeta_\ell(G)$. ∎

下面的定理给出了 $D_w(G)$, $d_w(G)$ 和 $r_w(G)$ 之间的关系, 其中 $d_w(G)$ 和 $D_w(G)$ 的关系由许多作者得到, $d_w(G)$ 和 $r_w(G)$ 的关系由 Duh 和 Chen[84] 首先得到.

定理 14.5.2　对任何 w ($\geqslant 2$) 连通图 G, 均有

$$D_w \leqslant d_w(G) \leqslant r_w(G) + 1. \tag{14.5.1}$$

证明　首先证明 $D_w(G) \leqslant d_w(G)$. 设 $d_w(G) = m$, 则对 G 中任何两顶点 x, y 存在 $\mathscr{P}_w(G; x, y) = \{P_1, P_2, \cdots, P_w\}$ 使得 $\varepsilon(P_i) \leqslant m$, $i = 1, 2, \cdots, m$. 于是, 对任何子集 $F \subset V(G)$, $|F| < w$, 至少存在一条路 $P_i \in \mathscr{P}_w(G; x, y)$, 它不含 F 中任何顶点. 这意味着 $d(G-F; x, y) \leqslant m$. 由 x, y 和 F 的任意性得

$$D_w(G) = \max\{d(G-F):\ F \subset V(G),\ |F| < w\} \leqslant m = d_w(G)$$

欲证 $d_w(G) \leqslant r_w(G)+1$. 只需证对 G 中任何两个不同的顶点 x 和 y 均有 $d_w(G;x,y) \leqslant r_w(G)+1$. 设 $y_1=y, y_2, y_3, \cdots, y_w \in N_G(y)$, $Y=\{y_1,y_2,y_3,\cdots,y_w\}$. 于是存在 (x,Y) 扇 $\{P_1,P_2,\cdots,P_w\}$ 使得

$$\varepsilon(P_1) \leqslant \varepsilon(P_2) \leqslant \cdots \varepsilon(P_w) \leqslant r_w(G),$$

其中 P_i 是 xy_i 路, $i=1,2,\cdots,w$. 令

$$P_1'=P_1,\ P_i'=P_i+y_iy, \quad i=2,3,\cdots,w.$$

那么, $P_1',P_2',\cdots,P_w'$ 是 G 中内点不交且长不超过 $r_w(G)+1$ 的 xy 路. 因此, $d_w(G;x,y) \leqslant r_w(G)+1$. ∎

注 考虑例 14.1.2 中的广义轮 $W(k-2,p)$, $p \geqslant 3$, $k \geqslant 2$. $D_k(W(k-2,p)) = d_k(W(k-2,p)) = p-1$, $r_k(W(k-2,p)) = p-2$. 这说明定理 14.5.2 中的上界是紧的. 也容易看到, 当 $k \geqslant 1, p \geqslant 4$ 时, $d_k(W(k-1,p)) = r_k(W(k-1,p)) = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$.

Kojima 和 Ando[191] 证明了下述结果: 当 $w \geqslant 2$ 时,

$$d_w(G)-1 \leqslant r_w(G) \leqslant \max\{d_w(G),\ (w-1)d_w(G)-4w+7\}.$$

下一节将列举许多使得式 (14.5.1) 中第一个等号成立的图类. 但一般说来, (14.5.1) 中第一个等号是不成立的. 人们关心的是这两个参数之间的差距到底有多大.

引理 14.5.3 (徐俊明和谢歆 [342]) 设 G 是 2 连通无向图, u 和 v 是 G 中距离为 $m+1$ 的两顶点. 若 $m \geqslant 1$, 则 G 中存在两条内点不交的 uv 路 P_1 和 P_2 使得

$$\varepsilon(P_1) \leqslant \varepsilon(P_2) \leqslant \max\left\{m\left(D_2-\frac{1}{2}m-\frac{3}{2}\right)+1,\ D_2\right\}.$$

证明 设 $P=ux_1\cdots x_mv$ 是最短的 uv 路, 则 $1 \leqslant m \leqslant d-1 \leqslant D_2-1$. 令 Q_i 是 $G-x_i$ 中最短 uv 路, 则对任何 $1 \leqslant i \leqslant m$ 有 $\varepsilon(Q_i) \leqslant D_2$. 令 $H=P\cup Q_1\cup\cdots\cup Q_m$. 任取 $x \in V(H)\backslash\{u,v\}$. 若 $x=x_i$, 则 Q_i 是 $G-x_i$ 中 uv 路; 若 $x \in V(Q_i)$ 且 $x \notin V(P)$, 则 P 是 $H-x$ 中 uv 路. 这说明在 H 中分离 u 和 v 至少需要 2 个顶点. 由 Menger 定理知, H 中必存在两条内点不交的 uv 路.

若 $P,Q_1,\cdots,Q_m$ 中存在两条内点不交, 则这两条 uv 路长 $\leqslant \max\{m+1,D_2\}$. 下面, 假定 $P,Q_1,\cdots,Q_m$ 中任何两条内部相交, 则 $m \geqslant 2$.

若 $P,Q_1,\cdots,Q_m$ 的交点数小于 $\frac{1}{2}m(m+1)$. 那么容易验证 $m \geqslant 3$. 在这种情形下, $P,Q_1,\cdots,Q_m$ 中必存在 3 条路内部相交于一点. 由于在 H 中分离 u 和 v 至少需要 2 个顶点, 所以必存在第 4 条路, 它不经过前 3 条路的公共交点. 于是, 通过对这 4 条路至多某三段 (每段长至多为 D_2-2) 的拼接得到 H 中两条不交的 uv 路, 它们的长至多为 $3D_2-6$. 因为函数

$$f(m)=m\left(D_2-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\right)+1$$

在区间 $[3, D_2-1]$ 上单调增, 所以

$$3D_2-6=f(3)\leqslant f(m)=m\left(D_2-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\right)+1.$$

若 $P, Q_1, \cdots, Q_m$ 的交点数不小于 $\frac{1}{2}m(m+1)$, 则 H 的顶点数目

$$\begin{aligned}v(H)&\leqslant(m+2)+m(D_2-1)-\frac{1}{2}m(m+1)\\&=m\left(D_2-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\right)+2.\end{aligned}$$

设 P_1 和 P_2 是 H 中两条内点不交的 uv 路, $m+1\leqslant\varepsilon(P_1)\leqslant\varepsilon(P_2)$. 于是,

$$\varepsilon(P_1)\leqslant\varepsilon(P_2)\leqslant v(H)-m-1\leqslant m\left(D_2-\frac{1}{2}m-\frac{3}{2}\right)+1.$$

引理得证. ▮

定理 14.5.4 直径为 d 的 2 连通无向图, 有

$$d_2\leqslant\max\left\{(d-1)\left(D_2-\frac{1}{2}d-1\right)+1, D_2+1\right\}.$$

证明 设 G 是直径为 d 的 2 连通图. 若 $d=1$, 则 G 是完全图. 因此, 当 G 的顶点数不小于 3 时有 $d_2=2$ 且 $D_2=1$. 因而定理成立. 以下假设 $d\geqslant2$, 并设 u 和 v 是 G 中任意两个不同的顶点. 只需证明 G 中存在两条内点不交的且长度都不超过

$$\max\left\{(d-1)\left(D_2-\frac{1}{2}d-1\right)+1, D_2+1\right\}$$

的 uv 路. 为此令 $P=ux_1\cdots x_mv$ 是最短 uv 路.

若 $m=0$, 则 u 和 v 在 G 中相邻. 令 Q 是 $G-uv$ 中最短 uv 路, 那么 $Q-u$ 是 $G-u$ 中最短路, 因而 $\varepsilon(Q)\leqslant D_2+1$.

若 $m\geqslant1$, 则由引理 15.5.3 知 G 中存在两条内点不交的 uv 路 P_1 和 P_2 使得

$$\varepsilon(P_1)\leqslant\varepsilon(P_2)\leqslant\max\left\{m\left(D_2-\frac{1}{2}m-\frac{3}{2}\right)+1, D_2\right\}. \tag{14.5.2}$$

注意到 $1\leqslant m\leqslant d-1$. 由于函数 $f(m)=m\left(D_2-\frac{1}{2}m-\frac{3}{2}\right)+1$ 在区间 $[1, d-1]$ 上单调增加, 且

$$f(d-1)=(d-1)\left(D_2-\frac{1}{2}d-1\right)+1.$$

所以, 由式 (14.5.2), 定理得证. ▮

推论 (Flandrin 和 Li[118]) 设 G 是 2 连通无向图, $d=d(G)$, $d_2=d_2(G)$, $D_2=D_2(G)$. 则

$$d_2\leqslant\begin{cases}D_2+1, & 若\ d=2;\\(d-1)(D_2-1), & 若\ d\geqslant3.\end{cases}$$

定理 14.5.5 设 G 是直径为 2 的 2 连通无向图, 则 $d_2 = D_2 + 1$ 的充分必要条件是 $d_2 = 3$ 或 $d_2 = 4$, 且达到 d_2 值的任何两顶点必相邻.

证明 (必要性) 假定 $d_2 = D_2 + 1$. 因为 $D_2 \geqslant D_1 = d = 2$, 所以 $d_2 \geqslant 3$. 由宽直径的定义知, G 中存在两顶点 u 和 v 使得达到 $d_2(G; u, v) = d_2$. 于是, G 中任何两条内点不交的 uv 路中至少有一条长度不小于 d_2. 设 $P = ux_1 \cdots x_m v$ 是最短 uv 路. 由于 $d(G) = 2$, 所以 $m \leqslant 1$. 若 $m = 1$, 则由引理 14.5.4 知, G 中存在两条内点不交的 uv 路 P_1 和 P_2 使得

$$\varepsilon(P_1) \leqslant \varepsilon(P_2) \leqslant \max\{D_2 - 1, D_2\}.$$

因此,

$$D_2 + 1 = d_2 \leqslant \varepsilon(P_2) \leqslant D_2,$$

矛盾. 因此, $m = 0$, 即 $uv \in E(G)$. 设 $Q = uy_1 \cdots y_n v$ 是 $G - uv$ 中最短 uv 路, 则 $d_2 = n + 1$. 假定 $d_2 \geqslant 5$, 即 $n \geqslant 4$, 那么 $2 = d(G) \geqslant d(G; y_2, v) = 3$, 矛盾. 所以, $3 \leqslant d_2 \leqslant 4$.

(充分性) 设 $u, v, z \in V(G)$ 使得 u 和 v 在 $G - z$ 中的距离为 D_2, 并设 P 是 $G - z$ 中最短 uv 路. 则 $\varepsilon(P) = D_2$. 因为 $d(G) = 2$, 所以存在 $y \in V(G)$ 使得 $uy, yv \in V(G)$. 不妨设 $y = z$, 并令 $Q = uzv$. 于是 P 和 Q 是 G 中两条内点不交的 uv 路, 且 $\varepsilon(Q) \leqslant \varepsilon(P)$. 因为 u 和 v 在 G 中不相邻, 所以, 由相邻性假定应有 $D_2 = \varepsilon(P) \leqslant d_2 - 1$, 即 $d_2 \geqslant D_2 + 1$. 另一方面, 当 $d = 2$ 时, 由定理 15.5.4 有 $d_2 \leqslant D_2 + 1$. 所以, $d_2 = D_2 + 1$. ∎

§14.6 某些网络的宽直径

人们感兴趣的是: 对于给定的 w 连通图 G, 确定 G 的宽直径 $d_w(G)$. Menger 定理虽然解决了 $d_w(G)$ 的存在性, 但对于一般 w 连通图 G, 给出 $d_w(G)$ 的值是困难的. 这是因为 Hsu[167] 已经证明这是 NP 完备问题. 然而, 已经确定出许多著名的图的宽直径. 这一节介绍这些结果. 由于篇幅的限制, 略去某些结论的详细证明.

1. 超立方体 Q_n $(n \geqslant 3)$

由定理 6.1.2 知 $\kappa(Q_n) = n = d(Q_n)$. 如果 $w \leqslant n$, 那么宽直径 $d_w(Q_n)$ 是确定的. 定理 6.2.3 意味着

$$D_w(Q_n) = r_w(Q_n) = d_w(Q_n) = \begin{cases} n, & \text{若 } w \leqslant n - 1; \\ n + 1, & \text{若 } w = n. \end{cases}$$

2. de Brujin 有向图 $B(d, n)$ $(d \geqslant 2, n \geqslant 1)$

因为由定理 7.1.2 知 $\kappa(B(d, n)) = d - 1$, 且 $d(B(d, n)) = n$, 所以, 如果 $w \leqslant d - 1$, 那么宽直径 $d_w(B(d, n))$ 是确定的. 定理 7.2.4 意味着

$$D_w(B(d, n)) = r_w(B(d, n)) = d_w(B(d, n)) = n + 1, \quad \text{若 } w \leqslant d - 1.$$

3. Kautz 有向图 $K(d,n)$ $(d \geqslant 2, n \geqslant 1)$

因为由定理8.1.2 知 $\kappa(K(d,n)) = d$, 且 $d(K(d,n)) = n$, 所以, 如果 $w \leqslant d$, 那么宽直径 $d_w(K(d,n))$ 是确定的. 定理8.1.5 意味着

$$d_w(K(d,n)) \leqslant \begin{cases} n+1, & \text{若 } w \leqslant d-2; \\ n+2, & \text{若 } w = d-1 \text{ 或者 } d. \end{cases}$$

Du 等 [81] 改进了这些上界, 且获得 $d_w(K(d,n))$ 的值如下:

$$\begin{aligned} D_w(K(d,n)) &= d_w(K(d,n)) \\ &= \begin{cases} n+1, & \text{若 } w \leqslant d-1, \text{ 或者 } w = d \text{ 且 } n = 2; \\ n+2, & \text{若 } w = d \text{ 且 } n \geqslant 3. \end{cases} \end{aligned}$$

4. de Brujin 无向图 $UB(d,n)$ $(d \geqslant 2, n \geqslant 1)$

因为由定理7.1.6 知 $\kappa(UB(d,n)) = 2d-2$ 且 $d(UB(d,n)) = n$, 所以, 如果 $w \leqslant 2d-2$, 那么宽直径 $d_w(UB(d,n))$ 是确定的. 由 $d_{d-1}(B(d,n)) \leqslant n+1$, 得

$$d_{d-1}(UB(d,n)) \leqslant n+1.$$

特别地, $\kappa(UB(2,n)) = 2$. Li, Sotteau, Xu[207] 证明了: $UB(2,n)$ 中任何两顶点之间存在两条内点不交且长度不超过 n 的路. 这个结论意味着

$$D_2(UB(2,n)) = d_2(UB(2,n)) = n.$$

5. 无向超环面 $C(d_1, \cdots, d_m)$

由定理6.4.3 知 $\kappa(C(d_1,\cdots,d_m)) = 2m$ 且 $d(C(d_1,\cdots,d_m)) = \sum\limits_{i=1}^{m} \left\lfloor \frac{1}{2} d_i \right\rfloor$. 令 $G = C(d_1,\cdots,d_m)$. Ishigami[182] 证明了

$$d_{2m}(G) = \begin{cases} 2d(G)-1, & \text{若 } G = C_{2w+1} \times C_3,\ w \geqslant 2; \\ 2d(G)-2, & \text{若 } G = C_{2w+2} \times C_3,\ w \geqslant 2; \\ d(G)+2, & \text{若 } G = C_d \times C_4,\ d \geqslant 9; \\ d(G)+2, & \text{若 } G = C_d \times C_5,\ 9 \leqslant d \leqslant 13; \\ d(G)+1, & \text{其他}. \end{cases}$$

6. 有向超环面 $\overrightarrow{C}(d_1, \cdots, d_n)$

用 $\overrightarrow{C}$ 表示 $\overrightarrow{C}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$. 由定理14.3.1 的推论有

$$d_n(\overrightarrow{C}) = \sum_{i=1}^{n} (d_i - 1) = d(\overrightarrow{C}) + 1.$$

当 $d_1 = \cdots = d_n = d$ 时, 用 $\overrightarrow{C}_n(d)$ 表示 $\overrightarrow{C}(d, \cdots, d)$. 于是, 有

$$d_n(\overrightarrow{C}_n(d)) = d(\overrightarrow{C}_n(d)) = n(d-1)+1.$$

Liaw 和 Chang[219] 获得

$$D_w(\overrightarrow{C}_n(d)) = r_w(\overrightarrow{C}_n(d)) = d_w(\overrightarrow{C}_n(d))$$
$$= \begin{cases} n(d-1), & \text{若 } 1 \leqslant w \leqslant n-1; \\ n(d-1)+1, & \text{若 } w = n. \end{cases}$$

7. 广义超立方体 $Q(d_1, \cdots, d_n)$

Liaw 和 Chang[219] 得到

$$D_w(Q(d_1, \cdots, d_n)) = r_w(Q(d_1, \cdots, d_n)) = d_w(Q(d_1, \cdots, d_n))$$
$$= \begin{cases} n, & \text{若 } 1 \leqslant w \leqslant n-1; \\ n, & \text{若 } w = n \text{ 且至少存在两个 } d_i \geqslant 3; \\ n+1, & \text{若 } w = n \text{ 且至少存在一个 } d_i \geqslant 3; \\ n+1, & \text{若 } n+1 \leqslant w \leqslant d_1 + \cdots + d_n - n. \end{cases}$$

8. 立方连通圈 $CCC(n)$

由 10.3 节知, $\kappa(CCC(n)) = 3$ 且 $d(CCC(n)) = \lfloor \frac{5}{2}n - 1 \rfloor$. Krishnamoorthy 和 Krishnamurthy[194] 证明了

$$d_3(CCC(n)) = D_3(CCC(n)) = \left\lfloor \frac{5}{2}n + 2 \right\rfloor = d(CCC(n)) + 3.$$

9. 金字塔网 $PN(n)$

Cao 等 [52] 得到

$$d_2(P_n) = 3n - 1;$$
$$d_3(P_n) \leqslant \tfrac{10}{3}n + 6.$$

10. 循环有向图

对于循环有向图 $G(d^n; S)$, $S = \{1, d, \cdots, d^{n-1}\}$ 且 $d \geqslant 2$, Hsu, Lyuu[170], Duh, Chen[84] 证明了 $d_n(G(d^n; S)) = n(d-1)+1$. Liaw 等 [222] 进一步得到

$$D_w(G(d^n; S)) = r_w(G(d^n; S)) = d_w(G(d^n; S))$$
$$= \begin{cases} n(d-1), & \text{若 } 1 \leqslant w \leqslant n-1; \\ n(d-1)+1, & \text{若 } w = n. \end{cases}$$

11. 折叠超立方体 FQ_n

由定理 6.5.3 知 FQ_n 有直径 $\lceil \frac{1}{2}n \rceil$ 和连通度 $n+1$. Duh 等 [85] 证明了

$$d_{n+1}(FQ_n) = \left\lceil \frac{1}{2}n \right\rceil + 1.$$

Liaw 和 Chang[220] 改进为

$$D_w(FQ_n)=d_w(FQ_n)=\begin{cases}\lceil\frac{1}{2}n\rceil, & 若\ 1\leqslant w\leqslant\lceil\frac{1}{2}n\rceil-1;\\ \lceil\frac{1}{2}n\rceil+1, & 若\ \lceil\frac{1}{2}n\rceil\leqslant w\leqslant n+1.\end{cases}$$

12. 交叉超立方体 CQ_n

由定理 6.5.1 知 CQ_n 有直径 $\lceil\frac{1}{2}n\rceil$ 和连通度 n. Chang[56] 证明了

$$d_n(CQ_n)=D_n(CQ_n)=\left\lceil\frac{1}{2}n\right\rceil+2.$$

13. 蝶形网 $BF(n)$ $n\geqslant 2$

因为蝶形网 $BF(n)$ 有连通度 2, 所以 $d_2(BF(n))$ 是确定的. Liaw 和 Chang[219] 证明了

$$D_2(BF(n))=r_2(BF(n))=d_2(BF(n))=2n+2.$$

14. Möbius 超立方体 MQ_n

由定理 6.5.2 知 MQ_n 有连通度 n; 0-MQ_n 有直径 $\lceil\frac{n+2}{2}\rceil$ $(n\geqslant 4)$, 1-MQ_n 有直径 $\lceil\frac{n+1}{2}\rceil$ $(n\geqslant 1)$. Xu 和 Deng[330] 证明了

$$\begin{aligned}\lceil\frac{n+2}{2}\rceil+1\leqslant\ & d_n(0\text{-}M_n)\ \leqslant\lceil\frac{n+2}{2}\rceil+2, && n\geqslant 4;\\ \lceil\frac{n+1}{2}\rceil+1\leqslant\ & d_n(1\text{-}M_n)\ \leqslant\lceil\frac{n+2}{2}\rceil+2, && n\geqslant 1.\end{aligned}$$

习 题

14.1 证明定理 14.5.1.

14.2 设 G 是 w 边连通图. 写出边宽直径 $d'_w(G)$ 的定义, 并且证明: $d'_w(G)\leqslant d_w(G)$; $D'_w(G)\leqslant d'_w(G)$; $d'_w(G)\leqslant 4$ 如果 G 是直径为 2.

第 15 章　(ℓ,w) 独立数与 (ℓ,w) 控制数

上一章研究了网络宽直径概念. 它是连通度和直径概念的统一和推广, 并能更好地度量实时并行处理系统互连网络的有效性和可靠性.

对于给定的 w 连通图 G 和整数 ℓ, 如果 $\ell < d_w(G)$, 那么 G 中必存在顶点子集 I, 其中任何两个顶点之间的 w 距离大于 ℓ. 这意味着, 在规定的时限 ℓ 内, I 中任何两顶点之间的数据不能用 w 条内点不交的路来传递. 为了评估这种互连网络的性能, 人们想知道 G 中这样的顶点子集到底有多大?

另一方面, 在资源共享 (resources-sharing) 系统的互连网络中, 人们需要某些处理器用来存储资源使得网络中其他任何处理器随时能用 w 条内点不交且长度不超过 ℓ 的路来调配这些资源. 人们关心的问题是: 对于给定的 w 和 ℓ, 网络中满足要求的处理器的个数至少是多少?

这一章将这两个问题归结为求两个图论参数: (ℓ,w) 独立数和 (ℓ,w) 控制数.

§15.1　(ℓ,w) 独立数

设 G 是 w $(\geqslant 1)$ 连通图, $\emptyset \neq I \subset V(G)$, 且 ℓ $(\geqslant 1)$ 是正整数. 如果对任何 $x,y \in I$ 均有 $d_w(G;x,y) > \ell$, 那么称 I 为 G 中 (ℓ,w) **独立集** (independent set). 用 $\mathscr{I}_{\ell,w}(G)$ 表示 G 中所有 (ℓ,w) 独立集族. 参数

$$\alpha_{\ell,w}(G) = \max\{|I|:\ I \in \mathscr{I}_{\ell,w}(G)\}$$

称为 G 中 (ℓ,w) **独立数** (independence number). G 中 (ℓ,w) 独立集 I 称为最大的, 如果 $|I| = \alpha_{\ell,w}(G)$.

显然, $\alpha_{\ell,w}(G) = 1$ 当且仅当 $d_w(G) \leqslant \ell$. 这说明 (ℓ,w) 独立数的概念是宽直径概念的推广.

当用图 G 来表示实时处理系统互连网络时, 参数 $\alpha_{\ell,w}(G)$ 是最大顶点数 α, G 中存在 α 个顶点, 这些顶点之间的数据沿 w 条内点不交的路进行传输时, 不能在时限 ℓ 内到达. 显然, $\alpha_{\ell,w}(G)$ 越大, G 代表的互连网络处理器的利用率越低. 因此, (ℓ,w) 独立数是网络性能的重要度量参数. 人们的兴趣是: 对于给定的 w 连通图 G 和正整数 ℓ, 确定 G 中 (ℓ,w) 独立数 $\alpha_{\ell,w}(G)$.

(ℓ,w) 独立数概念是 Flandrin 和 Li[118] 首先提出来的. 显然, $(1,1)$ 独立数就是图论中的独立数. 因此, (ℓ,w) 独立数是图的独立数的直接推广. 众所周知, 求图的独立数问题是 NP 完备问题 [122]. 因此求 (ℓ,w) 独立数问题显然也是 NP 完备问题.

由于假定这本书中涉及的图都是简单图, 所以当 $w > 1$ 时, 参数 $\alpha_{1,w}(G)$ 没有意义. 所以, 在以下的讨论中, 当提到参数 $\alpha_{\ell,w}(G)$ 时, 如果 $w > 1$, 那么总假定 $\ell \geqslant 2$.

为了解释这些概念, 考虑几个简单的例子.

设 $P_{t(\ell+1)+1}=\{x_0,\cdots,x_{\ell+1},\cdots,x_{2(\ell+1)},\cdots,x_{t(\ell+1)}\}$ 是有 $t(\ell+1)+1$ 个顶点的路. 它的 $(\ell,1)$ 独立数 $\alpha_{\ell,1}(P_{t(\ell+1)+1})=t+1$, 且 $I=\{x_{i(\ell+1)}:\ 0\leqslant i\leqslant t\}$ 是最大 $(\ell,1)$ 独立集. 一般地, 对于路 P_n 和圈 C_n,

$$\alpha_{\ell,1}(P_n)=\alpha_{\ell,1}(C_n)=\left\lfloor\frac{n}{\ell+1}\right\rfloor.$$

容易看到

$$\alpha_{1,1}(K_{3,3})=3;$$
$$\alpha_{2,2}(K_{3,3})=\alpha_{2,3}(K_{3,3})=2;$$
$$\alpha_{3,2}(K_{3,3})=\alpha_{3,3}(K_{3,3})=1.$$

定理 15.1.1 对 w 连通图 G,

(a) $\alpha_{\ell,w}(G)\geqslant 1$, 等号成立当且仅当 $d_w(G)\leqslant\ell$;

(b) 如果 H 是 G 中 w 连通支撑子图, 那么 $\alpha_{\ell,w}(G)\leqslant\alpha_{\ell,w}(H)$;

(c) 如果 G 是 $(w+1)$ 连通的, 那么 $\alpha_{\ell,w}(G)\leqslant\alpha_{\ell,w+1}(G)$;

(d) $\alpha_{\ell+1,w}(G)\leqslant\alpha_{\ell,w}(G)$.

证明 结论 (a) 成立是显然的. 假定 H 是 G 中 w 连通支撑子图, I 是 G 中最大 (ℓ,w) 独立集. 如果 $\alpha_{\ell,w}(G)=1$, 那么

$$\alpha_{\ell,w}(G)=1\leqslant\alpha_{\ell,w}(H),\ \text{且}\ \alpha_{\ell,w}(G)=1\leqslant\alpha_{\ell,w+1}(G).$$

下面假定 $\alpha_{\ell,w}(G)\geqslant 2$. 由 I 的选取知, 对 I 中任何两顶点 x 和 y, 有 $d_w(G;x,y)>\ell$. 因此,

$$d_w(H;x,y)\geqslant d_w(G;x,y)>\ell,\ \text{且}\ d_{w+1}(G;x,y)\geqslant d_w(G;x,y)>\ell.$$

这意味着 I 是 H 的 (ℓ,w) 独立集, 是 G 中 $(\ell,w+1)$ 独立集. 于是,

$$\alpha_{\ell,w}(G)=|I|\leqslant\alpha_{\ell,w}(H),\ \alpha_{\ell,w}(G)=|I|\leqslant\alpha_{\ell,w+1}(G).$$

结论 (b) 和 (c) 成立.

现在证明结论 (d). 如果 $\alpha_{\ell+1,w}(G)=1$, 那么 $\alpha_{\ell+1,w}(G)=1\leqslant\alpha_{\ell,w}(G)$. 下面假定 $\alpha_{\ell+1,w}(G)\geqslant 2$. 设 I' 是 G 中最大 $(\ell+1,w)$ 独立集. 由 I' 的选取知, 对 I' 中任何两顶点 x 和 y 有 $d_w(G;x,y)>\ell+1$. 因此, I' 是 G 中 (ℓ,w) 独立集, 且 $\alpha_{\ell+1,w}(G)=|I'|\leqslant\alpha_{\ell,w}(G)$. 结论 (d) 成立. ∎

下面两个结果揭示了 $\alpha_{\ell,w}(G)$ 和 $d_w(G)$ 之间的关系, 属于 Flandrin 和 Li[118].

定理 15.1.2 对任何 $w(\geqslant 2)$ 连通图 G, 有 $d_w(G)<3\alpha_{2,w}(G)$.

证明 因为 $\alpha_{2,w}(G) \geqslant 1$, 所以, 不妨假定 $d_w(G) \geqslant 3$. 设 $x, y \in V(G)$ 使得 $d_w(G;x,y) = d_w(G)$. 于是 G 中存在最小的 xy 路族 $\mathscr{P}_w(G;x,y) = \{P_1, P_2, \cdots, P_w\}$ 使得 $\varepsilon(P_w) \geqslant d_w(G) \geqslant 3$. 令 $P_w = x_0x_1\cdots x_p$, 其中 $x_0 = x$, $x_p = y$, 并令

$$I = \{x_0, x_3, \cdots, x_{3q}\}, \quad q = \left\lfloor \frac{1}{3}p \right\rfloor.$$

因为 $p \geqslant 3$, 所以 $|I| = q + 1 \geqslant 2$. 要证明 I 是 G 中 $(2,w)$ 独立集. (反证) 假定存在 $x_i, x_j \in I$ 使得 $d_w(G;x_i,x_j) \leqslant 2$. 因为 $w \geqslant 2$, 所以 $d_w(G;x_i,x_j) = 2$. 不妨设 $xy \notin E(G)$ 如果 $y \in I$. 对 $s = 1, 2, \cdots, w$, 令 $R_s = x_iz_sx_j$ 是 w 条内点不交且长为 2 的 x_ix_j 路. 令 $Z = \{z_1, z_2, \cdots, z_w\}$. 则由 $\mathscr{P}_w(G;x,y)$ 的最小性得,

$$|V(P_i) \cap Z| \leqslant 1, \ \forall\, i = 1, 2, \cdots, w-1.$$

因此, 至少存在 $z_s \in Z$ 使得 $z_s \in A = V(G) \setminus V(P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_w)$. 这意味着 x_i 和 x_j 在 A 中有公共顶点, 但这矛盾于定理 14.1.1 (b). 因此, I 是 G 中 $(2,w)$ 独立集. 于是

$$\alpha_{2,w}(G) \geqslant |I| = 1 + q > \frac{1}{3}p.$$

由此得 $d_w(G) = p < 3\alpha_{2,w}(G)$. ∎

定理 15.1.3 设 G 是 $w\ (\geqslant 2)$ 连通图. 如果 $\ell > 2 + \left\lfloor \frac{1}{w-1} \right\rfloor$, 那么

$$d_w(G) < (w\ell - 2w + 1)\alpha_{\ell,w}(G).$$

证明 设 $x, y \in V(G)$ 使得 $d_w(G;x,y) = d_w(G)$. 于是 G 中存在最小 xy 路族 $\mathscr{P}_w(G;x,y) = \{P_1, P_2, \cdots, P_w\}$ 使得 $\varepsilon(P_w) \geqslant d_w(G)$. 令 $P_w = x_0x_1\cdots x_p$, 其中 $x_0 = x$, $x_p = y$.

(反证) 假定 $d_w(G) \geqslant (w\ell - 2w + 1)\alpha_{\ell,w}(G)$. 令 $s = w\ell - 2w + 1$. 由假定有

$$\ell \geqslant 3 + \left\lfloor \frac{1}{w-1} \right\rfloor > 2 + \frac{1}{w-1}.$$

由此得 $s = w\ell - 2w + 1 > \ell$. 令

$$I = \{x_0, x_s, x_{2s}, \cdots, x_{qs}\}, \quad 其中\ q = \left\lfloor \frac{p}{s} \right\rfloor.$$

则

$$|I| = 1 + q > \frac{p}{s} \geqslant \frac{d_w(G)}{w\ell - 2w + 1} \geqslant \alpha_{\ell,w}(G).$$

这意味着 $|I| \geqslant 2$, 且 I 不是 G 中 (ℓ,w) 独立集. 因此, 必存在 $x_i, x_j \in I$ 和 w 条内点不交且长至多为 ℓ 的 x_ix_j 路 $T_1, T_2, \cdots, T_w$.

首先证明

$$T_t \cap (P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_{w-1}) \neq \emptyset, \ \forall\, t = 1, 2, \cdots, w. \tag{15.1.1}$$

事实上, 如果存在 t $(1\leqslant t\leqslant w)$ 使得 $T_t\cap(P_1\cup P_2\cup\cdots\cup P_{w-1})=\emptyset$, 那么令 $P_w^*=P_w(x,x_i)\cup T_t\cup P_w(x_j,y)$. 不难看出 $P_1,\cdots,P_{w-1},P_w^*$ 是内点不交的, 且

$$\begin{aligned}\varepsilon(P_w^*)&=\varepsilon(P_w)-\varepsilon(P_w(x_i,x_j))+\varepsilon(T_t)\\&\leqslant\varepsilon(P_w)-s+\ell<\varepsilon(P_w).\end{aligned}$$

这矛盾于 $P_1,\cdots,P_w$ 的选取, 式 (15.1.1) 得证. 令

$$G_{xy}=P_1\cup\cdots\cup P_{w-1}\cup P_w(x,x_i)\cup P_w(x_j,y)\cup T_1\cup\cdots\cup T_w,$$

并令 S_{xy} 是 G_{xy} 的 (x,y) 点割. 易知 $|S_{xy}|\geqslant w$. 由 Menger 定理知, G_{xy} 中存在 w 条内点不交的 xy 路 $P_1',\cdots,P_w'$.

由式 (15.1.1), 不妨设

$$Z=\{z\in V(T_t\cap P_r)\neq\emptyset,\ 1\leqslant t\leqslant w,\ 1\leqslant r\leqslant w-1\}.$$

则 $|Z|\geqslant w$, 与 $z\in Z$ 关联的 4 条边中, 至少有 2 条不在 $P_0'\cup\cdots\cup P_w'$ 中. 于是, $P_1\cup\cdots\cup P_{w-1}\cup T_1\cup\cdots\cup T_w$ 中至少有 $2w$ 条边不含在 $P_1'\cup\cdots\cup P_w'$ 中. 因为 $\varepsilon(P_w(x_i,x_j))=s>\ell$ 且 $\varepsilon(T_1\cup\cdots\cup T_w)\leqslant w\ell$, 所以

$$\begin{aligned}&\varepsilon(P_1')+\cdots+\varepsilon(P_w')\\&\leqslant\varepsilon(G_{xy})-2w\\&\leqslant\varepsilon(P_1)+\cdots+\varepsilon(P_w)-\varepsilon(P_w(x_i,x_j))+\varepsilon(T_1)+\cdots+\varepsilon(T_w)-2w\\&\leqslant\varepsilon(P_1)\cdots+\varepsilon(P_w)-s+w\ell-2w\\&=\varepsilon(P_1)\cdots+\varepsilon(P_w)-(w\ell-2w+1)+w\ell-2w\\&=\varepsilon(P_1)\cdots+\varepsilon(P_w)-1.\end{aligned}$$

这矛盾于 $P_1,\cdots,P_w$ 的选取, 故定理得证明. ∎

§15.2 (ℓ,w) 控制数

设 G 是 w $(\geqslant 1)$ 连通图, $\emptyset\neq S\subset V(G)$, 且 $y\in V(G-S)$. 从 y 到 S 中某顶点的路称为 (y,S) 路. w 条内点不交 (y,S) 路集记为 $\mathscr{P}_w(G;y,S)$. $\mathscr{P}_w(G;y,S)$ 中路的最大长度称为 $\mathscr{P}_w(G;y,S)$ 的长. 对任何给定的整数 l $(\geqslant 1)$, 如果存在长度至多为 ℓ 的 (y,S) 路集 $\mathscr{P}_w(G;y,S)$, 那么称 S 能 (ℓ,w) 控制 y. 如果 S 能 (ℓ,w) 控制 $G-S$ 中每个顶点, 那么称 S 为 G 中 (ℓ,w) 控制集. 用记号 $\mathscr{S}_{\ell,w}(G)$ 表示 G 中所有 (ℓ,w) 控制集的族. 参数

$$\gamma_{\ell,w}(G)=\min\{|S|:\ S\in\mathscr{S}_{\ell,w}(G)\}$$

称为 G 中 (ℓ,w) 控制数. G 中 (ℓ,w) 控制集 S 称为最小的, 如果 $|S|=\gamma_{\ell,w}(G)$.

例如, $\gamma_{\ell,2}(C_n)=\left\lfloor\frac{n}{\ell+1}\right\rfloor$, 其中 C_n 是 $n\ (\geqslant \ell+1)$ 阶无向圈. $\gamma_{3,4}(Q_4)=\gamma_{4,4}(Q_4)=2$, 其中 Q_4 是 4 维超立方体, $\{0100, 1011\}$ 是 Q_4 的 $(3,4)$ 控制集, 也是 $(4,4)$ 控制集 (参见图 4.1).

(ℓ,w) 控制数被用来度量网络中资源共享的可靠性. 例如, 设 w 连通图 G 表示一个实时并行处理系统网络, S 是 G 中一个 (ℓ,w) 控制集. 如果我们置网络资源于 S 代表的计算机中, 那么 $V(G)\setminus S$ 中每个计算机 y 通过 w 条内点不交且长不超过 ℓ 的 (y,S) 路来分享网络资源. S 中的计算机能控制该系统中所有的资源. 为安全起见, 能储存系统所有资源的计算机数目要尽可能的少. 这个最小数目就是 (ℓ,w) 控制数. 因此, 对于给定的 w 连通图 G 和正整数 ℓ, 确定 (ℓ,w) 控制数 $\gamma_{\ell,w}(G)$ 有非常重要的意义.

确定 (ℓ,w) 控制数的问题是由 Li 和 Xu[209] 首先提出来的. 显然, $(1,1)$ 控制数就是图论中经典的控制数. 因此, (ℓ,w) 是经典控制数的直接推广. 因为, 确定经典的控制数问题是 NP 完备问题 [122], 所以, 确定 (ℓ,w) 控制数问题当然也是 NP 完备问题. 于是, 确定某些特殊的图类的 (ℓ,w) 控制数和得到 (ℓ,w) 控制数某些紧的上界是有意义的. Li 和 Xu[209] 获得: 对于 2 连通图无向图 G,

$$\gamma_{\ell,2}(G)\leqslant\frac{2n}{\ell}.$$

下面的定理给出 $\gamma_{\ell,w}(G)$ 上界的某些基本结果.

定理 15.2.1 设 G 是 n 阶 w 连通图, $\ell\ (\geqslant 1)$ 是正整数. 那么

(a) $\gamma_{\ell,w}(G)\geqslant 1$, 且若 $d_w(G)\leqslant\ell$, 则等号成立;

(b) $\gamma_{\ell,w}(G)\leqslant\alpha_{\ell,w}(G)$;

(c) $\gamma_{2,2}(G)\leqslant\alpha(G)$;

(d) $\gamma_{\ell+1,w}(G)\leqslant\gamma_{\ell,w}(G)$;

(e) $\gamma_{\ell,w}(G)\leqslant\gamma_{\ell,w+1}(G)$ 如果 G 是 $(w+1)$ 连通的;

(f) $\gamma_{\ell,w}(G)\leqslant\gamma_{\ell,w}(H)$ 如果 H 是 G 的 w 连通支撑子图;

(g) $\gamma_{\ell-1,2}(G)\leqslant n-\ell+1$ 如果 $\ell=d(G)$.

证明 结论 (a) 显然成立. 令 S 是 G 中最大 (ℓ,w) 独立集. 则对任何 $y\in V(G)\setminus S$, 存在 $x\in S$ 使得 $d_w(G;x,y)\leqslant\ell$. 这意味着 G 中存在一个长度至多为 ℓ 的 (y,S) 路集 $\mathscr{P}_w(G;y,S)$, 即, $S\in S_{\ell,w}(G)$. 因此, $\gamma_{\ell,w}(G)\leqslant|S|=\alpha_{\ell,w}(G)$. 这证明了结论 (b).

设 G 是 n 阶 2 连通图, 则 $n\geqslant 3$. 如果 G 是完全图 K_n, 那么, K_n 中每个顶点都是一个 $(2,2)$ 控制集, 即, $\gamma_{2,2}(K_n)=1=\alpha(K_n)$. 下面, 假定 G 不是完全图, 并设 S 是 G 中最大独立集. 则 $|S|\geqslant 2$. 我们将证明 S 是 G 中 $(2,2)$ 控制集. 为此, 只需要证明: 对任何 $y\in V(G)\setminus S$, G 中存在 2 条内点不交且长不超过 2 的 (y,S) 路.

如果 $|N_G(y)\cap S|\geqslant 2$, 取 $x,z\in N_G(y)\cap S$, 那么 $yx, yz\in E(G)$ 是 G 中 2 条内点不交且长为 1 的 (y,S) 路. 下面, 假定 $N_G(y)\cap S=\{x\}$. 令 $z\in S$, 且 $z\neq$

x. 因为 G 是2 连通的, 所以 G 中存在一条 (y,z) 路 P, 它不经过 x. 令 $P = yz_1z_2\cdots z_mz$ $(m \geqslant 1)$. 因为 $z_1 \notin S$ 且 S 是 G 中最大独立集, 所以存在 $u \in S$ 使得 $uz_1 \in E(G)$. 因此, $R_1 = yx$ 和 $R_2 = yz_1u$ 是 G 中 2 条内点不交且至多为 2 的 (y,S) 路. 结论 (c) 得证. ∎

由 (ℓ,w) 控制数的定义, 结论 (d), (e) 和 (f) 显然成立. 现在证明结论 (g). 设 $d(G) = \ell$, 并设 $x,y \in V(G)$ 使得 $d(G;x,y) = \ell$ 且 $P = xx_1\cdots x_{\ell-1}y$ 是 G 中最短 (x,y) 路. 则 $\{x,y\}$ 能 $(\ell-1,2)$ 控制 P 中每个顶点. 令 $S = V(G)\setminus\{x_1,\cdots x_{\ell-1}\}$. 则 S 是 G 中 $(\ell-1,2)$ 控制集. 因此, $\gamma_{\ell-1,2}(G) \leqslant |S| = n-\ell+1$. 结论 (g) 得证. ∎

定理 15.2.2 设 G 是 n 阶 w 连通图, $S \subset V(G)$, $p = \lfloor \frac{1}{3}\ell \rfloor$. 如果 $\ell > 3p$, 任何 $p+1$ 个顶点独立集 $I \subseteq V(G)\setminus S$ 满足条件

$$\sum_{x\in I} d_G(x) \geqslant n + (w-2)p - |S| + 1, \tag{15.2.1}$$

那么 S 是 G 中 (ℓ,w) 控制集.

证明 (反证) 假定 S 不是 G 中 (ℓ,w) 控制集, 则存在 $y \in V(G)\setminus S$ 使得任何 (y,S) 路集的长度大于 ℓ. 令 $\mathscr{P}_w(G;y,S) = \{P_1,P_2,\cdots,P_w\}$ 是最小 (y,S) 路集. 不妨设 $P_w = x_0x_1\cdots x_q$ 是 $\mathscr{P}_w(G;y,S)$ 中最长路, 其中 $x_0 = y$, $x_1,\cdots,x_{q-1} \notin S, x_q \in S$ 且 $q \geqslant \ell+1$. 考虑集

$$I = \{x_{3i}:\ 0 \leqslant i \leqslant p\}.$$

则 $|I| = p+1$. 因为 $\ell > 3p$, 所以 $I \cap S = \emptyset$. 由 P_w 的选取知 $I \subseteq V(G)\setminus S$ 是由 $p+1$ 个顶点组成的独立集. 我们要证明 I 不满足条件 (15.2.1).

令 $N_S(x_i) = N_G(x_i) \cap S$ 且 $N_P(x_i) = N_G(x_i) \cap V(P_w)$. 因为 $q \geqslant \ell+1 > 3p$, 所以

$$N_S(x_{3i}) = \varnothing,\ \forall\ i = 0,1,\cdots,p;$$

$$|N_P(x_0)| = 1,\ |N_P(x_{3i})| = 2,\ \forall\ i = 1,2,\cdots,p.$$

因此, I 与 P_w 之间的边数为

$$\sum_{i=0}^{p} d_{P_w}(x_{3i}) = 1 + 2p \leqslant q - |I| + 1. \tag{15.2.2}$$

令 $A = V(G-S)\setminus V(P_1\cup\cdots\cup P_w)$, 则由定理 4.4.1 (b) 知, I 中任何两顶点在 A 中无公共邻点. 于是, I 与 A 之间的边数为

$$\sum_{i=0}^{p} d_A(x_{3i}) \leqslant |A| = n - |S| - \sum_{t=1}^{w}(\varepsilon(P_t) - 1) - 1. \tag{15.2.3}$$

由定理 4.4.1 (c) 知, I 与 P_t $(1 \leqslant t \leqslant w-1)$ 的边数为

$$\sum_{i=0}^{p} d_{P_t}(x_{3i}) \leqslant \varepsilon(P_t) + |I| - 2,\ ((1 \leqslant t \leqslant w-1). \tag{15.2.4}$$

令 $B = P_1 \cup \cdots \cup P_{w-1}$, 则由式 (15.2.4) 知, I 与 B 之间的边数为

$$\sum_{i=0}^{p} d_B(x_{3i}) \leqslant \sum_{t=1}^{w-1} \varepsilon(P_t) + (w-1)(|I|-2). \tag{15.2.5}$$

由式 (15.2.3), (15.2.4) 和 (15.2.5), 得

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{p} d_G(x_{3i}) &\leqslant n + (w-2)(|I|-1) - |S| \\ &= n + (w-2)p - |S|.\end{aligned}$$

这矛盾于条件 (15.2.1). 定理得证. ∎

对于给定的 ℓ 和 w 连通图 G, 由定理 15.1.1 (a) 和定理 15.2.1 (a) 有

$$\gamma_{\ell,w}(G) = 1, \quad 如果\ \ell \geqslant d_w(G).$$

由此和 14.6 节的结果, 只要 $\ell \geqslant d_w(G)$, 立即得到某些 w 连通图 G 中 $\gamma_{\ell,w}(G) = 1$. 对于这样的 w 连通图 G, 有意义的是当 $\ell < d_w(G)$ 时, 确定 $\gamma_{\ell,w}(G)$ 的值. 至今, 我们知道的结果还很少, 有兴趣的读者可参见文献 [209,230,231,232,283,334].

§15.3 距离独立数与距离控制数

这一节考虑 $w = 1$ 的特殊情形. 文献中称连通图 G 中 $(\ell,1)$ 独立数和 $(\ell,1)$ 控制数为 *ℓ 距离独立数* (distance independence number) 和 *ℓ 距离控制数* (distance dominating number), 简称为 *ℓ 独立数*和 *ℓ 控制数*, 分别记为 $\alpha_\ell(G)$ 和 $\gamma_\ell(G)$.

由定理 15.1.1 (b) 和定理 15.2.1 (f) 知, 如果 T 是 G 的支撑树, 那么

$$\alpha_\ell(G) \leqslant \alpha_\ell(T), \ \gamma_\ell(G) \leqslant \gamma_\ell(T). \tag{15.3.1}$$

定理 15.3.1 (Meir 和 Moon [241]) 设 G 是 n 阶连通图. 如果 $n \geqslant \lfloor \frac{1}{2}(\ell+3) \rfloor$, 那么

$$\alpha_\ell(G) \leqslant \begin{cases} \lfloor \frac{2n}{\ell+2} \rfloor, & 如果\ \ell\ 是偶数; \\ \lfloor \frac{2n-2}{\ell+1} \rfloor, & 如果\ \ell\ 是奇数. \end{cases}$$

证明 如果 $\ell \geqslant d(G)$, 那么 $\alpha_\ell(G) = 1$. 结论成立. 下面假定 $\ell < d(G)$. 则 $\alpha_\ell(G) \geqslant 2$. 设 I 是 G 中最大 ℓ 独立集, 则 $|I| = \alpha_\ell(G) \geqslant 2$. 设 $j = \lfloor \frac{1}{2}\ell \rfloor$, 则对 I 中任何两顶点 x 和 y 均有 $d(G;x,y) > \ell \geqslant 2j$. 令

$$J_j(x) = \{u \in V(G):\ d(G;x,u) \leqslant j\},\ \forall\, x \in I.$$

因为 I 是 G 中 ℓ 独立集, 且对任何 $x,y \in I$ 有 $d(G;x,y) > 2j$, 所以对每个 $i = 0,1,2,\cdots,j$ 均有 $J_i(x) \neq \emptyset$. 于是,

$$|J_j(x)| \geqslant j+1,\ \forall\, x \in I, \tag{15.3.2}$$

而且有

$$J_i(x) \cap J_k(y) = \emptyset,\ \forall\, x,y \in I, x \neq y, 1 \leqslant i,k \leqslant j. \tag{15.3.3}$$

事实上, 如果存在某个 $u \in J_i(x) \cap J_k(y)$, 那么能导出如下矛盾:

$$\ell < d(G;x,y) \leqslant d(G;x,u) + d(G;u,y) \leqslant 2j \leqslant \ell.$$

由式 (15.3.2) 和式 (15.3.3) 得

$$n \geqslant \sum_{x\in I} |J_j(x)| \geqslant (j+1)|I|. \tag{15.3.4}$$

由式 (15.3.4) 知, 如果 $\ell = 2j$, 那么

$$\alpha_\ell(G) = |I| \leqslant \left\lfloor \frac{n}{j+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2n}{\ell+2} \right\rfloor.$$

这就是要证的上界. 下面假定 $\ell = 2j+1$. 首先断言: 对任何 $x,y \in I$ 和 $1 \leqslant i \neq k \leqslant j$, $J_i(x)$ 和 $J_k(y)$ 之间无边相连. 事实上, 如果存在 $u \in J_i(x)$ 和 $v \in J_k(y)$ 使得 $uv \in E(G)$, 那么能导出如下矛盾:

$$\ell < d(G;x,y) \leqslant d(G;x,u) + d(G;u,v) + d(G;v,y) \leqslant 2j+1 = \ell.$$

这个事实说明: 存在 $z \in V(G)$ 使得 z 不含在任何 $J_i(x)$ $(\forall\, x \in I, 0 \leqslant i \leqslant j)$ 中. 因此, 由式 (15.3.2) 和式 (15.3.3) 得

$$n \geqslant 1 + \sum_{x\in I} |J_j(x)| \geqslant 1 + (j+1)|I|. \tag{15.3.5}$$

由式 (15.3.5) 知, 如果 $\ell = 2j+1$, 那么

$$\alpha_\ell(G) = |I| \leqslant \left\lfloor \frac{n-1}{j+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2n-2}{\ell+1} \right\rfloor.$$

定理得证. ∎

定理 15.3.1 给出的 α_ℓ 的上界是可以达到的, 而且也给出了 $\gamma_\ell(G)$ 的上界. 下面的定理给出 $\gamma_\ell(G)$ 的更好的上界.

定理 15.3.2 (田方和徐俊明 [293]) 设 G 是每个连通分支至少有 $\ell+1$ 个顶点的图, 则

$$\gamma_\ell(G) \leqslant \left\lfloor \frac{p}{\ell+1} \right\rfloor.$$

这个上界是可以达到的.

证明 先假定 G 是树. 如果 $v(G) \leqslant 2\ell+1$, 那么结论显然成立. 假定结论对所有阶数不超过 n 的树都成立. 令 T 是树, $v(T) = n+1$, $n \geqslant 2\ell+1$, $P =$

$u_0, u_1, u_2, \cdots, u_m$ 是 T 中最长路. 如果 $m \leqslant \ell$, 那么 T 中任何顶点都是 T 中 ℓ 控制集, 即 $\gamma_\ell(T) = 1 \leqslant \lfloor \frac{n+1}{\ell+1} \rfloor$.

下面假定 $m \geqslant \ell+1$, 并令 T' 是 $T - \{u_{m-\ell}, \cdots, u_{m-1}, u_m\}$ 中包含 u_0 的连通分支. 如果 $v(T') \leqslant \ell$, 那么顶点 $u_{m-\ell}$ 是 T 中最小 ℓ 控制集. 如果 $v(T') \geqslant \ell+1$, 那么由归纳假设有,

$$\gamma_\ell(T') \leqslant \left\lfloor \frac{n-\ell}{\ell+1} \right\rfloor.$$

令 D 是 T' 中最小 ℓ 控制集, 则 $D \cup \{u_{m-\ell}\}$ 是 T 中 ℓ 控制集. 因此,

$$\gamma_\ell(T) \leqslant \left\lfloor \frac{n-\ell}{\ell+1} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n+1}{\ell+1} \right\rfloor.$$

所以, 对任何 p 阶树 T, 有 $\gamma_\ell(T) \leqslant \lfloor \frac{p}{\ell+1} \rfloor$.

令 $\mathscr{H}$ 是 G 中连通分支集, $H \in \mathscr{H}$, T 是 H 的支撑树. 由式 (15.3.1), $\gamma_\ell(H) \leqslant \gamma_\ell(T)$. 由假定, $v(H) \geqslant \ell+1$. 因此,

$$\gamma_\ell(G) = \sum_{H \in \mathscr{H}} \gamma_\ell(H) \leqslant \sum_{H \in \mathscr{H}} \left\lfloor \frac{v(H)}{\ell+1} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{p}{\ell+1} \right\rfloor.$$

现在构造例子说明上界可以达到. 对于给定的正整数 m, 令 H 是 m 阶图, G 是在 H 的每个顶点 x_i 上接上长为 ℓ 的路 P_i 后得到的图. 则 $v(G) = p = m(\ell+1)$. 一方面, G 中任何 ℓ 控制集必含路 $P_i\ (i = 1, 2, \cdots, m)$ 上的顶点, 所以 $\gamma_\ell(G) \geqslant m = \frac{p}{\ell+1}$. 另一方面, $V(H)$ 是 G 中 ℓ 控制集, 所以 $\gamma_\ell(G) \leqslant v(H) = m = \frac{p}{\ell+1}$. 定理得证. ∎

推论 (Meir 和 Moon [241]) 设 G 是 n 阶连通图. 如果 $n \geqslant \ell+1$, 那么

$$\gamma_\ell(G) \leqslant \left\lfloor \frac{n}{\ell+1} \right\rfloor$$

下面的定理给出了 $\alpha_\ell(G)$ 与 $\gamma_\ell(G)$ 之间的关系.

定理 15.3.3 $\alpha_{2\ell}(G) \leqslant \gamma_\ell(G)$ 对任何连通图 G 成立.

证明 如果 $\ell \geqslant d(G)$, 那么 $\alpha_{2\ell}(G) = 1 = \gamma_\ell(G)$, 定理成立. 下面假定 $\ell < d(G)$. 于是, $\alpha_{2\ell}(G) \geqslant 1$ 且 $\gamma_\ell(G) \geqslant 2$.

如果 $2\ell \geqslant d(G)$, 那么 $\alpha_{2\ell}(G) = 1 < 2 \leqslant \gamma_\ell(G)$, 定理成立. 下面假定 $2\ell < d(G)$. 于是, $\alpha_{2\ell}(G) \geqslant 2$. 设 I 是 G 中最大 2ℓ 独立集, S 是 G 中最小 ℓ 控制集. 考虑集

$$J_\ell(x) = \{u \in V(G):\ d(G; x, u) \leqslant \ell\},\ \forall\, x \in V(G).$$

因为 $J_\ell(x)$ 中任何两顶点之间的距离最多为 2ℓ, 所以, $|J_\ell(x) \cap I| \leqslant 1$, $x \in V(G)$.

另一方面, 因为 $\alpha_{2\ell}(G) \geqslant 2$ 且对任何 $y, y' \in I\ (y \neq y')$ 有 $d(G; y, y') > 2\ell$, 所以存在 $x, x' \in S$ 使得 $y \in J_\ell(x)$, $y' \in J_\ell(x')$ 且 $x \neq x'$. 这意味着

$$\alpha_{2\ell}(G) = |I| \leqslant |S| = \gamma_\ell(G).$$

定理得证. ∎

Meir 和 Moon [241] 还进一步证明了定理 15.3.3 中的等号对任何树是成立的.

定理 15.3.4 $\alpha_{2\ell}(T)=\gamma_\ell(T)$ 对任何树 T 成立.

证明 由定理 15.3.3, 只需证明

$$\alpha_{2\ell}(T)\geqslant\gamma_\ell(T). \tag{15.3.6}$$

对于给定的 ℓ, 如果 $n\leqslant 2\ell$, 那么对任何 n 阶树 T 有 $\alpha_{2\ell}(T)=1=\gamma_\ell(T)$. 对树的阶 $n(>2\ell)$ 用归纳法来证明式 (15.3.6). 假定式 (15.3.6) 对阶小于 n 的任何树 T' 成立. 令 T 是阶 n 的树, $d(T)=m$ 且 $P=x_0x_1\cdots x_m$ 是 T 中最长路.

如果 $2\ell\geqslant m$, 那么 $\alpha_{2\ell}(T)=1=\gamma_\ell(T)$. 下面, 假定 $2\ell<m$. 令

$$Z=\{z\in V(T):\ d(T;x_\ell,z)>\ell\}.$$

则因为 $d(T;x_\ell,x_m)>\ell$, 所以 $Z\neq\emptyset$. 对任何 $z\in Z$, 用 P_z 表示 T 中唯一的 $x_\ell z$ 路. 因为 P 是 T 中最长路, 所以容易看到 P_z 不含 $\{x_0,x_1,\cdots,x_{\ell-1}\}$ 中顶点, 但必含边 $x_\ell x_{\ell+1}$. 令

$$T'=\bigcup_{z\in Z}P_z\setminus\{x_\ell\}.$$

则 T' 是 T 的子树, 且阶小于 n. 由归纳假设有

$$\alpha_{2\ell}(T')\geqslant\gamma_\ell(T'). \tag{15.3.7}$$

设 S' 是 T' 的最小 ℓ 控制集. 则 $S=S'\cup\{x_\ell\}$ 是 T 的 ℓ 控制集. 于是,

$$\gamma_\ell(T)\leqslant|S|=1+\gamma_\ell(T'). \tag{15.3.8}$$

现在证明

$$\alpha_{2\ell}(T)\geqslant 1+\alpha_{2\ell}(T'). \tag{15.3.9}$$

事实上, 如果 $\alpha_{2\ell}(T')=1$, 那么

$$\alpha_{2\ell}(T)\geqslant 2=1+1=1+\alpha_{2\ell}(T').$$

下面, 假定 $\alpha_{2\ell}(T')\geqslant 2$. 设 I' 是 T' 的最大 2ℓ 独立集, 并令 $I=I'\cup\{x_0\}$. 我们证明 I 是 T 中 2ℓ 独立集.

因为对任何 $x,y\in I'$ 有 $d(T;x,y)=d(T';x,y)>2\ell$, 所以 I' 是 T 中 2ℓ 独立集. 为了证明 I 是 T 中 2ℓ 独立集, 只需证明: 对任何 $y\in I'$, $d(T;x_0,y)>2\ell$. 注意到, T 中唯一 x_0y 路必含边 $x_\ell x_{\ell+1}$.

如果 $d(T;x_\ell,y)\leqslant\ell$, 那么存在 $z\in Z$ 和唯一 $x_\ell z$ 路必含 y. 于是, 导出如下矛盾:

$$\begin{aligned}m&=d(T;x_0,x_m)=d(T;x_0,x_\ell)+d(T;x_\ell,x_m)=\ell+d(T;x_\ell,x_m)\\&<d(T;x_\ell,z)+d(T;x_\ell,x_m)<d(T;z,x_m)\leqslant m.\end{aligned}$$

因此, $d(T;x_\ell,y)>\ell$, 且

$$d(T;x_0,y)=d(T;x_0,x_\ell)+d(T;x_\ell,y)>\ell+\ell=2\ell.$$

这意味着 I 是 T 的 2ℓ 独立集. 因此,

$$\alpha_{2\ell}(T)\geqslant 1+|I'|=1+\alpha_{2\ell}(T'),$$

这证明了式 (15.3.9). 由式 (15.3.9), (15.3.7) 和式 (15.3.8) 得

$$\alpha_{2\ell}(T)\geqslant 1+\alpha_{2\ell}(T')\geqslant 1+\gamma_\ell(T')\geqslant\gamma_\ell(T).$$

定理得证. ∎

对于一些特殊的网络的距离控制数, 我们知道的结果也很少. 最近, 田方和徐俊明 [294] 确定了 De Brujin 有向图 $B(d,n)$ 的 2 距离控制数为 $\gamma_2(B(d,k))=\left\lceil\frac{d^k}{d^2+d+1}\right\rceil$.

习 题

15.1 举例说明: 定理 15.3.2 中条件 "每个连通分支至少有 $\ell+1$ 个顶点" 是必要的.

15.2 证明: $\gamma_2(B(d,k))=\left\lceil\frac{d^k}{d^2+d+1}\right\rceil$. (田方和徐俊明 [294])

15.3 设 S 是 G 的 ℓ 控制集. 如果 $G[S]$ 是连通的, 那么称 S 为 G 的连通 ℓ 控制集. 最小连通 ℓ 控制集中的点数称为连通 ℓ 控制数, 记为 $\gamma_\ell^c(G)$. 设 G 是非平凡连通图, 证明: (徐俊明, 田方, 黄佳 [341])

(a) $\gamma_\ell^c(G)=\min\gamma_\ell^c(T)$, 其中 T 是 G 的支撑树;

(b) $\gamma_\ell^c(G)\leqslant\max\{1,n-2\ell-\Delta+2\}$, 其中 n 是 G 的阶;

(c) 设 S 是 G 的 ℓ 控制集, 如果 $G[S]$ 有 h 个连通分支, 那么 $\gamma_\ell^c(G)\leqslant|D|+2(h-1)\ell$.

15.4 图 G 被称为是 γ_ℓ 临界的, 如果对 G 中任何顶点 x 均有 $\gamma_\ell(G-v)<\gamma_\ell(G)$. 设 G 是连通的 γ_ℓ 临界图, 证明: (徐俊明, 田方 [340])

(a) 对任何 $v\in V(G)$ 均有 $\gamma_\ell(G-v)=\gamma_\ell(G)-1$;

(b) 对任何 $v\in V(G)$, $J_\ell(v)$ 中存在两个顶点 x 和 y 使得 $d_G(x,y)>\ell$.

(c) $n\leqslant(\Delta_\ell(G)+1)(\gamma_\ell(G)-1)+1$, 而且如果等号成立, 那么对任何 $x\in V(G)$ 均有 $|J_\ell(x)|=\Delta_\ell(G)$, 其中 n 是 G 的阶, $\Delta_\ell(G)=\max\{|J_\ell(x)|:\ \forall\ x\in V(G)\}$.

(d) 如果 G 的直径为 d, 且 $\gamma_2\geqslant 2$, 那么 $d\leqslant 3(\gamma_2-1)$, 而且这个界可以达到.

第 16 章　互连网络的限制容错分析

我们已经知道连通度和边连通度是网络容错性的重要度量参数. 然而, 这两个参数用来度量网络的容错性有三个明显的缺陷: 第一, 两个网络的连通度 (或边连通度) 即使相同, 它们的可靠性也不一定一样, 因为它们的最小点割 (或最小边割) 的故障概率可能不同. 第二, 这两个参数不能区别按不同方式移去 κ 个点 (或 λ 条边) 后所产生的不同连通分支的情况. 换句话说, 连通度和边连通度不能准确地反映由于处理机或通讯信道损坏造成的系统损坏程度. 第三, 在分析和应用这两个参数时, 我们都不言而喻地假定了系统的任何部件都可能会同时失灵. 然而, 在带有某种类型故障可诊断算法的计算机互连网络中, 人们可以安全地假定网络组件的某些子集是不会同时失灵的. 对于这样的网络, 经典的连通度就不能精确的度量其可靠性了.

为了弥补以上缺陷, 人们很自然的想到对经典连通度的概念加以推广, 以适应网络容错性分析的需要. Harary[141] 于 1983 年首先提出条件连通度的概念, Esfahanian 和 Hakimi[99] 于 1988 年把条件更具体化, 提出了限制连通度的概念. 这些参数能更准确的分析各种互连网络的可靠性. 近几年来, 它们已经引起了许多理论计算机科学工作者和数学工作者的研究兴趣. 这一章介绍在某些限制条件下的连通度概念。

§16.1　网络的限制连通度

设 G 是图, $\mathscr{R}$ 是 $V(G)$ 中给定的非空子集族. $\mathscr{R}$ 中元素为禁错集 (forbidden faulty set). 禁错集的概念是由 Esfahanian[97] 提出来的.

禁错集出现在许多不同的应用中. 例如, 为了计算 n 阶图 G 的连通度 $\kappa(G)$, 需要检验 G 中所有的点割. 如果 $\kappa(G)=k$, 那么 G 中存在 $\binom{n}{k}$ 个不同的 k 元素集. 如果 G 中 κ 点割的数目大大小于 $\binom{n}{k}$, 那么人们可以推广连通度概念, 将每个 κ 点割看成 G 的禁错集, 然后求在这种限制条件下分离 G 需要多少点数.

禁错集概念的另一个应用是在概率模型中, 元件故障是相互独立的, 而且概率不同. 这说明不同等规模的故障集可能有不同的故障概率. 我们可以把其故障小到可以忽略不计的处理器看作是禁错集, 然后可以发现干扰系统功能的究竟是哪些处理器, 这样就可以得到系统可靠性概率的上界.

禁错集的选取依赖于不同的网络拓扑结构, 应用环境和统计分析. 在网络的容错分析中, 禁错集通常被选择为网络中不可能会同时发生故障的处理器集. 根据这个想法, Esfahanian 和 Hakimi[98] 对 Harary[141] 的条件连通度概念加以限制, 提出了限制连通度概念.

设 S 是 $V(G)$ 的非空子集. 对于给定的禁错集 $\mathscr{R}$, 如果 S 不含 $\mathscr{R}$ 中元素

且 $G-S$ 不连通, 那么称 S 为 G 的**限制点割** (restricted vertex-cut), 或 $\mathscr{R}$ **点割** ($\mathscr{R}$-vertex-cut). G 的关于 $\mathscr{R}$ 的**限制连通度** (restricted connectivity), 或 $\mathscr{R}$ **连通度** ($\mathscr{R}$-connectivity), $\kappa^{\mathscr{R}}(G)$, 定义为

$$\kappa^{\mathscr{R}}(G)=\min\{|S|:\ S \text{ 是 } G \text{ 的 } \mathscr{R} \text{ 点割}\}.$$

如果 $\mathscr{R}=\{V(G)\}$, 那么点割没有限制, 限制连通度 $\kappa^{\mathscr{R}}$ 就是经典的连通度 κ. 因此, 限制连通度是经典连通度的推广. 然而, 限制连通度比经典的连通度更能准确的度量互连网络的容错性.

由定义, 限制连通度的存在性依赖于图的结构和禁错集的选取. 显然, 完全图 K_n 中不存在 $\mathscr{R}$ 点割, 无论 $\mathscr{R}$ 怎么选取. 因此, $\kappa^{\mathscr{R}}(K_n)$ 不存在. 事实上, 对于给定的图 G 和禁错集族 $\mathscr{R}$, $\kappa^{\mathscr{R}}(G)$ 的存在性问题还没有解决. 若 $\kappa^{\mathscr{R}}(G)$ 不存在, 则约定 $\kappa^{\mathscr{R}}(G)=\infty$. 因为任何 $\mathscr{R}$ 点割都是点割, 所以下述不等式总成立

$$\kappa(G)\leqslant\kappa^{\mathscr{R}}(G).$$

与限制连通度 $\kappa^{\mathscr{R}}(G)$ 密切相关的是**限制容错直径**概念. G 的关于 $\mathscr{R}$ 的 $(w-1)$ **限制容错直径**, 记为 $D_w^{\mathscr{R}}(G)$, 定义为

$$D_w^{\mathscr{R}}(G)=\min\{d(G-F):\ |F|<w,\ F\cap\mathscr{R}=\emptyset\}.$$

对于给定的禁错集 $\mathscr{R}$, 如果存在整数 w 使得 $D_w^{\mathscr{R}}(G)$ 存在, 那么 $\kappa^{\mathscr{R}}(G)$ 存在而且 $\kappa^{\mathscr{R}}(G)\geqslant w$. 因此, $\kappa^{\mathscr{R}}(G)$ 是使得 $D_w^{\mathscr{R}}(G)$ 存在的最大数 w. 这个思想能确定某些特殊的图 G 关于某些特殊禁错集 $\mathscr{R}$ 的限制连通度 $\kappa^{\mathscr{R}}(G)$ 的下界.

为了使限制连通度的概念有研究意义, 以下讨论一个特殊的禁错集族:

$$\mathscr{R}=\{N_G(x):\ \forall\ x\in V(G)\}.$$

换句话说, 图中每个顶点的邻集是一个禁错集. 这意味着, 网络中与某个处理器相连的处理器不会同时发生故障, 即任何时候任何顶点, 至少有一个非故障邻点. 这样的考虑是符合网络实际的, 因为任何一个互连网络, 与某个处理器相连的处理器同时发生故障的概率是非常小的, 小到可以忽略不计. 为方便起见, 记 $\kappa^{\mathscr{R}}(G)$ 为 $\kappa_r(G)$.

例如, 对于无向圈 $C_n, n\leqslant 5$, $\kappa_r(C_n)$ 不存在, 其他情形均有 $\kappa_r(C_n)=2$.

这个新参数 κ_r 为大规模并行处理系统的容错性提供了一个更准确的度量. 一个基本问题是: 对于给定的图 G, 怎样判定 $\kappa_r(G)$ 的存在性? 如果存在, 又怎样去计算 $\kappa_r(G)$? 目前, 我们既不知道计算 $\kappa_r(G)$ 的任何多项式算法, 也没有关于 $\kappa_r(G)$ 的一般性结果. 即使是特殊的图类, 已知的结果也很少.

对于超立方体 $Q_n, n\geqslant 3$, Esfahanian[97] 和 Litifi[201] 独立证明了 $\kappa_r(Q_n)=2n-2$. 因为 Q_n 中任何两相邻顶点 x 和 y 的邻点集 $(N_{Q_n}(x)\cup N_{Q_n}(y))\setminus\{x,y\}$ 是 $\mathscr{R}$ 点

割, 所以 $\kappa_r(Q_n) \leqslant 2n-2$; 下界 $2n-2$ 是通过证明 $D^{\mathscr{R}}_{2n-2}(Q_n) \leqslant n+6$. Litifi[201] 证明了: $D^{\mathscr{R}}_{2n-2}(Q_n) = n+2$. 徐俊明等 [347] 得到更深刻的结果.

对于 de Brujin 无向图 $UB(2, n)$ 和 Kautz 无向图 $UK(2, n)$, $n \geqslant 3$, 李乔和张翌 [212, 213] 证明了 $\kappa_r(UB(2,n)) = 3, \kappa_r(UK(2,n)) = 4$. 上界很容易得到; 下界是通过证明 $D^{\mathscr{R}}_3(UB(2,n)) \leqslant 8$ 和 $D^{\mathscr{R}}_4(UK(2,n)) \leqslant 14$. 至今还没有确定 $D^{\mathscr{R}}_3(UB(2,n))$ 和 $D^{\mathscr{R}}_4(UK(2, n))$ 的值. 然而, 当 $d \geqslant 3, n \geqslant 3$ 时, 徐俊明和吕敏 [335] 确定了: $\kappa_r(UB(d,n)) = \kappa_r(UK(d,n)) = 4d-4$.

Latifi 等 [203] 将 κ_r 推广到更一般的情形. 设 h 是整数, $0 \leqslant h < \delta = \delta(G)$, 令

$$\mathscr{R}^{(h)} = \{X \subset N_G(x):\ \forall\, x \in V(G),\ |X| > \delta - h\}$$

是禁错集族, 即 G 的顶点子集 $R \in \mathscr{R}^{(h)}$ 当且仅当 R 是某个顶点邻集的真子集, 且 $|R| > \delta - h$. 换句话说, 无论网络什么时候发生故障, G 中的每个顶点至少有 h 个非故障邻点. 显然, G 的点割是 $\mathscr{R}^{(h)}$ 点割当且仅当 $G-S$ 不含度数小于 h 的顶点.

为方便起见, 记 $\kappa^{\mathscr{R}^{(h)}}(G)$ 为 $\kappa_r^{(h)}(G)$. 显然, $\kappa_r^{(0)} = \kappa$ 和 $\kappa_r^{(1)} = \kappa_r$.

对于一般的图或者是特殊的图 G, 确定 $\kappa_r^{(h)}(G)$ 相当困难. 目前, 已知的结果是: Litifi 等 [203] 确定了超立方体 Q_n $(n \geqslant 3)$,

$$\kappa_r^{(h)}(Q_n) = (n-h)\,2^h, \quad \forall\ h,\ 0 \leqslant h \leqslant \left\lfloor \frac{1}{2}n \right\rfloor.$$

Wu 和 Guo[313] 给出了广义超立方体 $Q_n(d)$ 的结果:

$$\kappa_r^{(h)}(Q_n(d)) \geqslant d^m[(n-m-1)(d-1)(s+1)+(d-s-1)],$$

其中

$$h \leqslant (n-2)(d-1), \quad m = \left\lfloor \frac{h}{d-1} \right\rfloor, \quad s \equiv h \bmod (d-1).$$

当 $d=2$ 时, $m=h$ 且 $s=0$. 因为 $Q_n(2)=Q_n$, 所以当 $h \leqslant n-2$ 时, 从上述结果得 $\kappa_r^{(h)}(Q_n) \geqslant 2^h(n-h)$.

§16.2 网络的限制边连通度

这一节考虑禁错边集(forbidden faulty edge-sets). 设 $\mathscr{R}$ 是 G 中的禁错边集族. 非空子集 $B \subset E(G)$ 称为 G 的关于 $\mathscr{R}$ 的限制边割 (restricted edge-cut), 或 $\mathscr{R}$ 边割, 如果 B 不含 $\mathscr{R}$ 中元素, 而且 $G-B$ 不连通. G 的关于 $\mathscr{R}$ 的限制边连通度(restricted edge-connectivity), 或者 $\mathscr{R}$ 边连通度, $\lambda^{\mathscr{R}}(G)$, 定义为:

$$\lambda^{\mathscr{R}}(G) = \min\{|B|:\ B \text{ 是 } G \text{ 中 } \mathscr{R} \text{ 边割}\}$$

显然, 如果$\mathscr{R} = \{E(G)\}$, 边割没有限制, 限制边连通度$\lambda^{\mathscr{R}}(G) = \lambda(G)$. 因此, 限制边连通度$\lambda^{\mathscr{R}}$ 的概念是经典边连通度λ 概念的推广.

这一节考虑关联于一个顶点的边集作为禁错集, 即

$$\mathscr{R} = \{E_G(x) : \ \forall\, x \in V(G)\}.$$

在这种情况下, B 是G 的$\mathscr{R}$ 边割当且仅当$G - B$ 不连通且不含孤立点. 为方便起见, 记$\lambda^{\mathscr{R}}(G)$ 为$\lambda_r(G)$. 设B 是 G 中$\mathscr{R}$ 边割, 如果$|B| = \lambda_r(G)$, 则称B 是λ_r 割 (λ_r-cut).

显然, 星$K_{1,n}$ 和完全图K_3 的限制边连通度λ_r 不存在. 设G 是连通图, 如果G 既不是$K_{1,n}$ 也不是K_3, 则称G 为λ_r 图 (λ_r-graph). 因此, 如果G 是λ_r 图, 那么它的阶至少是4. 下面的定理解决了λ_r 的存在性.

定理 16.2.1 (Esfahanian 和 Hakimi[99]) 对任何λ_r 图G, $\lambda(G) \leqslant \lambda_r(G) \leqslant \xi(G)$.

证明 如果$\lambda_r(G)$ 存在, 那么G 中存在一个λ_r 割B. 因为$G - B$ 不连通, 所以B 是G 中边割. 因此, $\lambda(G) \leqslant |B| = \lambda_r(G)$. 下面证明$\lambda_r(G) \leqslant \xi(G)$.

设$e = xy \in E(G)$ 使得$\xi_G(e) = \xi(G)$. 显然, x 和y 都不是1 度点. 因此, 边集$B = E_G(\{x, y\})$ 是G 的边割, 且$|B| = \xi(G)$. 令$H = G - B$. 如果H 不含孤立点, 那么B 是G 的$\mathscr{R}$ 边割, 而且$\lambda_r(G) \leqslant |B| = \xi(G)$.

如果H 有一个连通分支G_1, 它不含孤立点, 那么$B' = E_G(V(G_1))$ 是G 中边割, 而且$B' \subset B$. 因为$G - B$ 中每个孤立点相邻于x 或者y, 所以$G - B'$ 不含孤立点, 即B' 是G 的$\mathscr{R}$ 边割. 因此, $\lambda_r(G) \leqslant |B'| < |B| = \xi(G)$.

现在假定H 的每个连通分支都含孤立点. 此时, 每个连通分支都只是一个点.

如果$N_{xy} = N_G(x) \cap N_G(y) \neq \emptyset$, 那么或者$d_G(x) \geqslant 3$ 或者$d_G(y) \geqslant 3$, 因为$G \neq K_3$. 不妨设$d_G(y) \geqslant 3$. 任取$z \in N_{xy}$, 则$d_G(z) = 2$. 于是,

$$\begin{aligned} \xi(G) &\leqslant \xi_G(xz) = d_G(x) + d_G(z) - 2 = d_G(x) \\ &< d_G(x) + d_G(y) - 2 = \xi(G), \end{aligned}$$

矛盾. 这意味着$N_{xy} = \emptyset$.

令$N_x = N_G(x) \setminus \{y\}$, $N_y = N_G(y) \setminus \{x\}$. 如果其中之一为空集, 那么$G = K_{1,n}$, 矛盾于假设. 因此$N_x$ 和N_y 都非空. 这意味着边e 是G 中边割. 因此, $\lambda_r(G) = 1 < \xi_G(e) = \xi(G)$. ∎

推论 $\lambda_r(K_n) = 2n - 4 = \xi(K_n)$, $n \geqslant 4$.

证明 显然, 当$n \geqslant 4$ 时, K_n 是λ_r 图. 由定理16.2.1, $\lambda_r(K_n) \leqslant \xi(K_n)$. 令$B = E_G(X)$ 是K_n 中λ_r 割, $X \subset V(K_n)$, $|X| = m$. 那么, 当$m \geqslant 2$ 时, 有

$$2n - 4 \leqslant m(n - m) = |B| = \lambda_r(K_n) \leqslant \xi(K_n) = 2n - 4.$$

推论得证. ∎

如果 G 是 λ_r 图且 $\lambda_r(G)=\xi(G)$, 那么称 G 为 λ_r 优的 (λ_r-optimal); 不是 λ_r 优的图称为 λ_r 非优的 (λ_r-non-optimal).

例如, 当 $n \geqslant 4$ 时, 无向圈 C_n 和完全图 K_n 都是 λ_r 优的. 无向圈 C_3 和完全图 K_2 的笛卡儿乘积 $C_3 \times K_2$ 是 λ_r 非优的, 因为 $\lambda_r(C_3\times K_2)=3<4=\xi(C_3\times K_2)$.

由定理 16.2.1, 如果 G 是 λ_r 图, 那么 $\lambda_r(G)$ 必存在, 而且 $\lambda_r(G) \leqslant \xi(G)$. 一个相当自然的问题是: 给定一个 λ_r 图 G, 确定 $\lambda_r(G)$ 的值. 虽然 Esfahanian 和 Hakimi[99] 已经给出一个求 λ_r 的多项式时间算法, 但确定某些特殊网络的 λ_r 的值和刻划 λ_r 优图的结构特征还是很有意义的. 下面介绍关于 λ_r 的基本结果.

定理 16.2.2 设 G 是 λ_r 图. 则 $\lambda_r(G)=\lambda(G)$ 当且仅当存在 λ 割 $B=E_G(X)$ 使得 $G[X]$ 和 $G[\overline{X}]$ 都是 G 的非平凡连通子图, 其中 $X \subset V(G)$.

证明 假定 $\lambda_r(G)=\lambda(G)$. 那么存在 $X \subset V(G)$ 使得 $B=E_G(X)$, 且 $|B|=\lambda_r$. 因此, $|X| \geqslant 2$ 且 $|\overline{X}| \geqslant 2$. 因为 B 也是 G 的边割且 $|B|=\lambda_r(G)=\lambda(G)$, 即 B 是 λ 割. 因此, $G[X]$ 和 $G[\overline{X}]$ 都是 G 的非平凡连通子图.

反之, 设 $B=E_G(X)$ 是 G 中 λ 割, 其中 $X \subset V(G)$, $G[X]$ 和 $G[\overline{X}]$ 是 G 的非平凡连通子图. 那么 $|X| \geqslant 2$, $|\overline{X}| \geqslant 2$. 因此, 对 $x \in V(G)$, 有 $E_G(x) \not\subset B$. 于是, B 是 G 的 $\mathscr{R}$ 边割且 $\lambda_r(G) \leqslant |B| = \lambda(G)$. 另一方面, 由定理 16.2.1 知, $\lambda(G) \leqslant \lambda_r(G)$. 因此, $\lambda_r(G)=\lambda(G)$. ∎

推论 对任何 λ_r 图 G, 参数 $\delta(G)$, $\lambda(G)$ 和 $\lambda_r(G)$ 之间有下列关系:

(a) 若 $\lambda(G)<\delta(G)$, 则 $\lambda_r(G)=\lambda(G)$;

(b) 若 $\lambda_r(G) \leqslant \delta(G)$, 则 $\lambda_r(G)=\lambda(G)$;

(c) 若 $\lambda_r(G)>\lambda(G)$, 则 $\lambda(G)=\delta(G)$.

证明 设 $B=E_G(X)$ 是 G 的 λ 割, 其中 $X \subset V(G)$..那么 $G[X]$ 和 $G[\overline{X}]$ 是连通的. 如果 $\lambda(G)<\delta(G)$, 那么 $|X| \geqslant 2$ 和 $|\overline{X}| \geqslant 2$. 由定理 16.2.2, $\lambda_r(G)=\lambda(G)$, 结论 (a) 成立.

(b) 由定理 16.2.1, $\lambda(G) \leqslant \lambda_r(G)$. (反证) 假定 $\lambda(G)<\lambda_r(G)$. 因为 $\lambda_r(G) \leqslant \delta(G)$, 所以 $\lambda(G)<\lambda_r(G) \leqslant \delta(G)$. 由结论 (a) 可得, $\lambda(G)<\lambda_r(G)=\lambda(G)$, 矛盾.

(c) (反证) 假定 $\lambda(G)<\delta(G)$. 由 $\lambda_r(G)>\lambda(G)$ 和结论 (a) 有 $\lambda_r(G)=\lambda(G)<\lambda_r(G)$, 矛盾. ∎

定理 16.2.3 设 G 是 n 阶 λ_r 图. 若 $\delta(G) \geqslant \left\lfloor \frac{1}{2}n \right\rfloor + 1$, 则 $\lambda_r(G)=\xi(G)$.

证明 因为 G 是 n 阶 λ_r 图, 所以 $n \geqslant 4$ 而且 G 中存在一个 λ_r 割 $B=E_G(X)$, 其中 $X \subset V(G)$. 不妨设 $m=|X| \leqslant \left\lfloor \frac{1}{2}n \right\rfloor$. 因此, $m \geqslant 2$. 考虑 X 中的两个相邻顶点 x 和 y, 有

$$
\begin{aligned}
\lambda_r(G) = |B| &= \sum_{x \in X} d_G(x) - 2\varepsilon(G[X]) \\
&\geqslant d_G(x) + d_G(y) + (m-2)\delta - m(m-1) \\
&\geqslant \xi(G) + 2 + (m-2)\delta - m(m-1) \\
&= \xi(G) + (m-2)(\delta - 1 - m) \\
&\geqslant \xi(G) + (m-2)\left(\left\lfloor \frac{1}{2}n \right\rfloor - m\right) \geqslant \xi(G).
\end{aligned}
$$

另一方面, 由定理 16.2.1, $\lambda_r(G) \leqslant \xi(G)$. 因此, $\lambda_r(G) = \xi(G)$. ∎

注 定理 16.2.3 被王应前和李乔 ([307, 308]) 改进为: $n(\geq 4)$ 阶图 G 是 λ_r 优的, 如果 G 中任意一对不相邻顶点 x 和 y 满足 $d_G(x) + d_G(y) \geqslant n+1$, 或 G 的直径为 2, $\delta(G) \geqslant 3$ 并且不含三角形. 这个结果又被 Hellwing 和 Volkmann[155] 改进为: λ_r 图 G 是 λ_r 优的, 如果 G 中任何不在三角形上的不相邻两个顶点 x 和 y 满足 $|N_G(x) \cap N_G(y)| \geqslant 2$ 且 G 中的任何两个不相邻顶点 x 和 y, 其中之一在三角形上, 满足 $|N_G(x) \cap N_G(y)| \geqslant 3$. 在文献 [156] 中, Hellwing 和 Volkmann 还给出一些图 G 是 λ_r 优的度序列条件.

为了进一步研究限制边连通度, 下面介绍 λ_r 原子概念.

设 G 是 n 阶 λ_r 图, $B = E_G(X) = (X, \overline{X})$ 是 G 的 λ_r 割. X 和 $\overline{X}$ 称为 G 的*限制边分片* (restricted edge fragments), 或者 *λ_r 分片* (λ_r-fragments). 参数

$$a_r(G) = \min\{|X| : X \text{ 是 } G \text{ 的 } \lambda_r \text{ 分片}\}$$

称为 G 的 *λ_r 原子数* (λ_r-atomic number). 显然, $2 \leqslant a_r(G) \leqslant \lfloor \frac{1}{2}n \rfloor$. 若 λ_r 分片 X 满足 $|X| = a_r(G)$, 则称 X 为 G 的 *λ_r 原子* (λ_r-atom).

定理 16.2.4 设 G 是边正则的 λ_r 图, $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$. 若 X 是 G 的 λ_r 原子, 则 $\sigma(X)$ 亦然.

证明 由定理 3.2.1 知, $G[X] \cong G[\sigma(X)]$. 因为 $G[X]$ 不含孤立点, 所以 $G[\sigma(X)]$ 也不含孤立点.

$$
\begin{aligned}
\lambda_r(G) = d_G(X) &= \sum_{x \in X} d_G(x) - 2\varepsilon(G[X]) \\
&= \sum_{\sigma(x) \in \sigma(X)} d_G(\sigma(x)) - 2\varepsilon(G[\sigma(X)]) = d_G(\sigma(X)),
\end{aligned}
$$

其中第三个等号成立是因为 G 是边正则的. 所以, $\sigma(X)$ 是 G 的 λ_r 原子. ∎

定理 16.2.5 (Xu 和 Xu[344]) λ_r 图 G 是 λ_r 优的当且仅当 $a_r(G) = 2$.

证明 设 G 是 λ_r 图且 $a_r(G) = 2$. 那么存在 λ_r 原子 $X = \{x, y\}$ 使得 $d_G(X) = \lambda_r(G) = \xi_G(xy)$. 由定理 16.2.1, $\xi(G) \leqslant \xi_G(xy) = d_G(X) = \lambda_r(G) \leqslant \xi(G)$. 这意味着 G 是 λ_r 优的.

反之, 假定 G 是 λ_r 优的, 那么存在边 $e=xy$ 使得

$$\lambda_r(G)=\xi(G)=\xi_G(e)=d_G(x)+d_G(y)-2.$$

令 $X=\{x,y\}$. 如果 $G-E_G(X)$ 不含孤立点, 那么 $a_r(G)=2$.

现在证明 $G-E_G(X)$ 不含孤立点. (反证) 假定 u 是 $G-E_G(X)$ 中的孤立点. 因为 u 仅与 X 中点相邻, 所以 $1\leqslant d_G(u)\leqslant 2$.

若 $d_G(u)=1$, 并设 $uy\in E(G)$, 则

$$d_G(x)+d_G(y)-2=\xi(G)\leqslant d_G(u)+d_G(y)-2=d_G(y)-1.$$

这意味着 $d_G(x)=1$. 于是,

$$\begin{aligned}\xi(G)=&\lambda_r(G)\leqslant|\{yz:\ d_G(z)\geqslant 2\}|\leqslant d_G(y)-2\\ &=(d_G(x)+d_G(y)-2)-1=\xi(G)-1,\end{aligned}$$

矛盾.

若 $d_G(u)=2$, 则 $ux,uy\in E(G)$, 且

$$d_G(x)+d_G(y)-2=\xi(G)\leqslant d_G(u)+d_G(y)-2=d_G(y).$$

这意味着 $d_G(x)=2$. 同理, $d_G(y)=2$. 于是, $G=K_3$, 矛盾. ∎

设 X 和 Y 是 $V(G)$ 中两个不交的非空子集. 为方便, 在下面的讨论中, 用 (X,Y) 表示 $E_G[X,Y]$, 即 X 和 Y 之间在 G 中的边集.

引理 16.2.6 (Xu 和 Xu[344]) 设 G 是 λ_r 非优图, F 是 G 的 λ_r 分片, $U\subset F$, 且 I 是 $G-E_G(U)$ 中孤立点集. 如果 $I\subseteq U$ 且 $|(I,\overline{F})|\geqslant|(I,F\setminus U)|$, 那么 $F\setminus I$ 是 G 的 λ_r 分片.

证明 若 $I=\emptyset$, 则结论显然. 下面假定 $I\neq\emptyset$. 令 $Y=F\setminus I$ 且 $F'=F\setminus U$. 因为 $I\subseteq U\subset F$, 所以 $Y\neq\emptyset$ 且 $F'\neq\emptyset$.

设 Z 是 $G-E_G(Y)$ 的孤立点集. 若 $Z=\emptyset$, 则 Y 是 G 的 λ_r 分片. 事实上, 由假定, $|(I,\overline{F})|\geqslant|(I,F')|$ 且

$$\lambda_r(G)\leqslant d_G(Y)=d_G(F)-|(I,\overline{F})|+|(I,F')|\leqslant d_G(F)=\lambda_r(G).$$

这意味着 Y 是 G 的 λ_r 分片. 因此, 当 $Z=\emptyset$ 时, 结论成立.

现在证明 $Z=\emptyset$. (反证) 假定 $Z\neq\emptyset$.

首先证明对任何 $x\in I$, 均有 $(x,\overline{F})\neq\emptyset$. 为此, 令 $I'=\{x\in I:\ (x,\overline{F})=\emptyset\}$. 若 $I'\neq\emptyset$, 则由假定知 $(I,U\setminus I)=\emptyset$, 所以 $N_G(I')\subseteq F'$. 令 $Z'=(Z\cap F')\setminus N_G(I')$, $W=(Y\cup I')\setminus Z'$. 易知 $G-E_G(W)$ 不含孤立点. 于是, $E_G(W)$ 是 G 的 $\mathscr{R}$ 边割. 由

$$|(I\setminus I',\overline{F})|=|(I,\overline{F})|\geqslant|(I,F')|\geqslant|(I',F')|\geqslant|I'|>0,$$

得 $I \setminus I' \neq \emptyset$ 且

$$\begin{aligned}|(I \setminus I', \overline{F})| \geqslant |(I, F')| &\geqslant |(I', F' \setminus Z')| + |(I \setminus I', F' \setminus Z')| \\ &> |(I \setminus I', F' \setminus Z')|.\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}\lambda_r(G) \leqslant d_G(W) &= d_G(F) - |(I \setminus I', \overline{F})| - |(Z', \overline{F})| + |(I \setminus I', F' \setminus Z')| \\ &< d_G(F) - |(Z', \overline{F})| \leqslant d_G(F) = \lambda_r(G).\end{aligned}$$

这个矛盾意味着 $I' = \emptyset$, 即对任何 $x \in I$, 均有 $(x, \overline{F}) \neq \emptyset$. 因此,

$$|(y, I'')| = |N_G(y) \cap I''| \leqslant |(N_G(y) \cap I'', \overline{F})|, \ \forall\, y \in Z,\ I'' \subseteq I. \tag{16.2.1}$$

其次证明 $Z = N_G(I) \cap F'$. 注意到, $I' = \emptyset$, 所以 $Z \subseteq Y$. 因为 Z 是 $G - E_G(F \setminus I)$ 中孤立点集且 $G - E_G(F)$ 不含孤立点, 所以 $Z \subseteq N_G(I)$. 但是, $I \subseteq U$ 是 $G - E_G(U)$ 中孤立点集, 所以 $N_G(I) \cap U = \emptyset$. 因此, $Z \subseteq N_G(I) \cap F'$. 另一方面, 若 $(N_G(I) \cap F') \setminus Z \neq \emptyset$, 则因为 F 是 G 中 $\mathscr{R}$ 分片, 所以 $Y \setminus Z \neq \emptyset$ 且 $G - E_G(Y \setminus Z)$ 不含孤立点. 因为 $I \neq \emptyset$ 且 $\emptyset \neq Z \subseteq N_G(I) \cap F'$, 所以 $(I, Z) \neq \emptyset$. 再由假定的 $|(I, \overline{F})| \geqslant |(I, F')|$, 得

$$\begin{aligned}\lambda_r(G) \leqslant d_G(Y \setminus Z) &= d_G(F) - |(I, \overline{F})| - |(Z, \overline{F})| + |(I, F' \setminus Z)| \\ &< d_G(F) - (|(I, \overline{F})| - |(I, F')|) \leqslant d_G(F) = \lambda_r(G).\end{aligned}$$

这个矛盾意味着 $(N_G(I) \cap F') \setminus Z = \emptyset$. 因此, $Z = N_G(I) \cap F'$.

第三, 显然有 $(z, \overline{F}) \neq \emptyset$ 对任何 $z \in Z$ 成立. 否则, z 是 $G - E_G(U)$ 中的孤立点, 这意味着 $z \in I$, 矛盾. 于是,

$$|(x, Z'')| = |N_G(x) \cap Z''| \leqslant |(N_G(x) \cap Z'', \overline{F})|, \ \forall\, x \in I,\ Z'' \subseteq Z. \tag{16.2.2}$$

最后, 设 $y \in Z$, $x \in N_G(y) \cap I$. 导出矛盾如下:

$$\begin{aligned}\xi(G) &\leqslant d_G(x) + d_G(y) - 2 \\ &= |(x, \overline{F})| + |(x, Z \setminus \{y\})| + |(y, \overline{F})| + |(y, I \setminus \{x\})| \\ &\leqslant |(x, \overline{F})| + |(N_G(x) \cap (Z \setminus \{y\}), \overline{F})| \\ &\qquad + |(y, \overline{F})| + |(N_G(y) \cap (I \setminus \{x\}), \overline{F})| \\ &= (|(x, \overline{F})| + |(N_G(y) \cap (I \setminus \{x\}), \overline{F})| \\ &\qquad + (|(y, \overline{F})| + |(N_G(x) \cap (Z \setminus \{y\}), \overline{F})|) \\ &= |(N_G(y) \cap I), \overline{F})| + |(N_G(x) \cap Z), \overline{F})| \\ &\leqslant |(I, \overline{F})| + |(Z, \overline{F})| \leqslant |(F, \overline{F})| \\ &= d_G(F) = \lambda_r(G) < \xi(G),\end{aligned}$$

其中第一个等号成立是因为 $Z = N_G(I) \cap F'$ 和 $(Z, Y \setminus Z) = \emptyset$, 第二个不等号成立由式 (16.2.1) 和式 (16.2.2) 可得. 引理得证. ∎

定理 16.2.7 (Xu 和 Xu[344]) 设 G 是 λ_r 非优图. 则 G 中任何两个不同的 λ_r 原子是不交的.

证明 设 X 和 X' 是 G 中任意两个不同的 λ_r 原子. 则 $|X| = |X'| = a_r(G) \geqslant 3$ 且 $d_G(X) = d_G(X') = \lambda_r(G) < \xi(G)$. 令

$$A = X \cap X',\ B = X \cap \overline{X'}, C = \overline{X} \cap X',\ D = \overline{X} \cap \overline{X'}.$$

则

$$|B| = |C| = a_r(G) - |A| \geqslant 1, \quad |D| \geqslant |A|.$$

只需证明 $A = \emptyset$. (反证) 假定 $A \neq \emptyset$. 分两种情形导出矛盾.

假定 $G - E_G(A)$ 含孤立点, 并设 I 是 $G - E_G(A)$ 的孤立点集. 因为 $E_G(X)$ 和 $E_G(X')$ 都是 G 中 λ_r 割, 所以 $I \subseteq A$, $(I, B) \neq \emptyset$ 且 $(I, C) \neq \emptyset$. 不妨设 $|(I,C)| \geqslant |(I,B)|$. 令 $F = X, U = A$, 则由引理 16.2.6 知, $X \setminus I$ $(= F \setminus I)$ 是 G 中的 λ_r 分片. 然而, $X \setminus I \subset X$. 这与假定 X 是 G 的 λ_r 原子矛盾.

如果 $G - E_G(A)$ 不含孤立点, 那么 $E_G(A)$ 是 G 的 $\mathscr{R}$ 边割. 因此, $|A| \geqslant 2$ 且 $d_G(A) > \lambda_r(G)$. 由定理 1.2.2 (c), 有

$$d_G(D) = d_G(X \cup X') \leqslant d_G(X) + d_G(X') - d_G(X \cap X') < \lambda_r(G). \tag{16.2.3}$$

这意味着 $G - E_G(D)$ 含孤立点. 设 I' 是 $G - E_G(D)$ 的孤立点集. 显然, $I' \subseteq D$.

若 $D' = D \setminus I' \neq \emptyset$, 则 $E_G(D')$ 是 G 的 $\mathscr{R}$ 边割, 因为 $G - E_G(D')$ 不含孤立点. 由式 (16.2.3), 能导出如下矛盾:

$$\lambda_r(G) \leqslant d_G(D') = d_G(D) - \sum_{u \in I'} d_G(u) = d_G(D) < \lambda_r(G).$$

若 $D' = D \setminus I' = \emptyset$, 则 $I' = D$. 不妨设 $|(D,B)| \geqslant |(D,C)|$. 令 $F = \overline{X}, I = U = D \subset F$. 则由引理 16.2.6 知, C $(= \overline{X} \setminus D = F \setminus I) \subset X'$ 是 G 中 λ_r 分片. 这与假定 X' 是 G 的 λ_r 原子矛盾. ∎

阶数至少为 4 的无向圈是 λ_r 优的, 任何两个相邻顶点构成一个 λ_r 原子. 这说明定理 16.2.7 中的条件“G 是 λ_r 非优的”是不可少的.

定理 16.2.8 (Xu 和 Xu[344]) 设 G 是 λ_r 非优图. 如果 G 是 d 正则的, 那么 $a_r(G) \geqslant d \geqslant 3$.

证明 因为 G 是 λ_r 图, 所以 G 的阶至少为 4. 因为任何连通的 2 正则图是圈, 它是 λ_r 优的, 所以 $d \geqslant 3$. 由定理 16.2.5 知, $a_r(G) \geqslant 3$. 设 $a_r(G) = r$, X 是 G 的 λ_r

原子. 则 $|X| = r$ 且 $d_G(X) = \lambda_r(G) < \xi(G) = 2d-2$. 考虑 X 中所有顶点度之和, 得

$$\begin{aligned} r\,d &= \sum_{x\in X} d_G(x) \leqslant r(r-1) + d_G(X) \\ &< r^2 - r + 2d - 2 \\ &= r\,d - (d-r-1)(r-2). \end{aligned}$$

这意味着 $a_r(G) = r \geqslant d$. ∎

注 定理 16.2.8 已被 Ueffing 和 Volkmann[299] 改进为: $a_r(G) \geqslant \max\{3, \delta(G)\}$.

推论 设 G 是 d 正则 d 连通 λ_r 非优图. 如果 G 含完全图 K_d, 那么 $V(K_d)$ 是 G 的 λ_r 原子. 因此, $\lambda_r(G) = d$.

证明 因为 G 是 d 正则 λ_r 非优连通图, 所以由定理 16.2.8 知, $d \geqslant 3$. 令 $X = V(K_d)$, 则 $|X| = d \geqslant 3$. 首先证明 $G - E_G(X)$ 不含孤立点. (反证) 假定 $G - E_G(X)$ 含孤立点 x. 则 $x \in V(G) \setminus X$ 且 $N_G(x) \subseteq X$. 因为 $d_G(x) = d = |X|$, 所以 $N_G(x) = X$. 因为 G 是 d 正则连通图, 所以 $G = K_{d+1}$. 由定理 16.2.1 的推论知, K_{d+1} 是 λ_r 优的, 这与假定矛盾. 所以, $G - E_G(X)$ 不含孤立点, 即 $E_G(X)$ 是 G 的 $\mathscr{R}$ 边割. 由定理 16.2.1, 有

$$d = \lambda(G) \leqslant \lambda_r(G) \leqslant |E_G(X)| = d_G(X) = d,$$

即 $\lambda_r(G) = d$. 这意味着 $E_G(X)$ 是 G 的 λ_r 割. 由定理 16.2.8 知, $d = |X| \geqslant d$. 所以 X 是 G 的 λ_r 原子. ∎

§16.3 可迁图的限制边连通度

这一节考虑可迁图的限制边连通度.

定理 16.3.1 (Xu 和 Xu[344]) 设 G 是阶至少为 4 的边可迁连通图. 若 G 不是星, 则 G 是 λ_r 优的.

证明 由假设知 G 是 λ_r 图. (反证) 假定 G 是 λ_r 非优的, 且设 X 是 G 的 λ_r 原子. 则由定理 16.2.5 知 $|X| = a_r(G) \geqslant 3$. 设 $e = xy$ 是 $G[X]$ 中的边, $e' = yz$ 是 G 中的边, 其中 $z \in \overline{X}$. 因为 G 是边可迁的, 所以 G 是边正则的, 并且存在 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ 使得 $\sigma(\{x,y\}) = \{y,z\}$. 由定理 16.2.4 知, $\sigma(X)$ 是 G 的 λ_r 原子. 因为 $z \in \sigma(X)$ 且 $z \notin X$, 所以 $X \neq \sigma(X)$. 另一方面, $y \in X \cap \sigma(X)$, 由定理 16.2.7 知 $X = \sigma(X)$. 这个矛盾说明 G 是 λ_r 优的. ∎

下面的定理类似于原子分解定理 3.3.5.

定理 16.3.2 (Xu 和 Xu[344]) 设 G 是点可迁连通图, 正则度 $d \geqslant 3$, X 是 G 的 λ_r 原子. 如果 G 是 λ_r 非优的, 那么

(a) $G[X]$ 是点可迁的, 正则度为 $d-1$ 且含 K_3;

(b) G 为偶阶且存在顶点划分 $\{X_1, X_2, \cdots, X_m\}$ 使得对每个 $i = 1, 2, \cdots, m$, $m \geqslant 2$, 都有 $G[X_i] \cong G[X]$.

证明 因为 G 是 λ_r 非优的, 由定理 16.2.8 知, $|X| = a_r(G) \geqslant d \geqslant 3$. 类似于定理 3.3.5 的证明, 可以得到 $G[X]$ 是点可迁的, 并且存在顶点划分 $\{X_1, X_2, \cdots, X_m\}$ 使得对每个 $i = 1, 2, \cdots, m$, $m \geqslant 2$, 都有 $G[X_i] \cong G[X]$. 详细的证明留给读者作为练习, 现在证明定理的其他部分.

设 $G[X]$ 的正则度为 t, 则 $t \leqslant d-1$. 另一方面, 由定理 16.2.8, 得

$$2(d-1) \geqslant d_G(X) + 1 = (d-t)a_r(G) + 1 \geqslant (d-t)d + 1.$$

因此,

$$t \geqslant \left\lceil \frac{d^2 - 2d + 3}{d} \right\rceil = d - 1.$$

这就证明了 $t = d-1$. 条件 $d \geqslant 3$ 意味着 $G[X]$ 必含圈. 如果它不含三角形, 那么它至少有 $2d-2$ 个顶点. 因此,

$$2d - 2 \leqslant |X| = \lambda_r(G) < 2d - 2.$$

这个矛盾说明 $G[X]$ 必含三角形.

由 (a) 得

$$v(G) = m|X| = v(G)d - m|X|(d-1) = 2\varepsilon(G) - 2m\varepsilon(G[X]).$$

这意味着 G 是偶阶的. ▮

推论 1 设 G 是 λ_r 非优的点可迁连通图, 则 G 有完备匹配.

证明 设 G 是 d 正则 λ_r 非优的点可迁连通图, $\{X_1, X_2, \cdots, X_m\}$ 是 $V(G)$ 的 λ_r 原子分解, 则由定理 16.3.2 知, $G[X_i]$ 是 $(d-1)$ 正则点可迁的, 其中 $m \geqslant 2$. 令

$$M = E(G) \setminus (E(G[X_1]) \cup \cdots \cup E(G[X_m])).$$

注意到 M 中任何两条边没有公共顶点, 所以 M 是 G 的匹配. 另一方面, 因为 $G[X_i]$ 是 G 的 $(d-1)$ 正则子图, 所以对任何 $x \in V(G)$, 存在一条边 $e \in M$ 与 x 关联. 这意味着 M 是 G 的完备匹配. ▮

推论 2 设 G 是 d 正则 λ_r 非优的连通点可迁图. 则 $\lambda_r(G) = d$ 当且仅当 G 中任何 λ_r 原子 X 的导出子图 $G[X] = K_d$.

证明 设 X 是 G 的 λ_r 原子, $a_r = |X|$. 由定理 16.3.2 知, $G[X]$ 是点可迁的, 正则度为 $d-1$. 因此,

$$a_r d = \sum_{x \in X} d_G(x) = \sum_{x \in X} d_{G[X]}(x) + \lambda_r(G) = a_r(d-1) + \lambda_r(G),$$

即 $\lambda_r(G) = a_r$. 故, $\lambda_r(G) = d \Leftrightarrow G[X] = K_d$. ∎

作为定理 16.3.2 的进一步应用, 可以得到点可迁图限制边连通度的下述结果.

定理 16.3.3 (Xu 和 Xu[344]) 设 G 是 $n\,(\geqslant 4)$ 阶点可迁连通图, 正则度 $d\ (\geqslant 2)$, 则

(a) 如果 n 是奇数, 或者 G 不含三角形, 那么 $\lambda_r(G) = \xi(G) = 2d-2$; 或者

(b) 存在整数 $m\ (\geqslant 2)$ 使得 $d \leqslant \lambda_r(G) = \dfrac{n}{m} \leqslant 2d-3$. ∎

由定理 16.3.3, 立刻得到一些著名网络的限制边连通度.

推论 1 超立方体网络 Q_n $(n \geqslant 2)$ 的限制边连通度 $\lambda_r(Q_n) = 2n-2$. 因此是 λ_r 优的.

证明 超立方体 $Q_n\,(n \geqslant 2)$ 是点可迁的 λ_r 图, 且不含三角形. 由定理 16.3.3, $\lambda_r(Q_n) = \xi(Q_n) = 2n-2$. ∎

推论 2 无向超环面网 $C(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ $(d_i \geqslant 4, i = 1, 2, \cdots, n)$ 的限制边连通度 $\lambda_r(C(d_1, d_2, \cdots, d_n)) = 4n-2$. 因此是 λ_r 优的.

证明 由 4.3 节知, 无向超环面网 $C(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 是点可迁的, 正则度为 $2n$. 如果对每个 $i = 1, 2, \cdots, n$ 都有 $d_i \geqslant 4$, 那么 $C(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 不含三角形. 由定理 16.3.3, $\lambda_r(C(d_1, d_2, \cdots, d_n)) = \xi(C(d_1, d_2, \cdots, d_n)) = 4n-2$. ∎

推论 3 连通的循环无向图 $G(n; s_1, s_2, \cdots, s_k)\,(n \geqslant 4)$ 是 λ_r 优的, 如果它不含三角形, 或者 $s_k \neq \frac{1}{2}n$.

证明 设 $G = G(n; s_1, s_2, \cdots, s_k)$. 从 3.2 节知, G 是点可迁的, 正则度为 $2k$. 由定理 16.3.3, 只需证明当 $s_k \neq \frac{1}{2}n$ 时, G 是 λ_r 优的.

(反证) 假定 G 是 λ_r 非优的. 由定理 16.3.2, 存在整数 $m\,(\geqslant 2)$ 使得 $n = ma_r(G)$ 且对 G 的任何 λ_r 原子 X, $G[X]$ 是 $2k-1$ 正则的点可迁图. 因此, 存在子集 $\{b_1, b_2, \cdots, b_t\} \subseteq \{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$ 使得

$$\text{g.c.d.}(n, b_1, b_2, \cdots, b_t) = m \geqslant 2$$

且

$$G[X] \cong G\left(\frac{n}{m}; \frac{b_1}{m}, \frac{b_2}{m}, \cdots, \frac{b_t}{m}\right),\ b_1 < b_2 < \cdots < b_t.$$

因为 $\dfrac{b_i}{m} \neq \dfrac{n}{2m}$, $s_k \neq \dfrac{1}{2}n$, 所以 $G[X]$ 的正则度为偶数, 矛盾. ∎

由定理 16.3.3 知, 对于 λ_r 非优的点可迁连通图 G, 存在整数 m $(\geqslant 2)$ 使得 $d \leqslant \lambda_r(G) = \frac{n}{m} \leqslant 2d-3$, 其中 d $(\geqslant 2)$ 是 G 的正则度. 一个自然的问题是: 对于给定的整数 d 和 s, $d \geqslant 3$ 且 $0 \leqslant s \leqslant d-3$, 是否存在连通的点可迁图 G 使得正则度为 d 且 $\lambda_r(G) = d+s$? 李雷和徐俊明 Xu[210] 回答了这个问题, 其证明依赖于下面的引理, 留给读者作为练习.

引理 16.3.4 (Li 和 Xu[210]) 设 G 是连通非平凡图, 则

$$\lambda_r(K_2 \times G) = \min\{v(G),\ 2\delta(G),\ 2\lambda_r(G)\}.$$ ∎

推论 1 设 G 是 n 阶 d 度点可迁连通图, 则 $\lambda_r(K_2\times G)=\min\{2d,\ n\}$. ∎

推论 2 超立方体网络 Q_n $(n\geqslant 2)$ 的限制边连通度 $\lambda_r(Q_n)=2n-2$. ∎

定理 16.3.5 (Li 和 Xu[210]) 对于给定的整数 d 和 s, $d\geqslant 3$ 且 $0\leqslant s\leqslant d-3$, 存在连通的点可迁图 G 使其顶点度为 d 且 $\lambda_r(G)=d+s$ 当且仅当 d 是奇数或者 s 是偶数.

证明 设 d 是偶数 s 是奇数. 假定存在 λ_r 非优的连通点可迁图 G 使其顶点度为 d 且 $\lambda_r(G)=d+s$. 设 X 是 G 的 λ_r 原子. 由定理 16.3.2 (a) 知, $|X|=\lambda_r(G)=d+s$, $d\geqslant 3$ 且 $G[X]$ 是 $(d-1)$ 正则的. 于是,

$$2|E(G[X])|=\sum_{x\in X}d_{G[X]}(x)=(d-1)|X|=(d-1)(d+s). \tag{16.3.1}$$

式 (16.3.1) 的左边是偶数, 而右边是奇数. 这个矛盾意味着必要性成立.

为了证明充分性, 考虑循环无向图 $G=G(n;s_1,s_2,\cdots,s_d)$, 其中 $0<s_1<\cdots<s_d\leqslant\frac{n}{2}$. G 是点可迁的, 正则度为 $2d$ 或者 $(2d-1)$ 依赖是否有 $s_d\neq\frac{n}{2}$ 而定. 令 $H=K_2\times G$. 由定理 4.3.1 知 H 是点可迁的.

充分性证明是根据 d 和 s 的奇偶性选择 $(d-1)$ 正则循环图 G 使得 $\lambda_r(H)=d+s$.

当 $m\geqslant 1$ 时, 取

$$G=\begin{cases}G(d+s;1,2,\cdots,m), & \text{若 } d=2m+1;\\ G(d+s;1,2,\cdots,m-1,m+\frac{1}{2}s), & \text{若 } d=2m \text{ 且 } s \text{ 是偶数}.\end{cases}$$

容易验证 $\delta(G)=d-1$. 因为对任何 $s\,(0\leqslant s<d-2)$,

$$2\delta(G)=2d-2>d+s=v(G),$$

由引理 16.3.4 的推论 1 知, $\lambda_r(H)=v(G)=d+s$. ∎

对于 Cayley 图, 孟吉祥 [242] 得到下列结果, 其证明留给读者.

定理 16.3.6 (Meng[242]) 设 G 是有限群 Γ 关于极小生成集 S 的 Cayley 图, 则 G 是 λ_r 优的, 或者 $\lambda_r(G)=\lambda(G)$, $S=\{x,x^{-1},y\}$, $x^3=y^2=1$. 如果 G 的直径为 2, 正则度为 d 且 $G\neq K_d\times K_2$, 那么 G 是 λ_r 优的. ∎

§16.4 网络的超连通性和超连通度

我们已经知道, 由式 (1.5.1) 和式 (1.5.2) 计算 G 的点和边故障概率 $R_v(G,p_v)$ 和 $R_v(G,p_v)$ 是 NP 难的 (Ball [15]). 为了最小化式 (1.5.1) 中的 ℓ_i 和式 (1.5.2) 中的 c_i, Bauer 等人 [22, 37]) 提出超连通图的概念.

设 G 是连通图. 若 $\kappa(G) = \delta(G)$, 则称 G 为**最大连通的** (maximally connected); 若 $\lambda(G) = \delta(G)$, 则称 G 为**最大边连通的** (maximally edge-connected). 若 G 是最大连通 (或最大边连通) 的, 那么每个度数等于最小度的顶点的邻集 (或邻边集) 都是 G 的最小顶点割 (或最小边割), 移去这些顶点 (或边) 会使这个顶点成为孤立点. 人们希望最小顶点割 (或最小边割) 的个数越少越好.

如果图 G 的每个最小顶点割 (或边割) 都使 G 的一个顶点成为孤立点, 则称 G 为**超连通的** (super connected) (或**超边连通的** (super edge-connected)). 易见, 当图 G 是超连通和超边连通图时, 式 (1.5.1) 中的 ℓ_i 和式 (1.5.2) 中的 c_i 都为 G 中度数为最小度 δ 的顶点个数.

下面的定理说明了超连通和超边连通之间的关系. 先证明一个引理.

引理 16.4.1 (Xu 等 [338]) 如果 $\kappa(G) = \lambda(G) > 0$, 则 G 的任何最小边割或者是某个顶点的关联边集, 或者是匹配.

证明 设 F 是 G 的边割使得 $|F| = \lambda(G)$. 则 $V(G)$ 存在划分 $\{X, Y\}$ 使得 $F = E_G[X, Y]$. 用 X_0 和 Y_0 分别记 F 的边在 X 和 Y 中的端点集. 显然 $|X_0| \leqslant |F|$, $|Y_0| \leqslant |F|$.

不失一般性, 设 $|X_0| \leqslant |Y_0|$. 只需证明如果 F 不是某个顶点的关联边集, 则 $|X_0| = |F|$ 即可. 因为这时 X_0 的每一个顶点通过 F 中一条边恰好和 Y_0 的一个顶点相邻, 从而 F 是匹配. 如果 $X - X_0 \neq \emptyset$, 则 X_0 是 G 的点割. 所以 $|F| \geqslant |X_0| \geqslant \kappa(G) = \lambda(G) = |F|$.

下面假设 $X - X_0 = \emptyset$. 如果 F 不是 G 的某个顶点的关联边集, 则 $|X_0| \geqslant 2$. 令 $|X_0| = t$, 记 $E(x) = \{xy \in E(G) : y \in Y\}$. 因为 $2 \leqslant t \leqslant \delta(G)$, 所以

$$\begin{aligned}
\delta(G) \geqslant \lambda(G) = |F| &= \sum_{x \in X_0} |E(x)| \\
&= \sum_{x \in X_0} d(x) - 2|E(G[X_0])| \\
&\geqslant \delta(G)t - t(t-1) = -t^2 + (\delta(G)+1)t \\
&\geqslant \delta(G).
\end{aligned}$$

因为函数 $f(t) = -t^2 + (\delta(G)+1)t$ 在区间 $[2, \delta(G)]$ 上是凸函数, 而且在区间的右端点达到最小值, 即 $f(t) \geqslant f(\delta(G)) = \delta(G)$, 所以上式的最后一个不等式成立, 并且等号成立当且仅当 $t = |X_0| = \delta(G) = |F|$. ∎

定理 16.4.2 (Xu 等 [338]) 最小度至少为 4 的超连通图 G 必是超边连通的.

证明 因为 G 是超连通的, 所以 $\kappa(G) = \delta(G)$. 由 $\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$ 立即可得 $\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G)$. 用反证法来证明该定理. 设 G 不是超边连通的, 则 G 有一个最小边割 F 使得 $G - F$ 不含孤立点, $|F| = \lambda(G) = \delta(G) \geqslant 4$, 而且 F 不会是

某个顶点的关联边集. 由引理 16.4.1 知, F 是一个匹配. 令 $\lambda = |F|$,

$$X_0 = \{x_1, x_2, \cdots, x_\lambda\}, \quad Y_0 = \{y_1, y_2, \cdots, y_\lambda\},$$

对每个 $i = 1, 2, \cdots, t$, x_i 和 y_i 通过 F 中的一条边相邻. 考虑 G 的顶点子集:

$$S = \{x_1, x_2, y_3, y_4, \cdots, y_\lambda\}.$$

显然 S 是 G 的一个最小顶点割. 因为 G 是超连通的, 所以 S 一定是某个顶点的邻集, 不妨设 S 是顶点 u 的邻集. 如果 $u \in X$, 则 y_3u, $y_4u \in F$(因为 $\lambda \geqslant 4$, 所以 y_3, y_4 一定存在), 这与 F 是匹配矛盾. 如果 $u \in Y$, 则 x_1u, $x_2u \in F$, 与 F 是匹配矛盾. 所以, G 是超边连通的, 定理得证. ∎

注 定理 16.4.2 中的条件 $\delta(G) \geqslant 4$ 是必需的. 例如, 3 正则图 $K_3 \times K_2$ 是超连通的, 但不是超边连通的.

推论 设 G 是最小度至少为 3 的连通无向图. 如果线图 $L = L(G)$ 是超连通的, 则 L 也是超边连通的.

证明 因为 $\delta(G) \geqslant 3$, 所以线图 L 的最小度 $\delta(L) = \xi(G) \geqslant 2\delta(G) - 2 \geqslant 4$, 又因为 L 是超连通的, 由定理 16.4.2 即得 L 是超边连通的. ∎

由图的超连通性概念, 我们很自然地提出一个问题: 从超连通 (或超边连通图) G 中移去多少个顶点 (或多少条边) 才会使 G 不连通并且每个连通分支都不是孤立点. 在此背景下, 图的超连通度和超边连通度的概念被提了出来.

设图 $G = (V, E)$, $S \subset V$. 若 $G - S$ 不连通并且 $G - S$ 不含孤立点, 则称 S 是 G 的*超点割* (super vertex-cut). 一般来说, 超点割并不是总存在的. 例如完全图 K_v 就没有超点割. 如果 G 中有超点割, 则图 G 的*超连通度* (super connectivity) 定义为 G 中所有超点割的最小点数, 记为 $\kappa_s(G)$. 如果 G 中没有超点割, 则定义 $\kappa_s(G) = \infty$. 这时称 G 的超连通度 $\kappa_s(G)$ 是不存在的.

设 $F \subset E$. 若 $G - F$ 不连通并且 $G - F$ 不含孤立点, 则称 F 是 G 的*超边割* (super edge-cut). 超边割也不是总存在的. 如果 G 中存在超边割, 则 G 的*超边连通度* (super edge-connectivity) 定义为 G 中所有超边割的最小边数, 记为 $\lambda_s(G)$; 否则定义 $\lambda_s(G) = \infty$, 这时称 G 的超边连通度 $\lambda_s(G)$ 是不存在的.

注 对于有向图, 超点 (边) 割与限制点 (边) 割的概念中, 应将"连通"改为"强连通", 这里就不再赘述了.

从定义可知, 超边割与限制边割这两个概念没有什么区别. 因此, 对任何连通图 G, $\lambda_s(G) = \lambda_r(G)$. 然而, 超点割与限制点割这两个概念却有很大区别. 例如, 考虑图 16.1 所示的无向图 G, 它有唯一的超点割 $S = \{x_2, x_5, x_7\}$. 因此, $\kappa_s(G) = 3$. 但 G 中没有限制点割. 因此, $\kappa_r(G)$ 不存在.

容易看到, G 的限制点割一定是超点割. 所以, 如果 $\kappa_r(G)$ 存在, 那么 $\kappa_s(G)$ 必存在, 而且 $\kappa_s(G) \leqslant \kappa_r(G)$. 反之, 如果 $\kappa_s(G)$ 不存在, 那么 $\kappa_r(G)$ 也一定不存在. 下

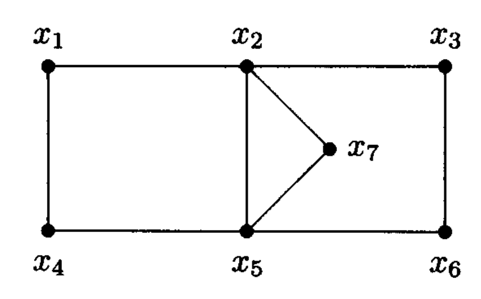


图 16.1 $\kappa_r(G)$ 不存在, 而 $\kappa_s(G)=3$

面的定理给出了超连通性, 超连通度和限制连通度之间的关系.

定理 16.4.3 设 G 是连通图.

(1) $\kappa_r(G)\geqslant\kappa_s(G)\geqslant\kappa(G)$. 而且, 如果 $\kappa_s(G)>\kappa(G)=\delta(G)$, 那么 G 是超连通的.

(2) $\lambda_r(G)=\lambda_s(G)\geqslant\lambda(G)$. 而且, 如果 $\lambda_s(G)>\lambda(G)=\delta(G)$, 那么 G 是超边连通的.

从互连网络的实际应用来考虑, 研究网络的超连通度 (或超边连通度) 是很有意义的. 因为与同一个处理机直接相连的处理机 (或连线) 同时失灵的可能性实际上是很小的. 另外, 如果图 G 是超连通的, 则 $\kappa(G)<\kappa_s(G)$. 因此等式 (1.5.1) 中

$$\ell_i=0,\qquad \forall\, i=\kappa+1,\kappa+2,\cdots,\kappa_s-1.$$

如果图 G 是超边连通的, 则 $\lambda(G)<\lambda_s(G)$. 等式 (1.5.2) 中

$$c_i=0,\qquad \forall\, i=\lambda+1,\lambda+2,\cdots,\lambda_s-1.$$

由超连通度 (超边连通度) 的定义可知, G 的超连通性 (超边连通性) 可以用参数 $\kappa_r(G)$ $(\lambda_r(G))$ 来度量. 所以研究图的超连通度 (或超边连通度) 比研究其超连通性 (或超边连通性) 更有意义.

由于总有 $\lambda_r(G)=\lambda_s(G)$, 文献上大多采用限制边连通度的概念. 这里将不区别 $\lambda_r(G)$ 和 $\lambda_s(G)$, 也不区别超边连通性和限制边连通性.

定理 16.2.2 证明了: 对于 λ_s 图 G, $\lambda_s(G)=\lambda(G)$ 当且仅当存在 λ 割 $B=E_G(X)$ 使得 $G[X]$ 和 $G[\overline{X}]$ 都是 G 的非平凡连通子图. 这个结论对超连通图不一定成立, 但对无爪图, 必要性是成立的.

完全二部分图 $K_{1,3}$ 通常称为爪 (claw). 若图 G 不含同构于爪的点导出子图, 则称 G 为无爪图 (claw-free graph). 容易验证无向图的线图都是无爪图.

定理 16.4.4 设 G 是连通的无爪图, S 是 G 的最小超点割, 则 $G-S$ 恰好有两个分支.

证明 因为 S 是 G 的最小超点割, 所以 $G-S$ 不连通. 设 G_1, G_2, $\cdots$, G_t 是 $G-S$ 的连通分支, 则每个分支至少有两个顶点, 任意两个不同的分支之间都没有边. 因为 S 是点割, 所以 S 中存在顶点 x, 它与每个分支都相邻. 如果 $t \geqslant 3$, x 至少和三个两两不邻的顶点相邻. 因为 G 是无爪图, 所以这是不可能的, 故 $t=2$. 定理得证. ∎

现在考虑一类强连通有向图的限制边连通度的下界. 用 $G(n,d,k)$ 表示 n 阶 d 正则连通有向图, 直径为 k, 而且对称边的端点没有环. 当 $n \leqslant 3$ 时, $\lambda_s(G(n,d,k))$ 显然不存在. 当 $d=1$ 时, $G(n,1,k)$ 是有向圈 C_n, 易知, $\lambda_s(C_n)$ 不存在. 当 $k=1$ 时, $G(n,d,k)$ 是完全有向图 K_{d+1}. 易知, 当 $d \leqslant 2$ 时, $\lambda_s(K_{d+1})$ 不存在; 当 $d \geqslant 3$ 时, $\lambda_s(K_{d+1})=2d-2$. 因此, 在下面的讨论中, 总是假设 $n \geqslant 4$, $d \geqslant 2$, $k \geqslant 2$.

定理 16.4.5 (Xu 和 Lü[335]) 设 $G=G(n,d,k)$ 是连通的有向图, 如果 $\lambda_s(G)$ 存在, 则

$$\lambda_s(G) \geqslant \begin{cases} \min\left\{ \dfrac{(n-d^{k-1})(d-1)}{d^{k-1}+d-2},\ 2d-2 \right\}, & \text{当 } k \neq 3; \\ \min\left\{ \dfrac{n}{2d+2},\ 2d-2 \right\}, & \text{当 } k=3. \end{cases}$$

证明 因为 G 是 d 正则的连通有向图, 由定理 1.2.5 可知, G 是强连通的. 为了证明这个定理, 只需证明: 如果 $\lambda_s=\lambda_s(G)<2d-2$ 则

$$n \leqslant \begin{cases} \lambda_s\, \dfrac{d^{k-1}+d-2}{d-1}+d^{k-1}, & \text{当 } k \neq 3; \\ 2\,\lambda_s\,(d+1), & \text{当 } k=3. \end{cases} \tag{16.4.1}$$

假定 $\lambda_s(G)$ 存在, 那么存在限制边割 F 使得 $|F|=\lambda_s(G)$. $V(G)$ 被划分成两个不交的非空子集 X 和 Y 使得 $F=E_G(X,Y)$. 用 X_0 和 Y_0 分别记 F 中所有有向边的起点和终点集合. 令

$$d(G;x,X_0)=\min\{d(G;x,u):\ u\in X_0\},$$

$$d(G;Y_0,y)=\min\{d(G;v,y):\ v\in Y_0\},$$

$$m=\max\{d(G;x,X_0):\ x\in X\},$$

$$m'=\max\{d(G;Y_0,y):\ y\in Y\}.$$

同 5.3 节一样的分析方法可证明下面的不等式, 留给读者作为练习.

$$n \leqslant \lambda_s\, \frac{d^{m+1}+d^{k-m}-2}{d-1}, \tag{16.4.2}$$

其中 $0 \leqslant m \leqslant k-1$.

因为 G 是 d 正则的, 所以 $|E_G(X,Y)|=|E_G(Y,X)|$. 不妨设 $m \leqslant m'$. 分两种情形进行讨论.

情形 1 $m \geqslant 1$. 由 $m \leqslant m'$ 得 $m' \geqslant 1$, 所以 $m \leqslant k - m' - 1 \leqslant k-2$, 这就意味着 $k \geqslant 3$. 容易验证函数

$$f(m) = \frac{d^{m+1} + d^{k-m} - 2}{d-1}.$$

在区间 $[1, k-2]$ 上是凹的, 并且在区间的端点处达到最大值. 因为 $f(1) = f(k-2)$, 由式 (16.4.2) 得

$$n \leqslant \lambda_s f(m) \leqslant \lambda_s f(1) = \lambda_s \frac{d^{k-1} + d^2 - 2}{d-1}. \tag{16.4.3}$$

情形 2 $m = 0$. 在这种情形下, $X = X_0$, $m' = k-1$. 令 $E(x) = \{(x,y) \in E(G): y \in Y\}$. 注意到任何一对对称边的端点都没有环, 若 $2 \leqslant |X| \leqslant d-1$, 则得

$$2d - 3 \geqslant |F| = \sum_{x \in X} |E(x)| \geqslant d|X| - |X|(|X|-1) \geqslant 2d-2,$$

这个矛盾说明 $|X| \geqslant d$. 因为 $|F| = \lambda_s < 2d-2$, 所以 X 中一定存在顶点 x', 它只有一个外邻点在 Y_0 中; 而且 x' 和 Y 中的任何顶点 y 的距离 $d(G; x', y) \leqslant k$. 所以 Y 中从 Y_0 的顶点出发经过长为 m' 的有向路到达的顶点至多有 d^{k-1} 个, 即

$$\sum_{y \in Y_0} |Y_{m'}^+(y)| \leqslant d^{k-1}.$$

因此, 有

$$\begin{aligned}
n \leqslant & |X| + \sum_{y \in Y_0} \sum_{i=0}^{m'-1} |Y_i^+(y)| + \sum_{y \in Y_0} |Y_{m'}^+(y)| \\
\leqslant & |X| + |Y_0| \sum_{i=0}^{m'-1} d^i + d^{k-1} \\
\leqslant & |F| + |F| \frac{d^{m'} - 1}{d-1} + d^{k-1} \\
= & |F| + |F| \frac{d^{k-1} - 1}{d-1} + d^{k-1},
\end{aligned}$$

所以

$$n \leqslant \lambda_s \frac{d^{k-1} + d - 2}{d-1} + d^{k-1}. \tag{16.4.4}$$

易知, 当 $k \geqslant 3$ 时, 式 (16.4.3) 成立; $k \geqslant 2$ 时, 式 (16.4.4) 成立. 当 $k \neq 3$ 时, 比较式 (16.4.3) 和式 (16.4.4) 即得式 (16.4.1). 当 $k = 3$ 时, 式 (16.4.3) 恒成立, 而式 (16.4.4) 仅当 $|X| \geqslant d$ 时才成立. 这时式 (16.4.3) 和式 (16.4.4) 的右边分别是 $2\lambda_s(d+1)$ 和 $\lambda_s(d+2) + d^2$. 当式 (16.4.4) 成立时, 有 $\lambda_s = |F| \geqslant |X| \geqslant d$. 从而有 $2\lambda_s(d+1) \geqslant \lambda_s(d+2) + d^2$, 这就意味着 $n \leqslant 2\lambda_s(d+1)$.

综上所述, 式 (16.4.1) 对任意的整数 $k \geqslant 2$ 都成立, 定理得证. ∎

由定理 16.4.5, 容易得到以下几个结论, 证明留给读者作为练习.

推论 1 设 $G = G(n,d,k)$ 是连通的有向图, 如果 $\lambda_s(G)$ 存在, 而且

$$n \geqslant \begin{cases} 3d^{k-1}+2d-4, & \text{当 } k \neq 3; \\ 4(d^2-1), & \text{当 } k = 3. \end{cases}$$

则 $\lambda_s \geqslant 2d-2$. ▮

推论 2 如果 $d \geqslant 4$ 且 $k \geqslant 2$, 那么 $\lambda_s(B(d,k)) = 2d-2$. ▮

推论 3 如果 $d \geqslant 3$ 且 $k \geqslant 2$, 那么 $\lambda_s(K(d,k)) = 2d-2$. ▮

§16.5 线图的超连通性和超连通度

这一节考虑线图的超连通性和超连通度, 研究线图的超连通度和原图的超边连通度之间的关系. 主要结论由徐俊明等 [234, 338] 得到. 首先考虑有向图.

设 G 是有向图. 若 G 的超边连通度存在且存在最小超边割 F 使得 $G-F$ 恰好被分成两个强连通分支, 则称 G 为*最优超边连通的* (optimally super edge-connected).

定理 16.5.1 (Xu 等 [234]) 设 G 是连通平衡有向图, L 是 G 的线图.

(a) 如果 $\kappa_s(L)$ 存在, 则 $\lambda_s(G) \leqslant \dfrac{1}{2}\,\kappa_s(L)$.

(b) 如果 G 是最优超边连通的, 则 $\kappa_s(L) = 2\lambda_s(G)$.

证明 由定理 1.2.5 知 G 是强连通的.

(a) 设 $\kappa_s(L)$ 存在, E_0 是 L 的超点割使得 $|E_0| = \kappa_s(L)$. 则 $L-E_0$ 的强连通分支为 $L_1, L_2, \cdots, L_t$. 令 $G_i = G[E_i]$, $V_i = V(G_i)$, $i = 1,2,\cdots,t$. 则每个 V_i 至少有两个点.

首先证明下面断言: 对任意的 $i,j \in \{1,2,\cdots,t\}$, 如果 $i \neq j$, 则 $V_i \cap V_j = \emptyset$. 若不然, 设存在一对不相等的 $i,j \in \{1,2,\cdots,t\}$ 使得 $y \in V_i \cap V_j$. 因为 G_i 是强连通的且 $|V_i| \geqslant 2$, 所以在 V_i 中存在顶点 x, z 使得 $(x,y),(y,z) \in E(G_i)$ (x 可能等于 z). 所以, (x,y) 和 (y,z) 都是 L_i 中的顶点. 同理, 存在顶点 $x', z' \in V_j$ 使得 $(x',y),(y,z') \in E(G_j)$ (x' 可能等于 z'). 所以, (x',y) 和 (y,z') 都是 L_j 中的顶点. 由线图的定义可知, 从 $V(L_i)$ 到 $V(L_j)$ 有一条有向边 $((x,y),(y,z'))$, 从 $V(L_j)$ 到 $V(L_i)$ 也有一条有向边 $((x',y),(y,z))$. 因此, $L_i \cup L_j$ 是强连通的, 这与 L_i 和 L_j 是两个不同的强连通分支矛盾. 所以断言成立.

令 $V_1' = V(G) \setminus V_1$. 则边集 $E_G(V_1, V_1')$ 和边集 $E_G(V_1', V_1)$ 都是 G 的超边割, 即 $\lambda_s(D)$ 存在.

要证明 $2\lambda_s(G) \leqslant \kappa_s(L)$, 首先证明 $E_G(V_1,V_1') \cup E_G(V_1',V_1) \subset E_0$. (反证) 设边 $(x,y) \in E_G(V_1,V_1') \cup E_G(V_1',V_1)$, 但 $(x,y) \notin E_0$. 不失一般性, 设 $(x,y) \in E_G(V_1,V_1')$. 所以 (x,y) 是 L 的顶点, 且 $(x,y) \in E - E_0$. 因为 E_0 是 L 的最小超顶点割, 所以顶点 (x,y) 在而且只在 $L-E_0$ 的一个强连通分支中. 不妨设 (x,y) 在 L_1 中, 根据 D_1

的定义, (x,y) 是 G_1 的边, 这与假设 $(x,y)\in E_G(V_1,V_1')$ 矛盾. 因此, $E_G(V_1,V_1')\cup E_G(V_1',V_1)\subset E_0$.

因为 G 是平衡有向图, 由定理 1.2.5 知 $|E_G(V_1,V_1')|=|E_G(V_1',V_1)|$. 所以

$$\begin{aligned}2\lambda_s(G)\leqslant&2|E_G(V_1,V_1')|\\=&|E_G(V_1,V_1')\cup E_G(V_1',V_1)|\\\leqslant&|E_0|\\=&\kappa_s(L).\end{aligned}\tag{16.5.1}$$

(b) 设图 G 是最优超边连通的, 则 $\lambda_s(G)$ 存在并且有一个最小超边割 F 使得 $G-F$ 恰好有两个强连通分支, 分别记为 G_1 和 G_2. 令 $X=V(G_1)$, $Y=V(G_2)$. 则 $|X|\geqslant 2$, $|Y|\geqslant 2$. 不失一般性, 设 $F=E_G(X,Y)$. 因为 G 是连通的平衡有向图, 所以 $E_G(Y,X)$ 也是 G 的超边割, 由定理 1.2.5 得 $E_G|(Y,X)|=|F|=|E_G(X,Y)|$. 再由定理 2.2.1 知 $L(G_1)$ 和 $L(G_2)$ 是两个不交的强连通的有向图. 因为 G_1 和 G_2 是阶至少为 2 的强连通图, 所以 G_1 和 G_2 都至少含两条边. 也就是说, $L(G_1)$ 和 $L(G_2)$ 都至少有两个顶点. 所以, $E_G(X,Y)\cup E_G(Y,X)$ 是 L 的超点割. 由此可知, $\kappa_s(L)$ 存在, 并且

$$\begin{aligned}\kappa_s(L)\leqslant&|E_G(X,Y)\cup E_G(Y,X)|\\=&2|E_G(X,Y)|\\=&2\lambda_s(G).\end{aligned}\tag{16.5.2}$$

由式 (16.5.1) 和式 (16.5.2) 可得, $\kappa_s(L)=2\lambda_s(G)$. 定理得证. ∎

现在考虑无向图的线图. 设 G 是无向 λ_s 图. 若 $\lambda_s(G)=\xi(G)$, 且每一个最小超边割都孤立一条边, 则称 G 为超 λ_s 的 (super-λ_s).

下面的结果揭示了无向图 G 的超边连通度与它的线图 $L(G)$ 的超连通度之间的关系.

定理 16.5.2 (Xu 等 [338]) 设 G 是 λ_s 无向图, 则 $\kappa_s(L(G))=\lambda_s(G)$ 当且仅当 G 不是超 λ_s 的.

证明 令 $L=L(G)$.

($\Leftarrow$) 设 G 不是超 λ_s 的, 则 G 中存在最小超边割 F 使得 $G-F$ 两连通分支 G_1 和 G_2 都至少含两条边, 因而都至少含 3 个顶点. 由定理 2.2.1, $L(G_1)$ 和 $L(G_2)$ 都是连通的. 因为 $|V(L(G_i))|=|E(G_i)|\geqslant 2$, $i=1,2$ 而且在 $L-F$ 中 $L(G_1)$ 和 $L(G_2)$ 之间没有边, 所以 F 是 L 的超点割. 因此, $\kappa_s(L)\leqslant|F|=\lambda_s(G)$.

下面证明 $\kappa_s(L)\geqslant\lambda_s(G)$. 设 S 是 L 的最小超点割. 注意到无向图的线图是无爪图. 由定理 16.4.4, 记 $L-S$ 两个连通分支为 L_1 和 L_2. 则 $|V(L_1)|\geqslant 2$, $|V(L_2)|\geqslant 2$, 而且由 $V(L_1)$ 和 $V(L_2)$ 在 G 中导出的子图都至少有三个顶点. 由习题 2.7, G 的导

出子图 $G_1 = G[V(L_1)]$ 和 $G_2 = G[V(L_2)]$ 都是连通的. 因此, S 是 G 的超边割. 由此可得, $\lambda_s(G) \leqslant |S| = \kappa_s(L)$. 所以, $\kappa_s(L) = \lambda_s(G)$.

($\Rightarrow$) (反证) 假设 G 是超 λ_s 的, 则 G 中每个最小超边割都孤立一条边. 设 S 是 L 的最小超点割, 则 $|S| = \kappa_s(L) = \lambda_s(G)$. 因线图是无爪图, 故由定理 16.4.4, $L - S$ 仅有两个连通分支, 设为 L_1 和 L_2. 用 G_1 和 G_2 分别记 G 的由 $V(L_1)$ 和 $V(L_2)$ 导出的子图. 则 G_1 和 G_2 都是连通的, 而且有 $|V(G_1)| \geqslant 3$, $|V(G_2)| \geqslant 3$. 在 $G - S$ 中, G_1 和 G_2 之间没有边, 所以 S 是 G 的超边割, 而且 $|S| = \lambda_s(G)$. 所以, S 是 G 的最小超边割. 然而, $G - S$ 的两个分支 G_1 和 G_2 都至少有 3 个顶点, 所以 G 的最小超边割 S 不孤立一条边, 这与假设 G 是超 λ_s 的矛盾. 所以, G 不是超 λ_s 的. 定理得证. ∎

由定理 16.5.2, 立即得到下面的几个推论, 详细证明留给读者作为练习.

推论 1 设 L 是连通图 G 的线图, 且 $\xi(G) > \delta(G)$. 则 $\kappa_s(L) = \lambda(G)$ 当且仅当 G 不是超边连通的. ∎

推论 2 设 G 是 λ_s 图, 则 $L = L(G)$ 是超连通的当且仅当 G 是超 λ_s 的. ∎

推论 3 (Hellwig 等人 [154]) 设 G 是 λ_s 图, 则 $\kappa(L(G)) = \lambda_s(G)$. ∎

推论 4 设 G 是 λ_s 图, $\delta(G) \geqslant 3$. 若 G 是超 λ_s 的, 则 $L(G)$ 是超边连通的. ∎

吕敏的博士论文 [233] 中还包含许多有意义的结果, 这里不再赘述.

§16.6 网络的高阶超连通度

从图的超点割和超边割的定义可知, 如果 S 是图 G 的超点割或者超边割, 那么 $G - S$ 中不含孤立点. 这一节将这两个概念推广到 h 超点割和 h 超边割.

设 G 是连通图, $\delta(G) \geqslant d$, h 是整数, $0 \leqslant h < d$, $S \subset V(G)$. 若 $G - S$ 不连通且不含度数小于 h 的顶点, 则称 S 为 G 的 *h 超点割* (h-super vertex-cut). G 的 *h 超连通度* (h-super connectivity) $\kappa_s^{(h)}(G)$ 定义为 G 中所有 h 超点割中的最小点数, 即

$$\kappa_s^{(h)}(G) = \{|S|: S \text{ 为 } G \text{ 的 } h \text{ 超点割}\}.$$

若 G 的 h 超点割 S 满足 $|S| = \kappa_s^{(h)}(G)$, 则称 S 是 $\kappa_s^{(h)}$ *割* ($\kappa_s^{(h)}$-cut).

显然, $\kappa_s^{(0)}(G) = \kappa(G)$ 为经典的连通度, $\kappa_s^{(1)}(G) = \kappa_s(G)$ 为超连通度.

设 $S \subset E(G)$. 若 $G - S$ 不连通且不含度数小于 h 的顶点, 则称 S 为 G 的 *h 超边割* (h-super edge-cut). G 的 *h 超边连通度* (h-super edge-connectivity) $\lambda_s^{(h)}(G)$ 定义为 G 中所有 h 超边割中的最小边数, 即

$$\lambda_s^{(h)}(G) = \{|S|: S \text{ 为 } G \text{ 的 } h \text{ 超边割}\}.$$

若 G 的 h 超边割 S 满足 $|S| = \lambda_s^{(h)}(G)$, 则称 S 是 $\lambda_s^{(h)}$ *割* ($\lambda_s^{(h)}$-cut).

显然, $\lambda_s^{(0)}(G) = \lambda(G)$ 为经典的边连通度, $\lambda_s^{(1)}(G) = \lambda_s(G)$ 为超边连通度, 即限制边连通度.

容易观察到, 对于某些连通图和 $h \geqslant 1$, $\kappa_s^{(h)}$ 或者 $\lambda_s^{(h)}$ 不存在. 例如, 对于 K_3 和 $K_{1,n}$, λ_s 不存在; 对于 K_4, K_5 和 $K_{3,3}$, $\lambda_s^{(2)}$ 不存在. 事实上, 对于给定的图 G 和正整数 h, h 超连通度和 h 超边连通度的存在性问题还没有解决. 如果存在, 下面的不等式是明显的:

$$\kappa(G) \leqslant \kappa_s(G) \leqslant \kappa_s^{(2)}(G) \leqslant \cdots \leqslant \kappa_s^{(h-1)}(G) \leqslant \kappa_s^{(h)}(G),$$

$$\lambda(G) \leqslant \lambda_s(G) \leqslant \lambda_s^{(2)}(G) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_s^{(h-1)}(G) \leqslant \lambda_s^{(h)}(G).$$

容易看到, G 的 h 限制点割一定是 h 超点割, h 限制边割一定是 h 超边割. 所以, h 超连通度和 h 限制连通度之间有如下关系: 如果 $\kappa_r^{(h)}(G)$ 存在, 那么 $\kappa_s^{(h)}(G)$ 必存在; 如果 $\lambda_r^{(h)}(G)$ 存在, 那么 $\lambda_s^{(h)}(G)$ 必存在, 而且

$$\kappa_s^{(h)}(G) \leqslant \kappa_r^{(h)}(G), \qquad \lambda_s^{(h)}(G) \leqslant \lambda_r^{(h)}(G).$$

对一般的 $h \geqslant 2$, 目前还没有关于 $\kappa_s^{(h)}$ 的任何结果. 这一节考虑 $h = 2$. 为方便起见, 分别写 $\kappa_s^{(2)}$ 和 $\lambda_s^{(2)}$ 为 κ_s'' 和 λ_s''.

下面的定理揭示了 G 的 2 超边连通度与它的线图 $L(G)$ 的超连通度之间的关系, 其证明留给读者作为练习.

定理 16.6.1 (Xu 和 Lü[234]) 设 G 是连通无向图, 则 $\kappa_s(L(G))$ 存在当且仅当 $\lambda_s''(G)$ 存在, 而且当 $\kappa_s(L(G))$ 或者 $\lambda_s''(G)$ 存在时 $\kappa_s(L) = \lambda_s''(G)$. ∎

设 X 是 $V(G)$ 的非空真子集. 若 $E_G(X)$ 是 G 的 $\lambda_s^{(h)}$ 割, 则称 X 为 G 的 $\lambda_s^{(h)}$ 分片 (fragment). 设 X 是 G 的 $\lambda_s^{(h)}$ 分片. 若 X 有最少的顶点数, 则称 X 为 G 的 $\lambda_s^{(h)}$ 原子 (atom). 容易看到, 如果 X 是 G 的 $\lambda_s^{(h)}$ 原子, 那么 $G[X]$ 和 $G[\overline{X}]$ 都是连通的.

为叙述方便, 称 G 的度数小于 2 的顶点为*奇异点* (singular vertex).

引理 16.6.2 (Xu[326]) 设 G 是 d 正则连通图, $d \geqslant 3$, 且不为 K_4, K_5 或者 $K_{3,3}$, X 是 G 中最短圈的顶点集. 如果 $E_G(X)$ 不是 G 的 2 超边割, 那么 $\lambda_s''(G) < g(d-2)$ 且 $3 \leqslant g \leqslant 4$, 其中 $g = |X|$.

证明 由假定知 $\overline{X} \neq \emptyset$, $E_G(X)$ 是 G 的边割. 如果 $E_G(X)$ 不是 2 超边割, 那么 $G - E_G(X)$ 的所有奇异点必含在 $\overline{X}$ 中. 令 y 是 $G - E_G(X)$ 中度数最小的奇异点. 由 X 的最小性知, 若 $g = 4$, 则 $|N_G(y) \cap X| \leqslant 2$; 若 $g \geqslant 5$, 则 $|N_G(y) \cap X| \leqslant 1$. 如果 y 是 $G - E_G(X)$ 中的孤立点, 那么 $3 \leqslant d = d_G(y) = |N_G(y) \cap X| \leqslant 3$. 因此, $d = 3$, $g = 3$ 且 $\overline{X} = \{y\}$, 即 $G = K_4$, 矛盾. 因此, y 是 $G - E_G(X)$ 中的 1 度点, 故 $3 \leqslant g \leqslant 4$. 令 $Y = X \cup \{y\}$. 因为 y 是 $G[\overline{X}]$ 中的 1 度点, 所以 $\overline{Y} \neq \emptyset$. 令 $\zeta(G) = g(d-2)$.

情形 1 $g = 3$. 在这种情形下, $d = 3$ 或者 4.

如果 $d = 3$, 那么 $\zeta(G) = 3$ 且 $d_G(Y) = 2$. 如果 $G - E_G(Y)$ 不含奇异点, 那么 $E_G(Y)$ 是 G 中 2 超边割. 因而有

$$\lambda_s''(G) \leqslant d_G(Y) = 2 < 3 = \zeta(G).$$

设 z 是 $G-E_G(Y)$ 中的奇异点, 则 z 是唯一的奇异点, 而且是 $G-E_G(Y)$ 中的 1 度点. 因此, z 与 y 相邻. 令 $Z=Y\cup\{z\}$. 则 $\overline{Z}\neq\emptyset$, $d_G(Z)=1$, 并且 $G-E_G(Z)$ 不含奇异点. 因此, $E_G(Z)$ 是 G 中的 2 超边割. 于是,

$$\lambda_s''(G)\leqslant d_G(Z)=1<3=\zeta(G).$$

如果 $d=4$, 那么 $\zeta(G)=6$, $d_G(Y)=4$. 如果 $G-E_G(Y)$ 中不含奇异点, 那么 $E_G(Y)$ 是 G 中的 2 超边割. 于是,

$$\lambda_s''(G)\leqslant d_G(Y)=4<6=\zeta(G).$$

设 z 是 $G-E_G(Y)$ 中的奇异点. 如果 z 是 $G-E_G(Y)$ 中的孤立点, 那么 $G=K_5$, 矛盾. 因此, z 是 $G-E_G(Y)$ 中的 1 度点. 令 $Z=Y\cup\{z\}$, 则 $\overline{Z}\neq\emptyset$, $d_G(Z)=2$ 而且 $G-E_G(Z)$ 不含奇异点. 因此, $E_G(Z)$ 是 G 中的 2 超边割. 于是,

$$\lambda_s''(G)\leqslant d_G(Z)=2<6=\zeta(G).$$

情形 2 $g=4$. 在这种情况下, $|N_G(y)\cap X|=2$, $d=3$, $\zeta(G)=4$.

如果 $G-E_G(Y)$ 不含奇异点, 那么 $E_G(Y)$ 是 G 中的 2 超边割. 于是

$$\lambda_s'(G)\leqslant d_G(Y)=3<4=\zeta(G).$$

设 z 是 $G-E_G(Y)$ 的奇异点. 如果 z 是 $G-E_G(Y)$ 的孤立点, 那么 z 必与 y 相邻, 即 $G=K_{3,3}$, 矛盾. 因此, z 是 $G-E_G(Y)$ 的 1 度点. 令 $Z=Y\cup\{z\}$.

如果 z 是 $G-E_G(X)$ 的 1 度点, 那么 z 不与 y 相邻. 于是, $\overline{Z}\neq\emptyset$, $d_G(Z)=2$ 而且 $G-E_G(Z)$ 不含奇异点. 因此, $E_G(Z)$ 是 G 的 2 超边割. 于是,

$$\lambda_s''(G)\leqslant d_G(Z)=2<4=\zeta(G).$$

如果 z 是 $G-E_G(X)$ 的 2 度点, 那么 z 必与 y 相邻. 于是, $\overline{Z}\neq\emptyset$ 且 $d_G(Z)=2$. 如果 $G-E_G(Z)$ 不含奇异点, 那么 $E_G(Z)$ 是 G 的 2 超边割. 于是,

$$\lambda_s''(G)\leqslant d_G(Z)=2<4=\zeta(G).$$

如果 $G-E_G(Z)$ 含奇异点 u, 那么 u 是唯一的奇异点. u 相邻于 z 并且有一个邻点在 $G-E_G(Z)$. 令 $U=Z\cup\{u\}$. 则 $\overline{U}\neq\emptyset$, $d_G(U)=1$ 并且 $G-E_G(U)$ 不含奇异点. 因此, $E_G(U)$ 是 G 的 2 超边割. 于是,

$$\lambda_s''(G)\leqslant d_G(U)=1<4=\zeta(G).$$

定理证毕. ∎

定理 16.6.3 设 G 是 $d(\geqslant 3)$ 正则连通图. 如果 G 不为 K_4, K_5 或者 $K_{3,3}$, 那么 $\lambda''_s(G)$ 存在, 而且 $\lambda''_s(G) \leqslant g(d-2)$.

证明 只需证明 $\lambda''_s(G) \leqslant g(d-2)$. 为此, 令 X 是 G 的一个最短圈的顶点集. 则 $\overline{X} \neq \emptyset$ 且 $E_G(X)$ 是 G 的边割. 如果 $E_G(X)$ 是 G 的 2 超边割, 那么 $\lambda''_s(G) \leqslant d_G(X) = g(d-2)$. 如果 $E_G(X)$ 不是 G 中 2 超边割, 那么由引理 16.6.2, $\lambda''_s(G) < g(d-2)$. ∎

定理 16.6.4 设 G 是 $d(\geqslant 3)$ 正则连通图, 且不为 K_4, K_5 或 $K_{3,3}$, 则 $\lambda''_s(G) = g(d-2)$ 当且仅当对 G 中任何 λ''_s 原子 X, $G[X]$ 是 G 的最短圈.

证明 由定理 16.6.3 知, $\lambda''_s(G)$ 存在. 设 X 是 G 的 λ''_s 原子, 则 $d_G(X) = \lambda''_s(G)$ 且 $\delta(G[X]) \geqslant 2$. 因此, $G[X]$ 含圈 C.

假定 $G[X] = C$ 是 G 的最短圈, 那么 $\lambda''_s(G) = d_G(X) = g(d-2)$.

反之, 假定 $\lambda''_s(G) = g(d-2)$, C 是 $G[X]$ 的真子图. 设 $X' = V(C)$. 因为 X 是 G 的 λ''_s 原子, 所以 $E_G(X')$ 不是 G 的 2 超边割. 由引理 16.6.2, $\lambda''_s(G) < g(d-2)$, 这与假设矛盾. 因此, $G[X]$ 是 G 的最短圈. ∎

如果 G 是 $d(\geqslant 2)$ 正则连通图, 且不为 K_4, K_5 或者 $K_{3,3}$, 那么称 G 为 λ''_s 图 (λ''_s-graph). 由定理 16.6.4 知, 对任何 λ''_s 图 G, $\lambda''_s(G) \leqslant g(d-2)$. 设 G 是 λ''_s 图. 若 $\lambda''_s(G) = g(d-2)$, 则称 G 为 λ''_s 优的 (λ''_s-optimal); 若 $\lambda''_s(G) < g(d-2)$, 则称 G 为 λ''_s 非优的 (λ''_s-non-optimal).

我们的兴趣是刻画 λ''_s 优图的特征以及确定一些著名网络的 λ''_s 值. 对于点可迁的 λ''_s 图, Xu 和 Liu[333] 得到一个类似于定理 16.3.3 的结果. 为了介绍这个结果, 首先证明两个引理.

引理 16.6.5 (Xu 和 Liu[333]) 设 G 是 $d(\geqslant 3)$ 正则的 λ''_s 图, $R \subset V(G)$, U 是 $G - E_G(R)$ 中奇异点集. 如果 $U \subseteq R$ 且满足下列条件之一, 那么 $|R| < g(G)$.

(a) $d_G(R) \leqslant \lambda''_s(G)$;

(b) $d_G(R) \leqslant \lambda''_s(G) + 1$ 且 $|U| \geqslant 2$ 或者 $d \geqslant 4$;

(c) $d_G(R) \leqslant \lambda''_s(G) + 1$, $|U| = 1, d = 3$ 且 R 不含 G 的 λ''_s 分片.

证明 令 $g = g(G)$. 因为 G 是 λ''_s 图, 由定理 16.6.3 知, $\lambda''_s(G) \leqslant g(d-2)$. (反证) 假设 $|R| \geqslant g$.

如果 $G[R]$ 不含圈, 那么 $|E(G[R])| \leqslant |R| - 1$ 且得到如下矛盾:

$$\begin{aligned} g(d-2)+1 \geqslant \lambda''_s(G)+1 \geqslant d_G(R) &= |R|d - 2|E(G[R])| \\ &\geqslant |R|d - 2(|R|-1) = |R|(d-2)+2 \\ &\geqslant g(d-2)+2. \end{aligned}$$

如果 $G[R]$ 含圈. 令 R' 是 $G[R]$ 中的极大 2 连通子图之并的顶点集, 则 $U \subseteq R \setminus R'$. 因为对任何 $u, v \in R'$, u 和 v 在 $R \setminus R'$ 中的任何邻点是不连通的, 所以 $G - E_G(R')$

不含奇异点. 因此, $E_G(R')$ 是G 中的2 超边割, $d_G(R') \geqslant \lambda_s''(G)$. 又因为对每条边$e \in E_G(R', R\setminus R')$, e 与某个点 $z \in U$ 关联, 或者 $G[R\setminus R']$ 中存在一条路连接e 到 $z \in U$. 而且, 如果$e, e' \in E_G(R', R\setminus R')$ 是不同的, 那么对应的两个顶点$z, z' \in U$ 也是不同的. 因为$U \subseteq R\setminus R'$, 所以

$$|E_G(R', R\setminus R')| \leqslant |U|, \quad |E_G(R\setminus R', \overline{R})| \geqslant |U|(d-1).$$

因此,

$$\begin{aligned} d_G(R') &= d_G(R) - |E_G(R\setminus R', \overline{R})| + |E_G(R', R\setminus R')| \\ &\leqslant d_G(R) - |U|(d-1) + |U| \\ &= d_G(R) - |U|(d-2). \end{aligned}$$

于是,

$$\lambda_s''(G) \leqslant d_G(R') \leqslant d_G(R) - |U|(d-2). \tag{16.6.1}$$

如果$d_G(R) \leqslant \lambda_s''(G)$, 那么由式 (16.6.1) 得到矛盾:

$$\lambda_s''(G) \leqslant d_G(R) - 1 \leqslant \lambda_s''(G) - 1.$$

如果$d_G(R) \leqslant \lambda_s''(G) + 1$ 且$|U| \geqslant 2$ 或者$d \geqslant 4$, 那么由式 (16.6.1) 得到矛盾:

$$\lambda_s''(G) \leqslant d_G(R) - 2 = \lambda_s''(G) - 1.$$

如果$d_G(R) \leqslant \lambda_s''(G) + 1, |U| = 1, d = 3$, 那么由式 (16.6.1) 得$d_G(R') = \lambda_s''(G)$. 因此, R' 是G 的被包含在R 中的λ_s'' 分片, 与条件 (c) 矛盾. 引理成立. ∎

引理 16.6.6 (Xu 和 Liu[333]) 设G 是d 正则连通图, $\lambda_s''(G) < g(d-2)$, $d \geqslant 3$. 如果X 和X' 是G 的任意两个不同的λ_s'' 原子, 那么 $|X \cap X'| < g$. 而且, 对任何$d\,(d \geqslant 4,\ d \neq 5)$, 都有 $X \cap X' = \emptyset$.

证明 因为X 是G 的λ_s'' 原子, 所以$|X| \geqslant g$. 如果$|X| = g$, 那么$G[X]$ 是长为g 的圈. 因此, 得矛盾如下:

$$g(k-2) = d_G(X) = \lambda_s''(G) < g(k-2).$$

于是, $|X| > g$. 令

$$A = X \cap X', \quad B = X \cap \overline{X'}, \quad C = \overline{X} \cap X' \quad D = \overline{X} \cap \overline{X'}.$$

因为X 和X' 是G 的不同的λ_s'' 原子, 所以$|D| \geqslant |A|$, $|B| = |C| = |X| - |A| \geqslant 1$.

首先证明$|A| < g$. 如果$d_G(A) \leqslant \lambda_s''(G)$, 那么$G - E_G(A)$ 含奇异点 (若不然, A 是G 的比X 更小的λ_s'' 原子. 因此, 由引理 16.6.5 有, $|A| < g$. 如果$d_G(A) > \lambda_s''(G)$, 那么

$$d_G(D) = d_G(X \cup X') \leqslant d_G(X) + d_G(X') - d_G(X \cap X') < \lambda_s''(G).$$

这意味着 $G-E_G(D)$ 含奇异点 (若不然, $E_G(D)$ 是 G 的 2 超边割, 而且 $|E_G(D)|\leqslant \lambda_s''(G)$, 矛盾), 而且这些奇异点都在 D 中. 因此, 由引理 16.6.5 有, $|D|<g$. 于是, $|A|\leqslant|D|<g$.

现在证明: $|A|=0$ 对任何 d $(d\geqslant 4,\ k\neq 5)$ 成立. (反证) 假定 $|A|>0$. 因为 $|A|<g$, 所以 $G[A]$ 不含圈, 即 $G-E_G(A)$ 含奇异点, 设为 y. 那么 $y\in A$. 若 $|E_G(y,C)|>|E_G(y,B)|$, 则考虑集 $X\setminus\{y\}$; 若 $|E_G(y,C)|<|E_G(y,B)|$, 则考虑集 $X'\setminus\{y\}$. 于是,

$$\begin{aligned} d_G(X\setminus\{y\}) &\leqslant d_G(X)-|E_G(y,D)|-|E_G(y,C)|+|E_G(y,B)|+1 \\ &\leqslant d_G(X)=\lambda_s''(G). \end{aligned} \tag{16.6.2}$$

因此, $G-E_G(X\setminus\{y\})$ 包含奇异点, 而且都在 $X\setminus\{y\}$ 中. 由引理 16.6.5, $|X\setminus\{y\}|<g$. 于是得矛盾:

$$g<|X|=|X\setminus\{y\}|+1\leqslant g.$$

因此, 只需考虑 $|E_G(y,C)|=|E_G(y,B)|$. 注意到在这种情况下, 不等式 (16.6.2) 不成立仅当 $|(y,D)|=0$ 且 y 是 $G-E_G(A)$ 中的 1 度点. 因此, $d=d_G(y)=|(y,C)|+|(y,B)|+1$. 于是, 我们仅需要考虑 d 是奇数的情形.

设 W 是 $G[A]$ 中含 y 的连通分支的顶点集. 因为 W 至少包含两个 $G-E_G(A)$ 中的 1 度点且 $W\subseteq A$, 所以, $2\leqslant|W|<g$. 令

$$Y=\begin{cases} X\setminus W, & \text{若 } |E_G(W,B)|\leqslant|E_G(W,C)|; \\ X'\setminus W, & \text{若 } |E_G(W,B)|\geqslant|E_G(W,C)|. \end{cases}$$

那么, $\emptyset\neq Y\subset X$, 且

$$d_G(Y)=d_G(X)-|E_G(W,C)|-|E_G(W,D)|+|E_G(W,B)|\leqslant d_G(X)=\lambda_s''(G).$$

由引理 16.6.5, 这意味着 $|Y|<g$.

因为 d 是奇数, 而且 $d\geqslant 7$, 所以 y 在 B 和 C 中分别至少有 3 个邻点. 我们断定: y 的任何两个不同的邻点在 $G[Y]$ 的不同连通分支中. (反证) 选取 y 的两个不同邻点 y_1 和 y_2 使得它们在 $G[Y]$ 中的距离尽可能的小. 令 P 是 $G[Y]$ 中最短 y_1y_2 路. 显然, P 不含 y 的其他邻点. 因此, P 的长度 $\varepsilon(P)\leqslant|Y|-2\leqslant g-3$. 于是, 圈 yy_1+P+y_2y 的长度小于 g, 矛盾.

因此, y 在 Y 中的邻点属于 $G[Y]$ 的不同连通分支. 因为 $|Y|<g$, 我们能选取 $G[Y]$ 的一个连通分支 H 使得它的阶至多为 $\lfloor\frac{1}{3}g\rfloor$. 令 $z\in V(H)$ 是 y 的邻点, 则 $z\in B$. 而且, 我们断定: $d_H(z)\geqslant 2$. 事实上, 如果 z 是 $G[H]$ 中的奇异点, 那么 $d_G(X')\leqslant\lambda_s''(G)+1$, 而且 $G-E_G(X')$ 中的所有奇异点都在 X' 中, 其中 $X'=X\setminus\{y\}$. 由引理 16.6.5 有, $|X|-1<g$, 即 $|X|\leqslant g$, 矛盾.

设 L 是 H 中不含 z 的最长路, 两个不同的端点分别为 a 和 b. 那么 L 的长至多为 $\lfloor \frac{1}{3}g \rfloor - 1$. 因为 $d_H(a) = d_H(b) = 1$, 所以存在 $c, d \in W \setminus \{y\}$ 使得它们分别是 a 和 b 的邻点. 如果 $c = d$, 那么圈 $ac + cb + L$ 的长为 $2 + \varepsilon(L) \leqslant 2 + \lfloor \frac{1}{3}g \rfloor - 1 < g$, 这不可能. 因此, $c \neq d$.

因为 $G[W]$ 是树, 令 Q 和 R 是 $G[W]$ 中唯一的 yc 路和 yd 路, e 是 Q 与 R 的最后一个公共点. 因为 $e \neq y$ 而且

$$\varepsilon(Q) + \varepsilon(R) + \varepsilon(Q(c,e) \cup R(e,d)) = 2[\varepsilon(Q) + \varepsilon(R(e,d))] \leqslant 2(g-2).$$

所以, $\varepsilon(Q)$, $\varepsilon(R)$ 和 $\varepsilon(Q(c,e) \cup R(e,d))$ 至少有一个最多为 $\lfloor \frac{2}{3}(g-2) \rfloor$.

如果 $\varepsilon(Q) \leqslant \lfloor \frac{2}{3}(g-2) \rfloor$, 那么, 考虑圈 $C_1 = L(a,z) + yz + Q + ca$ 的长, 得矛盾如下:

$$g \leqslant \varepsilon(C_1) \leqslant \left(\left\lfloor \frac{g}{3} \right\rfloor - 2\right) + 2 + \left\lfloor \frac{2(g-2)}{3} \right\rfloor \leqslant g - 1.$$

如果 $\varepsilon(R) \leqslant \lfloor \frac{2}{3}(g-2) \rfloor$, 那么, 考虑圈 $C_2 = zy + R + db + L(d,z)$ 的长, 得矛盾如下:

$$g \leqslant \varepsilon(C_2) \leqslant 2 + \left\lfloor \frac{2(g-2)}{3} \right\rfloor + \left(\left\lfloor \frac{g}{3} \right\rfloor - 2\right) \leqslant g - 1.$$

如果 $\varepsilon(Q)$ 和 $\varepsilon(R)$ 都大于 $\lfloor \frac{2}{3}(g-2) \rfloor$, 那么 $\varepsilon(Q(c,e) \cup R(e,d)) \leqslant \lfloor \frac{2}{3}(g-2) \rfloor$. 于是, 考虑圈 $C_3 = ac + Q(c,e) \cup R(e,d) + db + L$ 的长, 得矛盾如下:

$$g \leqslant \varepsilon(C_3) \leqslant 2 + \left\lfloor \frac{2(g-2)}{3} \right\rfloor + \left(\left\lfloor \frac{g}{3} \right\rfloor - 1\right) \leqslant g - 1.$$

引理得证. ∎

下面的定理类似于点可迁 λ_s 图的原子分解定理 16.3.2, 其证明留给读者作为练习或者参见 [344].

定理 16.6.7 (Xu 和 Xu[344]) 设 G 是点可迁连通图, 正则度 $d \geqslant 4$, X 是 λ_s'' 原子. 如果 G 是 λ_s'' 非优的, 那么

(a) $G[X]$ 是点可迁的;

(b) 存在 $V(G)$ 的划分 $\{X_1, X_2, \cdots, X_m\}$ 使得 $G[X_i] \cong G[X]$ 对每个 $i = 1, 2, \cdots, m$, $m \geqslant 2$. ∎

定理 16.6.8 (Xu 和 Liu[333]) 设 G 是点可迁连通图, 阶 $n \geqslant 7$, 围长 g 且度 d ($\geqslant 4$ 且 $\neq 5$). 如果 $g \geqslant 5$, 则 $\lambda_s'' = g(d-2)$. 而且, 如果 $\lambda_s'' < g(d-2)$, 那么 $\lambda_s'' | n$ 或者 $\lambda_s'' | 2n$.

证明 由定理 16.6.3 知 $\lambda_s''(G)$ 存在, 而且 $\lambda_s''(G) \leqslant g(k-2)$. 现在假定 $\lambda_s''(G) < g(k-2)$ 并且令 X 是 G 的 λ_s'' 原子. 只需证明: $g = 3$ 或者 4 且 $\lambda_s'' | n$ 或者 $\lambda_s'' | 2n$.

设 X 是 G 的 λ_s'' 原子, 则由引理 16.6.7, $G[X]$ 是点可迁的, 而且存在整数 m ($\geqslant 2$) 使得 $|X| = n/m$. 令 $G[X]$ 的正则度为 t, 则 $2 \leqslant t \leqslant k-1$, 而且

$$\lambda_s''(G) = d_G(X) = (d-t)|X| = (d-t)n/m. \qquad (16.6.3)$$

因为 $G[X]$ 包含长度至少为 g 的圈, 所以由定理 1.2.3 和式 (16.6.3), 得

$$g(d-2) > \lambda_s''(G) = (d-t)|X| \geqslant (d-t)h(t,g). \tag{16.6.4}$$

如果 g 是偶数, 那么由定理 1.2.3 和式 (16.6.4), 得

$$0 < g(d-2) - (d-t)2[1 + (t-1) + \cdots + (t-1)^{(g-2)/2}]. \tag{16.6.5}$$

式 (16.6.5) 的右边是 t 的增函数, 且是 g 的减函数, 不难证明不等式 (16.6.5) 成立仅当 $g = 4$ 和 $t = d-1$. 因此, 由式 (16.6.3), 有 $\lambda_s''(G) = |X| = n/m$.

如果 g 是奇数, 那么由定理 1.2.3 和式 (16.6.4), 得

$$0 < g(d-2) - (d-t)[1 + t + t(t-1) + \cdots + t(t-1)^{(g-3)/2}]. \tag{16.6.6}$$

式 (16.6.6) 的右边是 t 的增函数, 且是 g 的减函数, 不难证明不等式 (16.6.6) 成立仅当 $g = 3$ 和 $t = d-2$ 或者 $t = d-1$. 如果 $t = d-1$, 那么由式 (16.6.3), 有 $\lambda_s''(G) = |X| = n/m$. 如果 $t = k-2$, 那么由式 (16.6.3), 有 $\lambda_s''(G) = 2|X| = 2n/m$.

定理得证. ∎

注 存在 5 正则点可迁连通图 G 使得 $\lambda_s''(G) < g(5-2)$. 例如, $C_n\ (n \geqslant 4)$ 和 K_2 的字典乘积图 $C_n[K_2]$. 图 16.2 中所示的是 $C_7[K_2]$. 因为 C_n 和 K_2 都是点可迁的, 所以 $C_n[K_2]$ 是点可迁的 (参见习题 4.8). 显然, $C_n[K_2]$ 有正则度 $d = 5$, 围长 $g = 3$ 并且任何子图 K_4 的顶点集是 $C_n[K_2]$ 中 λ_s'' 原子. 因此, $\lambda_s'' = 8 < 3(5-2)$. 任何有一条公共边的两个 K_4 的顶点集 X 和 X' 都是 λ_s'' 原子, $|X \cap X'| = 2 < 3 = g$. 这个事实说明引理 16.6.6 的后部分结论对 $d = 5$ 不成立.

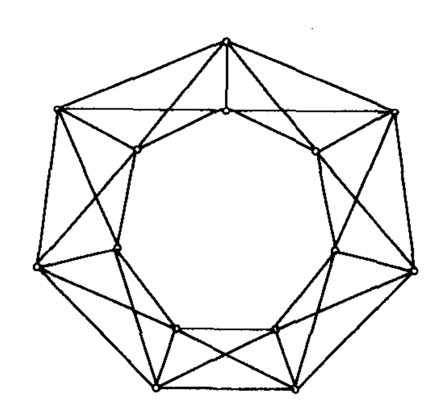


图 16.2 点可迁图, 其中 $d = 5$, $\lambda_s'' = 8$

在结束这一章讨论之前, 我们要提及还有些作者, 如 Fàbrega 和 Fiol[104] 从另一方面推广了限制连通度概念, 叫做 *h* 强连通度 (*h*-extra-connectivity) 和 *h* 强边连通度 (*h*-extra-edge-connectivity), 分别记为 $\kappa_o^{(h)}(G)$ 和 $\lambda_o^{(h)}(G)$, 它们分别定义

为 $S \subset V(G)$ 中最小点数和 $S \subset E(G)$ 中最小边数使得 $G-S$ 不连通而且每个连通分支至少含 $h+1$ 个顶点. 这两个连通度概念也得到了深入研究, 有兴趣的读者可参见 [13, 14, 42, 104, 114, 165, 243, 254, 349], 这里不再详述. 但容易看到, h 强连通度, h 超连通度和 h 限制连通度之间有如下关系:

$$\kappa_o^{(h)}(G) \leqslant \kappa_s^{(h)}(G) \leqslant \kappa_r^{(h)}(G), \qquad \lambda_o^{(h)}(G) \leqslant \lambda_s^{(h)}(G) \leqslant \lambda_r^{(h)}(G).$$

§16.7 某些网络的限制连通度和超连通度

这一节介绍目前为止已经确定的某些著名网络的限制连通度和超连通度.

1. 超立方体网络 Q_n

Esfahanian[97] 确定了: 当 $n \geqslant 3$ 时, $\kappa_s(Q_n) = \kappa_r(Q_n) = 2n-2$; 当 $n \geqslant 2$ 时, $\lambda_r(Q_n) = 2n-2$, 因而是 λ_r 优的. 对于任何 n 和 $h\,(0 \leqslant h < n)$ Xu[326] 确定了 $\lambda_r^{(h)}(Q_n) = (n-h)2^h$, 因而是 $\lambda_r^{(h)}$ 优的. 当 $n \geqslant 3$ 时, Litifi 等 [203] 确定了

$$\kappa_r^{(h)}(Q_n) = (n-h)\,2^h, \quad \forall\ h,\ 0 \leqslant h \leqslant \left\lfloor \frac{1}{2}n \right\rfloor.$$

徐俊明等 [349, 359] 确定了: 当 $n \geqslant 4$ 时, $\kappa_o^{(2)}(Q_n) = 3n-5$; $\lambda_o^{(2)}(Q_n) = 3n-4$.

2. 折叠立方体网络 FQ_n

朱强和徐俊明 [359] 确定了: 当 $n \geqslant 4$ 时, $\lambda_r(FQ_n) = 2n$, 因而是 λ_r 优的. 徐俊明等 [349] 确定了: 当 $n \geqslant 4$ 时, $\kappa_s(FQ_n) = \kappa_r(FQ_n) = 2n$, 当 $n \geqslant 8$ 时, $\kappa_s^{(2)}(FQ_n) = 4n-4$. 侯新民和徐俊明 [165] 确定了: 当 $n \geqslant 7$ 时, $\kappa_o^{(2)}(FQ_n) = 3n-2$.

3. 交叉立方体网络 CQ_n

徐俊明 [329] 确定了当 $n \geqslant 2$ 时, $\lambda_r(CQ_n) = 2n-2$, 因而是 λ_r 优的.

4. Möbus 立方体网络 MQ_n

张修梅和徐俊明 [356] 确定了: 当 $n \geqslant 2$ 时, $\lambda_r(MQ_n) = 2n-2$, 因而是 λ_r 优的.

5. 星网络 S_n

Akers 和 Krishnamurthy[5] 确定了: 当 $n \geqslant 3$ 时, $\lambda_r(S_n) = 2n-4$, 因而是 λ_r 优的. Rouskov 等 [271] 和聂晓冬等 [249] 独立地确定了: 当 $n \geqslant 3$ 时, $\kappa_s(S_n) = \kappa_r(S_n) = 2n-4$.

6. 无向环面网 $C(d_1, d_2, \cdots, d_n)$

徐俊明和徐克力 [344] 确定了: 如果 $d_i \geqslant 4$ 对每个 $i = 1, 2, \cdots, n$ 成立, 那么 $\lambda_r(C(d_1, d_2, \cdots, d_n)) = 4n-2$, 因而是 λ_r 优的.

7. 循环无向图 $G(n; s_1, s_2, \cdots, s_d)$

李乔良和李乔 [215] 证明了: 当 $k \geqslant 2$ 时, $G(n;\ s_1, s_2, \cdots, s_d)$ 是 λ_r 优的, 即 $\lambda_r(G(n;\ s_1, s_2, \cdots, s_d)) = 4d-2$, 当且仅当下列条件之一成立:

(1) $s_d < \frac{1}{2}n$;

(2) $s_d = \frac{1}{2}n$ 且 g.c.d.$(n, s_1, s_2, \cdots, s_{d-1}) = 1$;

(3) $s_d = \frac{1}{2}n$ 且 g.c.d.$(n, s_1, s_2, \cdots, s_{d-1}) = 2$, $n \geqslant 8d-8$.

注意到循环无向图的围长是 $g = 3$ 或者 4. 当 $n \geqslant 8$, $s_d < \frac{n}{2}$, $d \geqslant 2$ 时, 李乔良 [214] 确定了:

(1) 当 $g = 3$ 时,

$$\lambda_s''(G(n; s_1, s_2, \cdots, s_d)) = \begin{cases} 3(2d-2), & t = 1 \text{ 或 } k = 2; \\ \min\{3(2d-2),\ \dfrac{2n}{t}\}, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 $t = \max\{t_i : 1 \leqslant i \leqslant d\}$, $t_i = \text{g.c.d}\,(n, s_1, \cdots, s_{i-1}, s_{i+1}, \cdots, s_d\}$;

(2) 当 $g = 4$ 时, $\lambda_s''(G(n; s_1, s_2, \cdots, s_d)) = 4(2d-2)$, 因而是 λ_s'' 优的.

8. de Brujin 有向网络 $B(d,k)$

对于 $k \geqslant 1$ 和 $d \geqslant 2$, 徐俊明和吕敏 [336, 234] 确定了:

$$\lambda_s(B(d,k)) = \begin{cases} \infty, & k = 1,\ d = 2, 3,\ \text{或者 } k = d = 2; \\ 2d-4, & k = 1,\ d \geqslant 4; \\ 2d-2, & \text{其他}; \end{cases}$$

$$\kappa_s(B(d,n)) = \begin{cases} \infty, & k = 1, \text{或者 } k = 2, d = 2, 3, \\ & \text{或者 } k = 3, d = 2; \\ 4d-8, & k = 2, d \geqslant 4; \\ 4d-4, & \text{其他}. \end{cases}$$

9. Kautz 有向网络 $K(d,k)$

对于 $k \geqslant 1$ 和 $d \geqslant 2$, 范英梅和徐俊明 [107] 确定了:

$$\lambda_s(K(d,k)) = \begin{cases} \infty, & k = 1,\ d = 2; \\ 2d-2, & \text{其他}. \end{cases}$$

徐俊明和吕敏 [234]) 确定了:

$$\kappa_s(K(d,n)) = \begin{cases} \infty, & k = d = 2 \\ 4d-4, & \text{其他}. \end{cases}$$

10. de Brujin 无向网络 $UB(d,k)$

对于 $k \geqslant 1$ 和 $d \geqslant 2$, 徐俊明, 吕敏和范英梅 [337] 确定了:

$$\lambda_s(UB(d,k)) = \begin{cases} \infty, & k = 1,\ d = 2, 3; \\ 2d-4, & k = 1,\ d \geqslant 4; \\ 4d-5, & k = 2, d \geqslant 2, \text{或者 } k = 3,\ d = 2; \\ 4d-4, & k \geqslant 3,\ d \geqslant 3, \text{或者 } k \geqslant 4,\ d = 2. \end{cases}$$

11. Kautz 无向网络 $UK(d,k)$

对于 $k \geqslant 1$ 和 $d \geqslant 2$, 范英梅, 徐俊明和吕敏 [108] 确定了:

$$\lambda_r(UK(d,k)) = \begin{cases} \infty, & k=1,\ d=2; \\ 3, & k=d=2; \\ 2d-2, & k=1,\ d \geqslant 3; \\ 4d-4, & k \geqslant 2,\ d \geqslant 3. \end{cases}$$

习　　题

16.1 证明: 若 $n\,(\geq 4)$ 阶图 G 的任意一对不相邻顶点 x 和 y 满足 $d_G(x)+d_G(y) \geqslant n+1$, 或 G 的直径为 2, $\delta(G) \geqslant 3$ 并且不含三角形, 则 G 是 λ_r 优的.

(王应前和李乔 [307], [308])

16.2 证明: 若 G 的任何不在三角形上的不相邻两顶点 x 和 y 满足 $|N_G(u) \cap N_G(v)| \geqslant 2$ 且 G 的任何不相邻两顶点 x 和 y, 其中之一在三角形上, 满足 $|N_G(u) \cap N_G(v)| \geqslant 3$, 则 λ_r 图 G 是 λ_r 优的. (Hellwing 和 Volkmann[155])

16.3 证明引理 16.3.4 及其推论 1 和推论 2.

16.4 证明定理 16.3.6

16.5 证明定理 16.4.5 的推论 1, 推论 2 和推论 3.

16.6 证明定理 16.5.2 的推论 1, 推论 2, 推论 3 和推论 4.

16.7 证明定理 16.6.1.

16.8 证明定理 16.6.7.

16.9 图 G 的置换图 (permutation graph) G^π 是由 G 的两个拷贝, 并在它们之间添加一个完备匹配而得到的图. 设 G 是 n 阶 d 正则 d 连通图. 证明

(a) $\kappa_s(G^\pi) = \kappa_r(G^\pi) = d+1$ 当且仅当 $n = d+1$, $d \geqslant 3$;

(b) $d+1 < \kappa_s(G^\pi) \leqslant \kappa_r(G^\pi) \leqslant 2d$ 当且仅当 $n \geqslant d+2$, $d \geqslant 2$;

(c) 若 G 不含三角形, $d \geqslant 2$, 则 $d+1 < \kappa_s(G^\pi) = \kappa_r(G^\pi) = 2d$.

(d) $\lambda_s(G^\pi) = d+1$ 当且仅当 $n = d+1$, $d \geqslant 1$;

(e) $d+1 < \lambda_s(G^\pi) \leqslant 2d$ 当且仅当 $n \geqslant d+2$, $d \geqslant 1$;

(f) 若 G 不含三角形, $d \geqslant 1$, 则 $\lambda_s(G^\pi) = 2d$.

参 考 文 献

[1] Aguiló F, Fiol M A, Garcia C. Triple loop networks with small transmission delay. *Discrete Mathematics*, **167/168** (1997), 3~16

[2] Aguiló F, Fiol M A. An efficient algorithm to find optimal double loop networks. *Discrete Mathematics*, **138** (1995), 15~29

[3] Aigner M. On the line graph of a directed graph. *Mathematische Zeitschrift*, **102** (1967), 56~61

[4] Akers S B, Harel D, Krishnamurthy B. The star graph, An attrative alternative to the n-cube. *Proceedings of International Conference on Parallel Processing*, 1987, 393~400

[5] Akers S B, Krishnamurthy B. A group-theoretic model for symmetric interconnection networks. *Proceedings of International Conference on Parallel Processing*, 1986, 216~223

[6] Akers S B, Krishnamurthy B. On group graphs and their fault-tolerance. *IEEE Transactions on Computers*, **36** (1987), 885~888

[7] Akers S B, Krishnamurthy B. A group-theoretic method for symmetric interconnection networks. *IEEE Transactions on Computers*, **38** (1989), 555~565

[8] Alspach B. Cayley graphs with optimal fault tolerance. *IEEE Transactions on Computers*, **41** (10) (1992), 1337~1339

[9] Andre F, Verjus J P. *Hypercubes and Distributed Computers*. Amsterdam, New York, Oxford: North-Halland, 1989

[10] Annexstein F, Baumlag M, Rosenberg A L. Group action graphs and parallel architectures. *SIAM Journal on Computing*, **19** (3) (1990), 544~569

[11] Armstrong J R, Gray F G. Fault diagnosis in a Boolean n-cube array of microprocessors. *IEEE Transactions on Computers*, **30** (8) (1981), 587~590

[12] Avizienis A. Fault tolerant computing–an overview. *IEEE Transactions on Computers*, **4** (1971), 5~8

[13] Balbuena C. Extraconnectivity of s-geodetic digraphs and graphs. *Discrete Mathematics*, **195** (1999), 39~52

[14] Balbuena C, Carmona A, Fàbrega J, Fiol M A. Extraconnectivity of graphs with large minimum degree and girth. *Discrete Mathematics*, **167/168** (1997), 85~100

[15] Ball M O. Complexity of network reliability computation. *Networks*, **10** (1980), 153~165

[16] Bannai E, Ito T. On finite Moore graphs. *Journal of the Faculty of Science*. University of Tokyo, **20** (1973), 191~208

[17] Bannai E, Ito T. Regular graphs with excess one. *Discrete Mathematics*, **37** (1981), 147~158

[18] Barnes G H, Brown R M, Kato M, Kuck D J, Slotnick D L, Stokes R A. The ILLIAC IV computers. *IEEE Transactions on Computers*, **17** (1968), 746~757

[19] Baskoro E T, Miller M, Plesnik J, Znam S. Digraphs of degree 3 and order close to the Moore bound. *Journal of Graph Theory*, **20** (1995), 339~349

[20] Bauer D, Tindell R. The connectivity of line and total graphs. *Journal of Graph Theory*, **6** (1982), 197~203

[21] Beněs V. Permutation group, complexes, and rearrangeable multistage connecting networks. *Bell System Technical Journal*, **43** (1964), 1619~1640

[22] Bermond J C, Bollobás B. The diameter of graphs – a survey. *Congresses Numerantium*, **32** (1981), 3~27

[23] Bermond J C, Bond J, Paoli M, Peyrat C. Graphs and interconnection networks: diameter and vulnerability. *London Mathematical Society Lecture Note*, Series, **82** (1983), 1∼30

[24] Bermond J C, Comellas F, Hsu D F. Distributed loop computer networks: a survey. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, **24** (1995), 2∼10

[25] Bermond J C, Delorme C, Fahri G. Large graphs with given degree and diameter. *Journal of Combinatorial Theory*, Series B, **36** (1984), 32∼48

[26] Bermond J C, Delorme C, Quisquater J J. Strategies for interconnection networks: Some methods from graph theory. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, **3** (1986), 433∼449

[27] Bermond J C, Delorme C, Quisquater J J. Table of large (Δ, D)-graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **37/38** (1992), 572∼577

[28] Bermond J C, Homobono N, Peyrat C. Large fault-tolerant interconnection networks. *Graphs and Combinatorics*, **5** (1989), 107∼123

[29] Bermond J C, Homobono N, Peyrat C. Connectivity of Kautz networks. *Discrete Mathematics*, **114** (1993), 51∼62

[30] Bermond J C, Illiandes G, Peyrat C. An optimization problem in distributed loop computer networks. *Proceedings of the 3rd International Conference on Combinatorial Mathematics*. New York, 1985.

[31] Bermond J C, Peyrat C. De Brujin and Kautz networks: a competitor for the hypercube? In *Hypercube and Distributed Computers* (F. Andre and J. P. Verjus eds.). North-Holland: Elsevier Science Publishers, 1989, 278∼293

[32] Bhatt S N, Leighton F. A framework for solving VLSI graph layout problems. *Journal of Computer and System Science*, **28** (1984), 300∼343

[33] Bhuyan L N, Agrawal D P. Generalized hypercube and hyperbus structures for a computer network. *IEEE Transactions on Computers*, **33** (4) (1984), 323∼333

[34] Biggs N. Algebraic Graph Theory. *Cambridge Tracts in Mathematics*, Vol. **67**. Cambridge: Cambridge University Press, 1974

[35] Boesch F T. On unreliability polynomials and graph connectivity in reliable network synthesis. *Journal of Graph Theory*, **10** (3) (1986), 339∼352

[36] Boesch F T, Harary F, Kabell J A. Graphs as models of communication network vulnerability. *Networks*, **11** (1981), 57∼63

[37] Boesch F. Tindell R. Circulants and their connectivities. *J. Graph Theory*, **8** (1984), 487∼499

[38] Bond J, Peyrat C. Diameter vulnerability in networks. In *Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science* (Pro. Fifth Quardrennial International Conference on the Theory and Applications of Graphs with Special Emphasis on Algorithms and Computer Science Applications, 1984, Y. Alavi, G. Chartrand, L. Lesniak, D. R. Lick, and C. E. Wall eds.), John Wiley & Sons, 1984, 123∼149

[39] Bond J, Peyrat C. Diameter vulnerability of some large interconnction networks. *Congressus Numerantium*, **66** (1988), 267∼282

[40] Bondy J A, Murty U S R. *Graph Theory with Applications*. London and Basingstoke: MacMillan Press LTD, 1976

[41] Bondy J A, Hell P. Counterexamples to theorems of Menger type for the diameter. *Discrete Mathematics*, **44** (1983), 217∼220

[42] Bonsma P, Ueffing N, Volkmann L. Edge-cuts leaving components of order at least three. *Discrete Mathematics*, **256** (2002), 431~439

[43] Bose B, Broeg B, Kwon Y, Ashir Y. Lee distance and topological properties of k-ary n -cubes. *IEEE Transactions on Computers*, **44** (8) (1995), 1021~1030

[44] Bouabdallah A, Sotteau D. On the edge-forwarding index problem for small graphs. *Networks*, **23** (1993), 249~255

[45] Boyles M, Exoo G. A counterexample to a conjecture on paths of bounded length. *Journal of Graph Theory*, **6** (1982), 205~209

[46] Bridges W G, Toueg S. On the impossibility of directed Moore graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, Series B, **29** (1980), 319~341

[47] Broder A, Dolev D, Fischer M, Simons B. Efficient fault tolerant routings in networks. *Proceedings of the 16th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 1984, 536~541

[48] Brunat J M, Espona M, Fiol M A, Serra O. Cayley digraphs from complete generalized cycles. *European Journal of Combinatorics*, **20** (1999), 337~349

[49] Caccetta L. Vulnerability of communication networks. *Networks*, **14** (1984), 141~146

[50] Caccetta L. Graph theory in network design and analysis. In *Recent Studies in Graph Theory* (V. R. Kulli ed.), Vishwa International Publications, 29~63

[51] Campbell L, Carlsson G E, Dinneen M J, Faber V, Fellows M R, Langston M A, Moore J W, Muchael A P, Sexton H B. Small diameter symmetric networks from linear groups. *IEEE Transactions on Computers*, **41** (2) (1992), 218~220

[52] Cao F, Du D Z, Hsu F D, Teng S H. Fault tolerance properties of pyramid networks. *IEEE Transactions on computers*, **46** (1) (1999), 88~93

[53] Cao F, Du D Z, Hsu F D, Wan P. Fault-tolerant routing in butterfly networks. *Technical Report*, TR95-073. Department of Computer Science, University of Minnesota, 1995

[54] Carlsson G E, Cruthirds J E, Sexton H B, Wright C G. Interconnection networks based on a generalization of cube-connected cycles. *IEEE Transactions on Computers*, **34** (8) (1985), 769~772

[55] Cayley A. The theory of graphs, graphical representation. *Mathematical Papers*, Cambridge, **10** (1895), 26~28

[56] Chang C-P, Sung T-Y, Hsu L-H. Edge congestion and topological properties of crossed cubes. *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems*, **11**(1) (2000),64~79

[57] Chao C Y, Wells J G. A class of vertex-transitive digraphs. *Journal of Combinatorial Theory*, Series B, **14** (1973), 146~255

[58] Chartrand G, Sterwart M J. The connectivity of line graphs. *Mathematische Annalen*, **18** (1969), 170~174

[59] Chaty G. On critically and minimally k vertex (arc) stronly connected digraphs. *Proceedings of the Keszthely*, (1976), 193~203

[60] Chen C Y, Hwang F K. The minimum distance diagram of double-loop networks. *IEEE Transactions on Computers*, **49** (9) (2000), 977~979

[61] Chen M S, Shin K G. Processor allocation in an n -cube multiprocessor using Gray codes. *IEEE Transactions on Computers*, **36** (12) (1987), 396~407

[62] 陈协彬. 构造k紧优双环网的无限族的新方法. 中国科学, A 辑, **36** (4) (2006), 438~447

[63] Chiue W-S, Shiech B-S. On connectivity of the cartesian product of two graphs. *Applied Mathematics and Computation*, **102**(1999), 129~137

[64] Chung F R K. Problem in *Finite And Infinite Sets. Proc. Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai. Eger. Hungary*. Amsterdam: North-Holland, 1981, 873

[65] Chung F R K. Diameters of communication networks. *Proceeding of Symposia in Applied Mathematics*, **34** (1986), 1~18

[66] Chung F R K. The average distance and the independence number. *Journal of Graph Theory*, **12** (1988), 229~235

[67] Chung F R K, Coffman E G, Reiman M I, Simon B. The forwarding index of communication networks. *IEEE Transactions on Information Theory*, **33** (2) (1987), 224~232

[68] Chung F R K, Garey M R. Diameter bounds for altered graphs. *Journal of Graph Theory*, **8** (4) (1984), 511~534

[69] Comellas F, Gómez J. New large graphs with give degree and diameter. *Graph Theory, Combinatorics and Algorithms*, Vol. **1**, (Yousef Alavi and Allen Schwenk eds.). New York: John Wiley & Sons, Inc. 1995, 221~233

[70] Cull P, Larson S M. The Möbius cubes. *IEEE Transactions on Computers*, **44**(5)(1995), 647~659

[71] Damerell R. On Moore graphs. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **74** (1973), 227~236

[72] Dankelmann P. The diameter of directed graphs. *J. Combinatorial Theory*, **94**(2005), 183~186

[73] Day K, Al-Ayyoub A-E. The cross product of interconnection networks. *IEEE Transations On Parallel and Distrbuted Systems*, **8** (2) (1997), 109~118

[74] De Brujin N G. A combinatorial problem. *Koninklije Nedderlandse van Wetenshappen Proc.*, **49A** (1946), 758~764

[75] Delorme C. Large bipartite graphs with given degree and diameter. *Journal of Graph Theory*, **8** (1985), 325~334

[76] 邓志国, 徐俊明. On diameters of altered graphs, 数学研究, **37** (1) (2004), 35~41

[77] Dinneen M J, Hafner P R. New results for the degree/diameter problem. *Networks*, **24** (1994), 359~367

[78] Dolev D, Halpern J, Simons B, Strong R. A new look at fault tolerant network routing. *Proceedings of the 16th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 1984, 526~535

[79] Du D Z, Hsu D F, Hwang F K, Zhang X M. The Hamiltonian property of generalized de Brujin digraphs. *Journal of Combinatorial Theory*, Series B, **52** (1) (1991), 1~8

[80] Du D Z, Hsu D F, Li Q, Xu J M. A combinatorial problem related to distributed loop networks. *Networks*, **20** (3) (1990), 173~180

[81] Du D Z, Hsu D F, Lyuu Y D. On the diameter vulnerability of Kautz digraphs. *Discrete Mathematics*, **151** (1996), 81~85

[82] Du D Z, Hwang F K. Generalized de Brujin digraphs. *Networks*, **18** (1) (1988), 27~38

[83] Du D Z, Lyuu Y D, Hsu D F. Line digraph iterations and connectivity analysis of de Brujin and Kautz graphs. *IEEE Transactions on Computers*, **42** (5) (1993), 612~616. *idem* **45** (7) (1996), 863

[84] Duh D R, Chen G H. On the Rabin number problem. *Networks*, **30** (1997), 219~230

[85] Duh D R, Chen G H, Fang J F. Algorithms and properties of a new two-level network with folded hypercubes as basic modules. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **6** (7) (1995), 714~723

[86] Duh D R, Chen G H, Hsu D F. Combinatorial properties of generalized hypercube graphs. *Information Processing Letters*, **57** (1996), 41~45

[87] Dyer C R, Rosenfeld A. Triangle cellular automata. *Information and Control*, **48** (1981), 54~69

[88] Efe K. A variation on the hypercube with lower diameter. *IEEE Transactions on Computers*, **40** (11) (1991), 1312~1316

[89] Efe K. The crossed cube architecture for parallel computing. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **3** (5) (1992), 513~524

[90] El-Amawy A, Latifi S. Properties and performance of folded hypercubes. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **2** (3) (1991), 31~42

[91] Elspas B. Topological constraints on interconnection-limited logic. In *Proceedings of the 5th Annual Symposium on Switching Circuit Theory and Logic Design*, **5** (1964), 133~147

[92] Elspas B, Turner J. Graphs with circulant adjacency matrices. *Journal of Combinatorial Theory*, **9** (1970), 297~307

[93] Entringer R C, Jackson D E, Slater P J. Geodetic connectivity of graphs. *IEEE Transactions on Circuits Systems*, **24** (1977), 460~463

[94] Erdös P, Hsu D F. Distributed loop networks with minimum transmission delay. *Theoretical Computer Science*, **100** (1992), 223~241

[95] Escudero M, Fàbrega J, Morillo P. Fault-tolerant routing in double-loop networks. *ARS Combinatorics*, **25A** (1989), 187~198

[96] Esfahanian A H. Lower bounds on the connectivities of a graph. *Journal of Graph Theory*, **9** (1985), 503~511

[97] Esfahanian A H. Generalized measures of fault tolerance with application to n -cube networks. *IEEE Transactions on Computers*, **38** (11) (1989), 1586~1591

[98] Esfahanian A H, Hakimi S L. Fault-tolerant routing in de Brujin communication networks. *IEEE Transactions on Computers*, **34** (9) (1985), 777~788

[99] Esfahanian A H, Hakimi S L. On computing a conditional edge-connectivity of a graph. *Information processing Letters*, **27** (1988), 195~199

[100] Esqué P, Aguiló F, Fiol M A. Double commutative-step digraphs with minimum diameters. *Discrete Mathematics*, **114** (1993), 147~157

[101] Even S, Tarijan R E. Computing on st-numbering. *Theory of Computer Science*, **2** (1976), 339~344

[102] Exoo G. On a measure of communication network vulnerability. *Networks*, **12** (1982), 405~409

[103] Exoo G. On line disjoint paths of bounded length. *Discrete Mathematics*, **44** (1983), 317~318

[104] Fàbrega J, Fiol M A. On the extraconnectivity of graphs. *Discrete Mathematics*, **155** (1996), 49~57

[105] Fan J-X. Hamilton-connectivity and cycle-embedding of the Möbius cubes. *Information Processing Letters*, **82**(2002), 113~117

[106] Fan J-X, Lin X-L, Jia X-H. Node-pancyclicity and edge-pancyclicity of crossed cubes. *Information Processing Letters*, **93**(3)(2005), 133~138

[107] 范英梅, 徐俊明. Kautz 图的限制边连通度. *应用数学*, **17** (3) (2004), 329~332

[108] Fan Y-M, Xu J-M, Lü M. Restricted edge-connectivity of Kautz undirected graphs. *Ars Combinatoria*, **81**(2006), 369~379

[109] Faudree R, Jacobson M, Ordman E, Schelp R, Tuza Z. Menger's Theorem and short paths. *Journal Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computers*, **2** (1987), 235~253

[110] Feldmann R, Unger W. The cube-connected cycles network is a subgraph of the butterfly network. *Parallel Process Letters*, **2** (1992), 13~19

[111] Feldoman P. Fault tolerance of minimal path routings in a network. In *Proceedings of the 17th STOC*, 1985, 327~334

[112] Fellows M, Hell P, Seyffarth K. Large planar graphs with given diameter and maximum degree. *Discrete Applied Mathematics*, **61** (1995), 133~153

[113] Fellows M, Hell P, Seyffarth K. Constructions of large planar graphs with given degree and diameter. *Networks*, **32** (4) (1998), 275~281

[114] Fiol M A, Fàbrega J, Escudero M. Short paths and connectivity in graphs and digraphs. Twelfth British Combinatorial Conference (Norwich, 1989). *Ars Combinatoria*, **29**B (1990), 17~31

[115] Fiol M A, Yebra J L A, Alegre L. Line digraph iterations and (d, k) digraph problem. *IEEE Transactions on Computers*, **33** (5) (1984), 400~403

[116] Fiol M A, Yebra J L, Alegre I, Valero M. A discrete optimization problem in local networks and data alignment. *IEEE Transactions on Computers*, **36** (1987), 702~713

[117] Fiol M A, Yebra L A, de Miquel I A. Line digraph iterations and the (d, k) digraph problem. *IEEE Transactions on Computers*, **33** (5) (1984), 400~403

[118] Flandrin E, Li H. Mengerian properties, Hamilton icity and claw-free graphs. *Networks*, **24** (1994), 660~678

[119] Floyd R W. Algorithm 97: shortest path. *Communications of the Association for Computing Machinery*, **5** (1962), 345

[120] Folkman J H. Regular line-symmetric graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, **3** (1967), 215~232

[121] Fredman M L. New bounds on the complexity of the shortest path problem. *SIAM Journal on Computing*, **5** (1976), 83~89

[122] Garey M R, Johnson D S. *Computers and Intactability. A Guide to the Theory of NP-Completeness*. San Francisco: W. H. Freeman, 1979

[123] Garey M R, Graham R L. On cubical graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, Series B. **18** (1975), 84~95

[124] Gauyacq G. On quasi-Cayley graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **77** (1997), 43~58

[125] Geller D, Harary F. Connectivity in digraphs. in *Recent Trends in Graph Theory* (M. Capobianco, J. B. Frechen and M. Krolik eds.), Lecture Notes in Mathematics, **186**. Springer-Verlag, (1971), 105~115

[126] Godsil C D. Connectivity of minimal Cayley graphs. *Archives of Mathematics* (Basel), **37** (1981), 473~476

[127] Gómez J, Fiol M A, Serra O. On large (Δ, D)-graphs. *Discrete Mathematics*, **114** (1993), 219~235

[128] Gómez J, Pelayo I, Balbuena. New large graphs with given degree and diameter six. *Networks*, **34** (2) (1999), 154~161

[129] Good I J. Normal recurring decimals. *The Journal of London Mathematical Society*, **21** (1946), 167~169

[130] Gottlieb A, Grishman R, Kruskal C P, McAuliffe K P, Rudolph L, Snir M. The NYU Ultracomputer-Designing a MIMD shared memory parallel computers. *IEEE Transactions on Computers*, **32** (1983), 175~187

[131] Granarov L, Kleinrock L, Gerla M. A highly reliable distributed loop network architecture. *Proceedings of the 1980 International Symposium on Fault-Tolerant Computing*, Kyotot, October, 1980

[132] Györi E. On division of graphs to connected subgraphs. In *Combinatorics* (Proceedings of the 5th Hungarian Combinatorial Colloquium, Keszthely, 1976), North-Holland, Amsterdam, 1978, 485~494

[133] Hager M. A mengerian theorem for paths of length at least three. *Journal of Graph Theory*, **10** (1986), 533~540

[134] Hamidoune Y O. Sur les atomes d'un graph oriente. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séancens de l'Académie des Science, Paris*, Series A, **284** (1977), 1253~1256

[135] Hamidoune Y O. An application of connectivity theory in graphs to factorizations of elements in groups. *European Journal of Combinatorics*, **2** (1981), 349~355

[136] Hamidoune Y O. Quelques problèmes de connexit e dans les graphes orientès. *Journal of Combinatorial Theory*, Series B, **30** (1981), 1~10

[137] Hamidoune Y O. On the connectivity of Cayley digraphs. *European Journal of Combinatorics*, **5** (1984), 309~312

[138] Hamidoune Y O. Sur la separation dans les graphes de Cayley abeliens. *Discrete Mathematics*, **55** (1985), 323~326

[139] 韩国文, 张忠良. $(k-1)$ 容错直径或者 k 直径的最大图. 中国科学技术大学学报, **25** (3) (1995), 324~329

[140] Harary F. *Graph Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, 1969

[141] Harary F. Conditional connectivity. *Networks*, **13** (1983), 346~357

[142] Harary F. Recent results and unsolved problems on hypercube theory. In *Graph Theory, Combinatorics, Applications* (Y. Alavi, G. Chartrand, O. R. Oellermann and A. J. Schwenk eds.), John Wiley & Sons, 1991, 621~632

[143] Harary F, Hayes J, Wu H J. A survey of the theory of hypercube graphs. *Computers and Mathematics with Applications*, **15** (4) (1988), 277~289

[144] Harary F, Norman R Z. Some properties of line digraphs. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*. **9** (1960), 161~169

[145] Hartman J. On homeomorphic embeddings of $K_{m,n}$ in the cube. *Canadian Journal of Mathematics*, **32** (1980), 644~652

[146] Hayes J P. A graph model for fault-tolerant computing systems. *IEEE Transactions on Computers*, **25** (9) (1976), 875~884

[147] Hayes J P. *Computer Architecture and Organization*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1978

[148] Haynes T W, Hedetniemi S T, Slater P J. *Fundaments of Domination in Graphs*. Marcel Dekker, New York, 1998

[149] Haynes T W, Hedetniemi S T, Slater P J. *Domination in Graphs: Advanced Topics*. Marcel Dekker, New York, 1998

[150] Hayes J P, Mudge T, Stout Q F, Colley S, Palmer J. A microprocessor-based hypercube supercomputer. *IEEE Micro*, October, 1986, 6~17

[151] Hayes J P, Mudge T. Hypercube supercomputers. *Proceedings of the IEEE*, **77** (12) (1989), 1829~1841

[152] Hedetniemi S T, Laskar R Eds. *Topics on Domination in Graphs: Advanced Topics. Discrete Mathematics*, **86** (1990)

[153] Hell P, Seyffarth K. Large planar graphs of diameter two and fixed maximum degree. *Discrete Mathematics*, **111** (1993), 313~332

[154] Hellwig A, Rautenbach D, Volkmann L. Note on the connectivity of line graphs. *Information Processing Letters*, **91**(2004), 7~10

[155] Hellwig A, Volkmann L. Sufficient conditions for λ_r-optimality in graphs of diameter 2. *Discrete Math.*, **283** (2004), 113~120

[156] Hellwig A, Volkmann L. Sufficient conditions for graphs to be λ_r-optimal, super-edge-connected, and maximally edge-connected. *Journal of Graph Theory*, **48** (3) (2005), 228~246

[157] Hemminger R L, Beineke L W. Line graphs and line digraphs. In *Selected Topics in Graph Theory*. London, New York, San Francisco: Academic Press, 1978, 271~305

[158] Heydemann M C, Meyer J C, Sotteau D. On forwarding indices of networks. *Discrete Applied Mathematics*, **23** (1989), 103~123

[159] Heydemann M C, Meyer J C, Opatrny J, Sotteau D. Forwarding indices of consistent routings and their complexity. *Networks*, **24** (1994), 75~82

[160] Hillis W D. *The Connection Machine*. Cambridge, Mass. : MIT Press, 1985

[161] Hoffman A J, Singleton R R. On Moore graphs with diameters 2 and 3. *IBM Journal of Research and Development*, **4** (1960), 497~504

[162] Homobono N, Peyrat C. Connectivity of Imase and Itoh digraphs. *IEEE Transactions on Computers*, **37** (11) (1988), 1459~1461

[163] Homobono N, Peyrat C. Fault-tolerant routings in Kautz and de Brujin networks. *Discrete Applied Mathematics*, **24** (1989), 179~186

[164] Hou X-M, Xu J M. The forwarding index of wrapped butterfly (di)graphs. submitted to *Acta Mathematicae Applicatae Sinica (English Series)*, 2004

[165] Hou X-M, Xu J M. On Super-connectivity and Extra-connectivity of Folded Hypercubes. A manuscript submitted to *Discrete Mathematics*

[166] Hou X-M, Xu M, Xu J-M. Forwarding indices of folded cubes. *Discrete Applied Mathematics*, **145** (3) (2005), 490~492

[167] Hsu D F. On container width and length in graphs, groups, and networks. *IEICE Transaction on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Science*, **E77-A** (1994), 668~680

[168] Hsu D F, Jia X. Extremal problems in the construction of distributed loop networks. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **7** (1994), 57~71

[169] Hsu D F, Luczak T. Note on the k-diameter of k-regular k-connected graphs. *Discrete Mathematics*, **132** (1994), 291~296

[170] Hsu D F, Lyuu Y D. A graph-theoretical study of transmission delay and fault tolerance. *International Journal of Mini and Microcomputers*, **16** (1)1994, 35~42

[171] 华罗庚. 数论导引. 北京, 科学出版社. 1979, p30

[172] Huang W-T, Chen W-K, Chen C-H. Pancyclicity of Möbius cubes. *Proceedings of the Ninth International Conference on Parallel and Distributed Systems (ICPADS'02)* on 17-20 Dec. 2002, 591~596

[173] Huang J, Xu J-M. Multiply-twisted hypercube with four or less dimensions is vertex-transitive. 数学季刊, **20** (4)(2005), 430~434

[174] Hwang F K. A survey of double loop networks. in *Reliability of Computer and Communication Networks* (F. Roberts, F. K. Hwang, and C. Monma eds.), DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 5, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991, 143~152. A complementrary survey of double loop networks, *Theoretical Computer Science*, **265** (2001)

[175] Hwang F K, Xu Y H. Double loop networks with minimum delay. *Discrete Mathematics*, **66** (1987), 109~118

[176] Hwang K, Wu J. Area efficient layout of balanced hypercube computers. *International Journal of High Speed Electronics and Systems*, **6** (4) (1995), 631~646

[177] Imase M, Itoh M. Design on minimize diameter on building-block networks. *IEEE Transactions on Computers*, **30** (6) (1981), 439~442

[178] Imase M, Itoh M. A design for directed graphs with minimum diameter. *IEEE Transactions on Computers*, **32** (8) (1983), 782~784

[179] Imase M, Manabe Y. Fault-tolerant routings in k-connected networks. *Information Processing Letters*, **28** (1988), 171~175

[180] Imase M, Soneoka T, Okada K. Connectivity of regular digraphs with small diameters. *IEEE Transactions on Computers*, **34** (1985), 267~273

[181] Imase M, Soneoka T, Okada K. Fault-tolerant processor interconnection networks. *Systems and Computers in Japan*, **17** (8) (1986), 21~30

[182] Ishigami Y. The wide-diameter of the n-dimensional toroidal mesh. *Networks*, **27** (1996), 7~14

[183] Itai A, Perl Y, Shiloah Y. The complexity of finding maximum disjoint paths with length constraints. *Networks*, **12** (1982), 277~286

[184] Jwo J S, Lakshmivarahan S, Dhall S K. Embedding of cycles and grids in star graphs. *J. Circuits Syst. Computers*, **1** (1991), 43~74

[185] Kastelegn P W. Graph theory and crystal physics. In *Graph Theory and Theoretical Physics* (F. Harary ed.), London, New York, San Francisco: Academic Press, 1967, 43~110

[186] Kautz W H. Design of optimal interconnection networks for multiprocessors. In *Architecture and Design of Digital Computers*, Nato Advanced Summer Institute, 1969, 249~272

[187] Kawaguchi K, Wada K. Highly fault tolerant network routing for $(k+1)$-node (edge) connected graphs (in Japanese). *Denshi Zyouhou Tsushin Gakkai Ronbunshi (Trans. IEICE)*, **J70-A** (3) (1986), 388~398

[188] Kessler R E, Schwarzmeier J L. CRAY T3D: A new dimension for cray research. *Proc. Comput. Conf.* , Spring, 1993, 176~182

[189] Kleinert M. Die Dicke des n-dimensionalen Wurfel-Graphen. *Journal of Combinatorial Theory*, **3** (1967), 10~15

[190] Knyazev A V. Diameters of pseudosymmetric graphs (Russian), *Mat. Zametki*, **41** (1987) (6), 829~843; English translation: *Math. Notes*, **41**(5~6) (1987) 473~482

[191] Kojima T, Ando K. Wide-diameter and minimum length of fan. *Theoretical Computer Science*, **235** (2000), 257~266

[192] König D. *Theorie der endlichen und unendlichen graphen.* Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1936

[193] Kouider M, Winkler P. Mean distance and minimum degree. *Journal of Graph Theory*, **25** (1997), 95~99

[194] Krishnamoorthy M S, Krishnamirthy B. Fault diameter of interconnection networks. *Computers and Mathematics with Applications*, **13** (5/6) (1987), 577~582

[195] Kulasinghe P, Bettayeb S. Embedding binary trees into crossed cubes. *IEEE Transactions on Computers*, **44** (7) (1995), 923~929

[196] Kulasinghe P, Bettayeb S. Multiply-twisted hypercube with five or more dimensions is not vertex-transitive. *Information Processing Letters*, **53**(1995), 33~36

[197] Kumar V P, Reddy S M. A class of graphs for fault-tolerant processor interconnections. *IEEE International Conference on Distributed Computing Systems*, 1984, 448~460

[198] Kuratowski C. Sur le probléme des courbes gauches en topologie. *Fundamenta Mathematicae*, **15** (1930), 271~283

[199] Lai C N, Chen G H, Duh D R. Constructing one-to-many disjoint paths in folded hypercubes. *IEEE Transactions on Computers*, **51** (1) (2002), 33~45

[200] Lakshmivarahan S, Jwo J-S, Dhall S K. Symmetry in interconnection networks based on Cayley graphs of permutation groups: a survey. *Parallel Computing*, **19** (4) (1993), 361~407

[201] Latifi S. Combinatorial analysis of the fault-diameter of the n-cube. *IEEE Transactions on Computers*, **42** (1) (1993), 27~33

[202] Latifi S. On the fault-diameter of the star graph. *Information Processing Letters*, **46** (1993), 143~150

[203] Latifi S, Hegde M, Naraghi-Pour M. Conditional connectivity measures for large multiprocessor systems. *IEEE Transactions on Computers*, **43** (2) (1994), 218~221

[204] Leighton F T. *Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: Arrays, Trees, Hypercubes*. San Mateo, California: Morgan Kaufmann Publishers, 1992

[205] Leu Y-R, Kuo S-Y. Distributed fault-tolerant ring embedding and reconfiguration in hypercubes. *IEEE Trans. Comput.*, **48**(1) (1999), 81~88

[206] Levialdi S. A pyramid project using integrated technology. *Integrated Technology for Parallel Image Processing* (S. Levialdi, ed.), New York: Academic Press, 1985

[207] Li Q, Sotteau D, Xu J M. 2-diameter of diameter of de Brujin graphs. *Networks*, **28** (1) (1996), 7~14

[208] Li T K, Tsai C H, Tan J J M, Hsu L H. Bipannectivity and edge-fault-tolerant bipancyclicity of hypercubes. *Information Processing Letters*, **87**(2003), 107~110

[209] Li H, Xu J M. (d,m)-dominating numbers of m-connected graphs. *Rapports de Recherche*, LRI, Universite de Paris-Sud, **1130**, 1997

[210] Li L, Xu J-M. On restricted edge-connectivity of vertex-transitive graphs.中国科学技术大学学报, **33** (3) (2004), 266~272

[211] 李乔,徐俊明,张忠良. 最优双环网络的无限族. 中国科学, **23A** (9) (1993), 979~992. *Discrete Applied Mathematics*, **46** (1993), 179~183

[212] Li Q, Zhang Y. Restricted connectivity and restricted fault diameter of some interconnection networks. *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **21** (1995), 267~273

[213] 李乔,张翌. 无向 Kautz 图的限制连通度和限制容错直径. 上海交通大学学报, **31**(2) (1997), 1~6

[214] 李乔良. 关于网络容错性和可靠性的图论研究. 中国科学技术大学博士学位论文, 1997 年 3 月.

[215] Li Q L, Li Q. Reliability analysis of circulants. *Networks*, **31** (1) (1998), 61~65

[216] Li Q L, Li Q. Refined connectivity properties of Abelian Cayley graphs. 数学年刊, **19B** (4) (1998), 409~414

[217] Li Q L, Li Q. Super edge connectivity properties of connected edge symmetric graphs. *Networks*, **33** (1999), 147~159

[218] Li X L, Zhang F J. On the number of spanning trees and Eulerian tours in generalized de Brujin graphs. *Discrete Mathematics*, **94** (1991), 189~197

[219] Liaw S C, Chang G J. Wide diameters of butterfly networks. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **3** (1) (1998), 83~88

[220] Liaw S C, Chang G J. Generalized diameters and Rabin numbers of networks. *Journal of Combinatorial Optimization*, **2** (1999), 371~384

[221] Liaw S C, Chang G J. Rabin numbers of butterfly networks. *Discrete Mathematics*, **196** (1999), 219~227

[222] Liaw S C, Cao F, Chang G J, Hsu D F. Fault-tolerant routing in circulant networks and cycle prefix networks. *Annals of Combinatorics*, **2** (1998), 165 ~ 172

[223] Litifi S, Zheng S, Bagherzadeh N. Optimal ring embedding in hypercubes with faulty links. in: *Proc. Fault-Tolerant Computing Symp.*, (1992), 178~184

[224] Liu M T. Distributed loop computer networks. In *Advances in Computers*, **17**. New York: Academic Press, 1978, 163~216

[225] Liu Y P. A new approach to the linearity of testing planarity of graphs. *Acta Mathematae Applicatae Sinica*, **4** (3)(1988), 256~265

[226] 刘彦佩. 图的可嵌入性理论. 北京: 科学出版社, 1995

[227] Livingston M, Stout Q F. Embeddings in hypercubes. *Mathematical and Computer Modeling*, **11** (1988), 222~227

[228] Lovász L A. A homology theory for spanning trees of a graph. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **30** (304) (1977), 241~251

[229] Lovász L, Neumann-Lara V, Plummer M D. Mengerian theorems for paths of bounded length. *Periodica Mathematica Hungaricae*, **9** (1978), 269~276

[230] 吕长虹. 关于网络可靠性和最小广播图的图论研究. 南京大学博士学位论文, 2000 年 1 月

[231] Lu C H, Xu J M, Zhang K M. On $(d, 2)$-dominating numbers of undirected binary de Brujin graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **105** (2000), 137~145

[232] 吕长虹, 张克民. 直径为 d 的超环面网的 $(d, 2n)$ 控制数. 数学年刊, **22A**(4) (2001), 517~524

[233] 吕敏. 互连网络超连通度研究. 中国科学技术大学博士学位论文, 2005 年 3 月

[234] Lü M, Xu J-M. Super connectivity of line graphs and digraphs. *Acta Mathematicsae Applicatae Sinica*, **22** (1) (2006), 43~48

[235] 马美杰, 徐俊明. Edge-pancyclicity of crossed cubes. 中国科学技术大学学报, **35** (3) (2005), 329~333

[236] Mader W. Eine Eigenschft der Atome andlicher Graphen. *Archives of Mathematics* (Basel), **22** (1971), 333~336

[237] Mader W. Connectivity and edge-connectivity in finite graphs. In *Surveys in Combinatorics*, *London Mathematical Society Lecture Note Series*, **38** (1979), 66~95

[238] Mader W. On disjoint paths in graphs. *Annal of Discrete Mathematics*, **41** (1989), 333~340

[239] Manoussakis Y, Tuza Z. The forwarding index of directed networks. *Discrete Applied Mathematics*, **68** (1996), 279~291

[240] Maurer st B, Slater P J. On k-minimally n-edge-connected graphs. *Discrete Mathematics*, **24** (1978), 185~195

[241] Meir A, Moon J W. Relation between packing and covering number of a tree. *Pacific Journal of Mathematics*, **61** (1) (1975), 225~233

[242] Meng J-X. Optimally super-edge-connected transitive graphs. *Discrete Mathematics*, **260** (2003), 239~248

[243] Meng J-X, Ji Y-H. On a kind of restricted edge connectivity of graphs. *Discrete Appled Mathematics*, **117** (2002), 183~193

[244] Menger K. Zur allgemeinen Kurventheorie. *Fundamenta Mathematicae*, **10** (1927), 96~115

[245] Miller M, Fris I. Maximum order digraphs for diameter 2 or degree 2. *Pullman Volume of Graphs and Matrices, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, **139** (1992), 269~278

[246] Montejano L, Neumann-Lara V. A variation of Menger's theorem for long paths. *Journal of Combinatorial Theory.* **B36** (1984), 213~217

[247] Mutzel P, Odenthal T, Scharbrodt M. The thickness of graphs: a survey. *Graphs and Combinatorics.* **14** (1998), 59~73

[248] Ng C P, Teh H H. On finite graphs of diameter 2. *Nanta Mathematics*, **1** (1966/67), 72~75

[249] 聂晓冬, 刘红美, 徐俊明. Star 图互连网络的容错性分析. 数学物理学报, **24** (2) (2004) 168~176

[250] Niepel L, Šafăriková D. On a generalization of Menger's theorem. *Acta Mathematics. Universitatis Comenianae*, **42/43** (1983), 275~283

[251] Noakes M, Dally W J. System design of the J-Machine. *Proceedings of Advanced Research in VLSI*, 1990, 179~192 75~81

[252] Nugent S F. The iPDC/2 direct-connect communication technology. *Proceedings of Conference on Hypercube Concurrent Computers and Applications*, **1** (1988), 51~60

[253] Ore O. Diameters in graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, **5** (1968), 75~81

[254] Ou J-P, Zhang F-J. Bound on m-restricted edge connectivity *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, **19** (3)(2003), 505~510

[255] Peleg D, Simons B. On fault-tolerant routings in general networks. *Proceedings on Distributed Computing Systems*, 1986, 98~107

[256] Peyrat C. Diameter vulnerability of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **9** (1984), 245~250

[257] Plesnik J. Note on diametrically critical graphs. In *Recent Advances in Graph Theory* (Proceedings of the 2nd Czechoslovak Symposium, Prague, 1974), Prague: Academia, 1975, 455~465

[258] Plesnik J. On the sum of all distances in a graph or digraph. *Journal of Graph Theory*, **8** (1984), 1~21

[259] Plesnik J, Znam S. Strongly geodetic directed graphs. *Acta Facultatis Rerum Naturalium Universitatis Comenianae -Mathematics*, **29** (1974), 29~34

[260] Pradhan D K. Fault-tolerant multiprocessor and VLSI-based systems communication architectures. In *Fault-Tolerant Computing Theory and Techniques.* Vol. II (D. K. Pradhan ed.), Englewood Cliff, NJ: Prentice-Hall, 1986

[261] Pradhan D K. Fault-tolerant VLSI architectures based on de Brujin graphs (Galileo in the mid nineties). *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **5** (1991), 183~195

[262] Pradhan D K, Reddy S M. A fault-tolerant communication architecture for distributed systems. *IEEE Transactions on Computers*, **31** (10) (1982), 863~870

[263] Preparata F P, Vuillemin J. The cube-connected cycles: a versatile network for parallel computation. *Communications of the Association for Computing Machinery*, **24** (5) (1981), 300~309

[264] Pyber L, Tuza Z. Menger-type theorems with restrictions on path lengths. *Discrete Mathematics*, **120** (1993), 161~174

[265] Quinn M J. *Designing Efficient Algorithms for Parallel Computers* (K. Hwang ed.), McGraw-Hill, 1987

[266] Rabin M O. Efficient dispersal of information for security, congestion balancing, and fault tolerance. *Journal of the Association for Computing Machinery*, **36** (2) (1989), 335~348

[267] Raghavendra C S, Gerla M, Avizienis A. Reliable loop topologies for large local computer networks. *IEEE Transactions on Computers*, **34** (1) (1985), 46~55

[268] Reddy S M, Kuhl J G, Hosseini S H, Lee H. On digraphs with minimum diameter and maximum connectivity. In *Proceedings of the 20th Annual Allerton Conference on Communication, Control and Computation*, 1982, 1018~1026

[269] Reingold E M, Nievergeit J, Deo N. *Combinatorial Algorithms*. Englewood Cliffs, NJ: Prentive-Hall, 1977

[270] Ronen D, Perl Y. Heuristics for finding a maximum number of disjoint bounded paths. *Networks*, **14** (1984), 531~544

[271] Rouskov Y, Latifi S, Srimani P K. Conditional fault diameter of star graph networks. *J. Parallel and Distributed Computing* **33**(1) (1996), 91~97

[272] Saad R. Complexity of the forwarding index problem. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **6** (3) (1993), 418~427

[273] Saad Y, Schultz M H. Topological properties of hypercubes. *IEEE Transactions on Computers*, **37** (7) (1988), 867~872

[274] Sabidussi G. Graphs with given group and given graph theoretical properties. *Canadian Journal of Mathematics* **9** (1957), 515~525

[275] Sabidussi G. Graph multiplication. *Mathematische Zeitschrift*, **72** (1960), 446~457

[276] Schlumberger M L. *Proposed de Brujin Graph as a Communication Network. Ph. D thesis*, Stanford University, 1974

[277] Schoone A A, Bodlaeder H L, van Leeuwen J. Diameter increase caused by edge deletion. *Journal of Graph Theory*, **11** (3) (1987), 409~427

[278] Seitz C L. The cosmic cube. *Communications of Association for Computing Machinery*, **28** (1) (1985), 22~33

[279] Seitz C L et al. The architecture and programming of the Ametek series 2010. *Proceedings of Third Conference on Hypercube Concurrent Computers and Applications*, Pasadena, Calif. Jan. 1988, 33~37

[280] Sen S, Sengupta A, Bandyopadhyay S. On some topological properties of hypercube, incomplete hypercube and supercube. In: *Proc. Internat. Parallel Processing Symp.*, (1993), 636~642

[281] Sengupta A. On ring in hypercubes with faulty nodes and links. *Information Processing Letters*, **68** (1998), 207~214

[282] Shahrokhi F, Székely L A. Constructing integral uniform flows in symmetric networks with application to the edge-forwarding index problem. International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (Smolenice Castle, 1998). *Discrete Applied Mathematics*, **108** (2001), 175~191

[283] Shao R, Lu C, Yao T. On $(d, 2)$-dominating numbers of butterfly networks. *Taiwanese Journal of Mathemetaics*, **6**(4) (2002), 515~521

[284] Shen J, Li Q. Two theorems on double loop networks. *Journal of University of Science and Technology of China*, **25** (2) (1995), 127~132

[285] Simó E, Yebra J L A. The vulnerability of diameter of folded n-cubes. *Discrete Mathematics*, **174** (1997), 317~302

[286] Soares J. Maximum diameter of regular digraphs. *Journal of Graph Theory*, **16** (5) (1992), 437~450

[287] Solé P. The edge-forwarding index of orbital regular graphs. *Discrete Mathematics*, **130** (1994), 171~176

[288] Soneoka T. Nakada H, Imase M, Peyrat C. Sufficient conditions for maximally connected dense graphs. *Discrete Mathematics*, **63** (1987), 53~66

[289] Squire J S, Palais S M. Physical and logical design of a highly parallel computer. *Tech. Note*, Dept. of Electrical Engineering, University of Michigan, Oct. 1962

[290] Squire J S, Palais S M. Programming and design considerations for a highly parallel computer. *AFIPS Conf. Proc.* , **23** (1963) SJCC, 395~400

[291] Sullivan H, Bashkow T R. A large scale homogeneous full distributed parallel machine, I. *Proceeding of 4th Annual Symposium on Computer Architecture*, 1977, 105~117

[292] Sullivan H, Bashkow T R, Klappholz D. A large scale homogeneous full distributed parallel machine, II. *Proceeding of 4th Annual Symposium on Computer Architecture*, 1977, 118~124

[293] 田方, 徐俊明. Bounds for Distance Domination Number of graphs. 中国科学技术大学学报, **34** (5) (2004), 529~534

[294] 田方, 徐俊明. Distance Domination Numbers of Generalized de Brujin and Kautz Digraphs. 运筹学学报, **10**(1)(2006), 88~94

[295] Tindell R. Connectivity of Cayley digraphs. In *Combinatorial Network Theory* (D. Z. Du and D. F. Hsu eds.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1996, 41~64

[296] Turner J. Point-symmetric graphs with a prime number of points. *Journal of Combinatorial Theory*, **3** (1967), 136~145

[297] Tzeng N F, Wei S. Enhanced hypercubes. *IEEE Transactions on Computers*, **40** (3) (1991), 284~294

[298] Tzvieli D. Double loop interconnection networks with minimal transmission delay. Ph. D. Thesis, Louisiana University, Auguest, 1988

[299] Ueffing N, Volkmann L. Restricted edge-connectivity and minimum edge-degree. *Ars Combin.* **66** (2003), 193~203

[300] Valiant L G. A scheme for fast parallel communication. *SIAM Journal Computers*, **11** (2) (1982), 350~361

[301] Vancleemput W M. Mathematical models for the circuits layout problem. *IEEE Transactions on Circuits Systems*, **23** (1976), 759~767

[302] van Doorn E A. Connectivity of circulant digraphs. *Journal of Graph Theory*, **10** (1986), 9∼14

[303] Wagner A, Cormeil D. Embedding trees in a hypercube is NP-complete. *SIAM Journal on Computing*, **19** (3) (1990), 570∼590

[304] Waksman A. A permutation network. *Journal of Association for Computing Machinery*, **15** (1) (1968), 159∼163

[305] 万哲先. 代数编码. 北京: 科学出版社, 1976

[306] Watkins M. Connectivity of transitive graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, **8** (1970), 23∼29

[307] 王应前, 李乔. 直径为 2 的图的超级边连通性质. 上海交通大学学报, **33** (6) (1999), 646∼649

[308] 王应前, 李乔. 图是超级限制性边连通的一个 Ore 型充分条件. 上海交通大学学报, **35** (8) (2001), 1253∼1255

[309] Whitney H. Congruent graphs and the connectivity of graphs. *American Journal of Mathematics*, **54** (1932), 150∼168

[310] Winkler P M. Proof of the squashed cube conjecture. *Combinatorics*, **32** (1983), 135∼139

[311] Wong G K, Coppersmith D. A combinatorial problem related to multimodule memory organization. *Journal of Association for Computing Machinery*, **21** (1974), 392∼401

[312] Wu A Y. Embedding of tree networks into hypercubes. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, **2** (1985), 238∼249

[313] Wu J, Guo G. Fault tolerance measures for m-ary n -dimensional hypercubes based on forbidden faulty sets. *IEEE Transactions on Computers*, **47** (8) (1998), 888∼893

[314] Wu J, Huang K. The balanced hypercube: a cube-based system for fault-tolerant applications. *IEEE Transactions on Computers*, **46** (4) (1997), 484∼490

[315] 谢歆, 徐俊明. 关于超立方体网络的 (d,k) 独立数. 数学研究与评论, **25**(4) (2005), 691∼694

[316] 徐俊明. An inequality related the order, maximum degree, diameter and connectivity of a stronglg connected digraph. 应用数学学报, **8** (2) (1992), 144∼152

[317] 徐俊明. Connectivity of cartesian product digraphs and fault-tolerant routings of generalized hypercube. 高校应用数学学报, **13B** (2) (1998), 179∼187

[318] 徐俊明. 图论及其应用, 合肥: 中国科学技术大学出版社, 第一版, 1998; 第二版, 2004

[319] 徐俊明. The connectivity of generalized de Brujin digraphs. 中国科学技术大学学报, **29** (3) (1999), 311∼315

[320] 徐俊明. 计算机互连双环网络的最优设计. 中国科学, **29E** (3) (1999), 272∼278

[321] 徐俊明. 不含紧优和几乎紧优双环网络的无限族. 科学通报, **44** (5) (1999), 486∼490

[322] 徐俊明. Some results on R-edge-connectivity of even regular graphs. 高校应用数学学报, **14B** (3) (1999), 366∼370

[323] 徐俊明. 2 紧优双环网络无限族. 高校应用数学学报, **15A** (2)(2000), 147∼151

[324] 徐俊明. 点可迁图的限制边连通度. 数学年刊, **21A** (5) (2000), 605∼608

[325] Xu J-M. *Topological Structure and Analysis of Interconnection Networks*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 2001

[326] 徐俊明. On conditional edge-connectivity of graphs. 应用数学学报, **16B** (4)(2000), 414∼419

[327] 徐俊明. 关于广义超立方体网络的容错性和通信延迟. 中国科学技术大学学报, **31** (1) (2001), 16∼20

[328] Xu J-M. Wide-diameter of cartesian product graphs and digraphs. *Journal Combinatorial Optimization*, **8** (2) (2004), 171∼181

[329] Xu J-M. On super or restricted connectivity of some interconnection networks, accepted by, Wang W-W *Ars Combinatoria*, 2006

[330] Xu J-M, Deng Z-G. Wide diameter of Möbius cubes. *Journal of International Networks*, **6**(1) (2005), 51~62

[331] Xu J-M, Du Z-Z, Xu M. Edge-fault-tolerant edge-bipancyclicity of hypercubes. *Information Processing Letters*, **96** (4) (2005), 146~150

[332] 徐俊明. 刘琦. 一类4紧优双环网无限族的设计. 中国科学, A 辑, **33** (11) (2003), 71~74

[333] Xu J-M, Liu Q. 2-restricted edge-connectivity of vertex-transitive graphs. *Australasian J. Combinatorics*, **30** (2004), 41~49

[334] Xu J-M, Lu C H, Zhang K M. A new property of binary undirected de Brujin graphs. 数学年刊, **21B** (1)(2000), 39~42

[335] Xu J-M, Lü M. On restricted edge-connectivity of regular digraphs. *Taiwan Journal of Mathematics*, **9** (4) (2005), **9** (4) (2005), 661~670

[336] Xu J-M, Lü M. The restricted edge-connectivity of de Brujin digraphs, *Ars Combinatoria*, to appear

[337] Xu J-M, Lü M, Fan Ying-Mei. Restricted edge-connectivity of de Brujin undirected graphs, *Ars Combinatoria*, to appear

[338] Xu J-M, Lü M, Ma M-J, Hellwig A. Super connectivity of line graphs. *Information Processing Letters*, **94** (4) (2005), 191~195

[339] Xu J-M, Ma M-J. Cycles in folded hypercubes. *Applied Mathematics Letters*, **19** (2) (2006), 140~145

[340] Xu J-M, Tian F. Distance domination-critical graphs. A manuscript submitted to *Applied Mathematics Letters*, 2005

[341] Xu J-M, Tian F, Huang J. Distance irredundance and connected domination numbers of a graph. *Discrete Mathematics*, **306**(22) (2006), 2943~2953

[342] 徐俊明, 谢歆. 关于图的容错直径和宽直径. 中国科学技术大学学报, **32** (2) (2002), 135~139

[343] 徐俊明, 徐克力. On the k-diameter of k-connected graphs. 高校应用数学学报, **16B** (3)(2001), 231~237

[344] Xu J-M, Xu K-L. On restricted edge-connectivity of graphs. *Discrete Mathematics*, **243** (1~3) (2002), 291~298

[345] Xu J-M, Xu M, Hou X-M. Forwarding indices of cartesian product graphs. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **10** (5) (2006), 1305~1315

[346] 徐俊明, 杨超. 笛卡儿乘积有向图的连通度. 2006

[347] Xu Jun-Ming, Yao Y-P, Xu K-L. Restricted fault-tolerant diameter of hypercube networks. *Acta Mathematicae Applicatae* (English Series), **19B** (2) (2003), 247~254

[348] Xu J-M, Zhou T, Du Y, Yan J. A new upper bound on forwarding index of graphs. *Ars Combinatoria*, to appear

[349] Xu J-M, Zhu Q, Hou X-M, Zhou T. On restricted connectivity and extra connectivity of hypercubes and folded hypercubes. *Journal of Shanghai Jiaotong University (Science)*, **E-10** (2) (2005), 208~212

[350] 徐敏. 互连网络转发指数的研究. 中国科学技术大学博士学位论文, 2004 年 10 月

[351] Xu M, Hou X M, Xu J-M. The Proof of a conjecture of Bouabdallah and Sotteau. *Networks*, **44** (4) (2004), 292~296

[352] Xu M, Xu J-M. Edge-pancyclicity of Möbius cubes. *Information Processing Letters*, **9** (4) (2005), 136~140

[353] Xu M, Xu J-M, Hou X M. Fault diameter of cartesian product graphs. *Information Processing Letters*. **95** (5) (2005), 245~248

[354] Zamfirescu T. On the line-connectivity of line-graphs. *Mathematische Annalen*, **187** (1970), 305~309

[355] Zemor G. On positive and negative atoms of Cayley digraphs. *Discrete Applied Mathematics*, **23** (1989), 193~195

[356] Zhang X-M, Xu J-M. On connectivity of Möbius cubes. 应用数学, **17** (supplement) (2004), 66~70

[357] Zhou T, Xu J-M, Li J. On diameter and average distance of graphs. 运筹学报, **8** (4) (2004),33~38

[358] 朱强. 互连网络的容错性和可诊断性研究. 中国科学技术大学博士学位论文, 2005 年 4 月

[359] 朱强, 徐俊明. On restricted edge-connectivity and extra edge-connectivity of hypercubes and folded hypercubes. 中国科学技术大学学报. **36** (3) (2006), 249~253

[360] Zhu Q, Xu J-M, Lü M. Edge fault tolerance analysis of a class of interconnection networks. *Applied Mathematics and Computation*, **172** (1) (2006), 111~121

记 号 索 引

一般数学符号

$\setminus$: 两集之差

$\overline{S}$: $=V\setminus S, S\subset V$

$|S|$: 集S中元素数目

$\times$: 笛卡儿乘积

$\lceil r\rceil$: 不小于r的最小整数

$\lfloor r\rfloor$: 不大于r的最大整数

$\cup$: 两集之并

$\cap$: 两集之交

$\subseteq$: 子集

$\subset$: 真子集

$\binom{n}{k}$: $=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$, $k\leqslant n$

$\Gamma=(X,\circ)$: 有限集X上关于运算“$\circ$”的群

Z: 非负正整数集

Z_n: 模n剩余类加法群

图运算

$G_1\cup G_2$: 两个子图G_1和G_2的并

$G_1\cap G_2$: 两个子图G_1和G_2的交

$G_1\vee G_2$: 两个图G_1和G_2的联

$G_1\times G_2$: 两个图G_1和G_2的笛卡儿乘积

$G-x$: 从图G中删去顶点x及其关联的边集

$G-e$: 从图G中删去边e (不包含两端点)

$G-S$：从图 G 中删去顶点集 S 及其关联的边集

$G+x$：添加新顶点 x 到图 G

$G+e$：添加新边 e 到图 G

$G+B$：添加边集 B 到图 G

$G \cong H$：图 G 同构于图 H

$H \subseteq G$：图 H 是图 G 的子图

$H \subset G$：图 H 是图 G 的真子图

用英文字母表示的图论符号

$\boldsymbol{A}(G)$：G 的邻接矩阵 11

$a(G)$：G 的原子数 52

$a_r(G)$：G 的 λ_r 原子数 275

$\mathrm{Aut}(G)$：G 的自同构群 47

$\mathrm{Aut}^c(G)$：Cayley 图 G 的保色自同构群 61

$B(d,n)$：de Brujin 有向图 39, 112

$B_G(d,n)$：广义 de Brujin 有向图 120

$BB(n)$：n 维 Beneš 网络 165

$BF(n)$：n 维蝶形网 162

$cd(G)$：立方图 G 的立方维数 103

$CCC(n)$：n 维立方连通圈网络 59, 160

$C(d_1,d_2,\cdots,d_n)$：n 维无向超环面网 105

$\overrightarrow{C}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$：$n$ 维有向超环面网 106

C_n：长为 n 的圈 10

$C_n(d)$：n 维无向超环面网 $C(d,d,\cdots,d)$ 105

$\overrightarrow{C}_n(d)$: n 维有向超环面网 $\overrightarrow{C}(d,d,\cdots,d)$ 106

$C(t,n)$: 添加 t 条边到长为 n 的无向圈得到的图的最小直径 219

CQ_n: n 维交叉超立方体 106

$C_\Gamma(S)$: 群 Γ 关于集 S 的 Cayley 图 57

$d(G)$: 图 G 的直径 16

$d(G;x,y)$: 图 G 的从顶点 x 到顶点 y 的距离 16

$d_G(x)$: 无向图 G 的顶点 x 的度 7

$d_G^+(x)$: 有向图 G 的顶点 x 的出度 8

$d_G^-(x)$: 有向图 G 的顶点 x 的入度 8

$d_w(G)$: 图 G 的宽度为 w 的直径 241

$d_w(G;x,y)$: 图 G 的宽度为 w 的从顶点 x 到顶点 y 的距离 241

$d_G(X)=|E_G(X)|$: 图 G 的顶点集 X 与顶点集 $\overline{X}$ 之间的边集 8

$d_G^+(X)=|E_G^+(X)|$: 有向图 G 的从顶点集 X 发出的边数 8

$d_G^-(X)=|E_G^-(X)|$: 有向图 G 的进入顶点集 X 的边数 8

$d(G;\rho)$: 图 G 关于路由选择 ρ 的容错直径 191

$\mathrm{dil}\,(\phi)$: 嵌入 ϕ 的膨胀数 14

(d,k) 图: 最大度 d 直径不超过 k 的图 83

$D_w(G)$: w 连通图 G 的 $w-1$ 容错直径 211

$D_w^R(G)$: 图 G 关于限制集 R 的宽度为 w 的直径 271

$D_w(G;x,y)$: w 连通图 G 的从顶点 x 到顶点 y 的 $w-1$ 容错距离 211

$D'_w(G)$: w 边连通图 G 的 $w-1$ 边容错直径 204

$D'_w(G;x,y)$: G 的从顶点 x 到顶点 y 的 $w-1$ 边容错容错距离 204

$E(G)$: 图 G 的边集 3

$E_G(S,T)=(S,T)$: 有向图 G 的从顶点集 S 到顶点集 T 的有向边集 8

$E_G(X) = [X, \overline{X}]$: 图 G 的顶点集 X 与顶点集 $\overline{X}$ 之间的边集 8

$E_G^+(X) = (X, \overline{X})$: 有向图 G 的从顶点集 X 到顶点集 $\overline{X}$ 的有向边集 8

$E_G^-(X) = (\overline{X}, X)$: 有向图 G 的从顶点集 $\overline{X}$ 到顶点集 X 的有向边集 8

$f(t,k)$: k 直径 $(t+1)$ 边连通图中删去 t 条边的最大直径 204

$\mathscr{F}_w(x,Y)$: 宽度为 w 的 (x,Y) 扇 24

$\mathscr{F}_w(Y,x)$: 宽度为 w 的 (Y,x) 扇 24

FQ_n: n 维折叠超立方体 109

$F(t,k)$: 添加 t 条边到直径为 k 的图后得到图的最小直径 199

G: 图(有向图或者无向图) 3

$\overleftarrow{G}$: 有向图 G 的逆图 52

$g(G)$: G 的围长, 即 G 的最短圈的长 9

$g(t,k)$: k 直径连通图中删去 t 条边得到连通图的最大直径 207

$\overrightarrow{g}(t,k)$: k 直径强连通图中删去 t 条边得到强连通图的最大直径 207

$G[S]$: G 的由顶点子集 S 导出的子图 6

$G(\ell,m)$: 2 维网状网 157

$G(m_1,m_2,\cdots,m_n)$: n 维网状网 157

$G(n;S)$: 集 S 的循环有向图 47, 150

$G(n;\pm S)$: 集 S 的循环无向图 47, 150

$G(n;s_1,s_1,\cdots,s_k)$: 集 $\{s_1,s_1,\cdots,s_k\}$ 的循环有向图 47, 150

(G,ρ): 给定路由选择 ρ 的图 G 21

$\mathscr{I}_{\ell,w}(G)$: 图 G 的 (ℓ,w) 独立集族 259

K_n: n 阶完全图或者完全有向图 4

K_d^+: d 阶花状完全有向图 39

$K_{m,n}$: 完全 2 部分图 4

$K_{1,n}$: $n+1$ 阶星 4

$K(d,n)$: Kautz 有向图 39, 127

$K_G(d,n)$: 广义 Kautz 有向图 130

$\ell(\mathscr{P}_w(G;x,y))$: 图 G 的路族 $\mathscr{P}_w(G;x,y)$ 的长度 240

$L(G)$: 图 G 的线图 33

$L^n(G)$: 图 G 的 n 重线图 38

MQ_n: n 维 Möbius 超立方体 108

$n(d,k)$: 无向 (d,k) 图的最大阶 83

$\vec{n}(d,k)$: 有向 (d,k) 图的最大阶 86

$N_G(x)$: 图 G 的顶点 x 的邻点集 8

$N_G(S)$: 图 G 的顶点子集 S 的邻点集 8

$N_G^+(S)$: 有向图 G 的顶点子集 S 的外邻点集 8

$N_G^-(S)$: 有向图 G 的顶点子集 S 的内邻点集 8

P_n: 阶为 n 的路 10

$PN(n)$: n 维金字塔网络 158

$P(t,n)$: 添加 t 条边到 P_{n+1} 后得到的图的最小直径 199

$\mathscr{P}_w(G;x,y)$: 图 G 的 w 条内点不交的 (x,y) 路族 240

Q_n: n 维超立方体 68, 71, 95

$Q_n(d)$: n 维 d 叉超立方体 105

$Q(d_1,d_2,\cdots,d_n)$: n 维广义超立方体 104

$r_w(G)$: 图 G 的 Rabin 数 237

$R(G,\rho)/F$: 图 (G,ρ) 关于集 F 的路径幸存图 191

$SE(n)$: n 维移位交换网 169

$\mathscr{S}_{\ell,w}(G)$: 图 G 的 (ℓ,w) 控制集族 262

$UB(d,n)$： de Brujin 无向图 116

$UK(d,n)$： Kautz 无向图 129

$V(G)$： 图 G 的顶点集 3

$W(m,p)$： $m+p$ 阶广义轮 242

W_n： n 阶轮 11

$WBF(n)$： n 维环绕蝶形网 164

$xy \in E(G)$： 图 G 的端点为 x 和 y 的边 3

$(x,y) \in E(G)$： 有向图 G 的起点为 x 终点为 y 的有向边 3

xy 路: 连接 x 和 y 的路 9

(x,y) 路: 从 x 到 y 的有向路 9

用希腊文字母表示的图论符号

$\alpha(G)$： 图 G 的独立数 11

$\alpha_\ell(G)$： 图 G 的距离 ℓ 独立数 265

$\alpha_r(G)$： 图 G 的匹配数 11

$\alpha_{\ell,w}(G)$： 图 G 的 (ℓ,w) 独立数 259

$\gamma(G)$： 图 G 的控制数 11

$\gamma_\ell(G)$： 图 G 的距离 ℓ 控制数 265

$\gamma_{\ell,w}(G)$： 图 G 的 (ℓ,w) 控制数 262

$\delta(G)$： 图 G 的最小度 7, 8

$\delta^+(G)$： 有向图 G 的最小出度 8

$\delta^-(G)$： 有向图 G 的最小入度 8

$\Delta(G)$： 图 G 的最大度 7, 8

$\Delta^+(G)$： 有向图 G 的最大出度 8

$\Delta^-(G)$: 有向图 G 的最大入度 8

$\varepsilon(G)$: 图 G 的边数 3

$\vartheta(G)$: 图 G 的厚度 15

$\eta(G;x,y)$: 图 G 的边形式 (x,y)-Menger 数 23

$\eta_\ell(G;x,y)$: 图 G 关于 ℓ 的边形式 (x,y)-Menger 数 231

$\eta_\ell(G)$: 图 G 关于 ℓ 的边形式 Menger 数 233

$\kappa(G)$: 图 G 的连通度 24

$\kappa^{\mathscr{R}}(G)$: 图 G 关于禁错集 $\mathscr{R}$ 的限制连通度 271

$\kappa_\ell(G)$: 图 G 关于 ℓ 的有界连通度 227

$\kappa_\ell(G;x,y)$: 图 G 关于 ℓ 的 (x,y)-Menger 数 221

$\kappa_r(G)$: 图 G 的限制连通度 271

$\kappa_s(G)$: 图 G 的超连通度 284

$\kappa_r^{(h)}(G)$: 图 G 的 h 限制连通度 272

$\kappa_s^{(h)}(G)$: 图 G 的 h 超连通度 290

$\lambda(G)$: 图 G 的边连通度 24

$\lambda^{\mathscr{R}}(G)$: 图 G 关于禁错集 $\mathscr{R}$ 的限制边连通度 272

$\lambda_\ell(G)$: 图 G 关于 ℓ 的有界边连通度 233

$\lambda(G;x,y)$: 图 G 的 (x,y) 边连通度 23

$\lambda_\ell(G;x,y)$: 图 G 关于 ℓ 的 (x,y) 有界边连通度 231

$\lambda_s(G)$: 图 G 的超边连通度 284

$\lambda_r(G)$: 图 G 的限制边连通度 273

$\lambda_r^{(h)}(G)$: 图 G 的 h 限制边连通度 272

$\lambda_s^{(h)}(G)$: 图 G 的 h 超边连通度 290

$\lambda_s''(G)$: 图 G 的 2 超边连通度 291

$\tau(G)$: 图 G 的转发指数 173

$\tau(G;\rho)$: 图 G 关于路由选择 ρ 的转发指数 173

$\tau_x(G;\rho)$: 图 G 的顶点 x 关于路由选择 ρ 的转发指数 173

$v(G)$: 图 G 的阶或者顶点数 3

$\mu(G)$: 图 G 的平均距离 19

$\pi(G)$: 图 G 的边转发指数 182

$\pi(G;\rho)$: 图 G 关于路由选择 ρ 的边转发指数 181

$\pi_e(G;\rho)$: 图 G 的边 e 关于路由选择 ρ 的边转发指数 181

ρ: 路由选择 21

$\rho(x,y)$: 由 ρ 确定的从 x 到 y 的路径 22

ρ_m: 最小路由选择 22

$\sigma(G)$: 图 G 的所有点对之间距离之和 20

$\xi(G)$: 无向图 G 的最小边度 7

$\xi_G(e)$: 向图 G 的边 e 的度 7

$\zeta(G;x,y)$: 图 G 的 (x,y)-Menger 数 27

$\zeta_\ell(G;x,y)$: 图 G 关于 ℓ 的 (x,y)-Menger 数 221

$\zeta_\ell(G)$: 图 G 关于 ℓ 的 Menger 数 227

$\Omega(n)$: n 维 Ω 网 168

名 词 索 引

边, 3
  ~边的端点, 3
  ~边割, 24
  ~边减少问题, 203
  ~添加边问题, 199
  ~无向边, 3
  ~有向边, 3
边度, 7
  ~最小边度, 7
边可迁图, 50
不等式
  ~Whitney 不等式, 24

Cayley 图, 57
长度, 9
  ~迹长, 9
  ~链长, 9
  ~路长, 9
  ~圈长, 9
超立方体, 71, 95
  ~比特, 96
  ~Bool 向量, 96
  ~顶点的权, 96
  ~d 元 n 立方体, 105
  ~广义超立方体, 104
  ~Hamming 距离, 98
  ~可立方图, 102
  ~可立方维数, 103
  ~n 个比特 2 元串, 96
超立方体变型, 106
  ~交叉超立方体, 106
  ~Möbius 超立方体, 108
    ~0-Möbius 超立方体, 108
    ~1-Möbius 超立方体, 108
  ~折叠立超方体, 109
de Brujin
  ~de Brujin 图, 39
  ~de Brujin 序列, 115
  ~de Brujin 无向图, 116
  ~de Brujin 有向图, 39, 112
  ~广义 de Brujin 图, 120
点, 3
  ~边的端点, 3
  ~d 度点, 7
  ~顶点, 3
  ~孤立点, 7
  ~平衡点, 8
  ~有向边的起点, 3
  ~有向边的终点, 3
笛卡儿乘积, 68
  ~无向图的笛卡儿乘积, 68
  ~有向图的笛卡儿乘积, 69
顶点, 3
  ~顶点集, 3
  ~奇异点, 291
顶点度, 7
  ~顶点出度, 8
  ~顶点入度, 8
  ~无向图的最大顶点度, 7
  ~无向图的最小顶点度, 7
  ~有向图的最大顶点度, 8
  ~有向图的最小顶点度, 8
  ~最大顶点出度, 8
  ~最大顶点入度, 8
  ~最小顶点出度, 8
  ~最小顶点入度, 8
定理, 25
  ~Kuratowski定理, 14
  ~Lovász-Györi 定理, 25
  ~Menger定理, 23

~Menger-Whitney 判定准则, 24
~原子分解定理, 53
(d,k) 图问题, 83
~(d,k) 无向图, 83
~(d,k) 有向图, 86
~最大 (d,k) 无向图, 85
~最大 (d,k) 有向图, 88
度, 7
~边度, 7
~顶点出度, 8
~顶点度, 7
~顶点入度, 8
对称边, 3
对称有向图, 3
独立集, 12
~独立数, 12
~(ℓ,w) 独立集, 259
独立数, 12
~距离独立数, 265
~(ℓ,w) 独立数, 259

2部分图
~完全2部分图, 4
Euler, 11
~Euler 圈, 11
~Euler 图, 11

反对称有向图, 3
非平面图, 14
~厚度, 15
~交叉数, 15
分离集, 24
~κ 分离集, 24
~分离集, 24
~(x,y) 分离集, 23
分片, 52
~负分片, 52
~λ_r 分片, 275
~$\lambda_s^{(h)}$ 分片, 291
~正分片, 52

割
~边割, 24
~超边割, 284
~超点割, 284
~点割, 24
~h 超边割, 290
~h 超点割, 290
~$\kappa_s^{(h)}$ 割, 290
~λ_r 割, 273
~$\lambda_s^{(h)}$ 割, 290
~$\mathscr{R}$ 点割, 271
~限制点割, 271
Gray 码, 99
~2 元反射 Gray 码, 99

Hamilton, 11
~Hamilton 路, 11
~Hamilton 圈, 11
~Hamilton 图, 11
花状完全有向图, 39
回, 9
~Euler 回, 11
回避, 190
~回避 F 的路径, 190
互连网络, 5
~互连网络拓扑结构, 5

迹, 9
~迹长, 9
集
~边集, 3
~顶点集, 3
~独立集, 12

～分离集, 23
～截集, 23, 24
～禁错集, 270
～控制集, 12
～(ℓ, w) 独立集, 259
～(ℓ, w) 控制集, 263
截集, 23, 24
～λ 截集, 24
～图的截集, 24
～(x, y) 截集, 23
禁错集, 270
禁错集族, 270
距离, 16
～边容错距离, 204
～点容错距离, 211
～Hamming 距离, 98
～宽距离, 241
～平均距离, 19
～w 宽距离, 241
距离独立集, 265
距离控制数, 265

Kautz 图, 39, 127
～广义 Kautz 有向图, 130
～Kautz 无向图, 129
～Kautz 有向图, 39, 127
可迁图, 47
～边可迁图, 50
～点可迁图, 47
控制集, 12
～控制数, 12
～(ℓ, w) 控制集, 263
～最小 (ℓ, w) 控制数, 263
控制数, 12
～距离控制数, 265
～(ℓ, w) 控制数, 263
宽距离, 241
宽直径, 241

L 形
～可实现 L 瓦, 144
～L 几乎紧瓦, 140
～L 紧瓦, 140
～L 瓦的直径, 138
～L 形 k 紧瓦, 140
～L 瓦, 137
～平面 L 形, 137
～平面 L 形瓦, 137
～最优 L 瓦, 138
链, 9
～闭链, 9
连通, 10
～超边连通, 283
～超连通, 283
～超 λ_s 的, 289
～非连通, 10
～连通分支, 10
～连通图, 10
～强连通, 11
～强连通图, 11
～最大边连通, 283
～最大连通, 283
～最优超边连通的, 288
连通度, 23
～超边连通度, 284
～超连通度, 284
～关于 ℓ 的 (x, y) 有界边连通度, 231
～关于 ℓ 的 (x, y) 有界连通度, 221
～关于 ℓ 的有界边连通度, 233
～关于 ℓ 的有界连通度, 228
～h 超边连通度, 290

～h 超连通度, 290
～h 强边连通度, 298
～h 强连通度, 298
～$\mathscr{R}$ 边连通度, 273
～$\mathscr{R}$ 连通度, 271
～图的边连通度, 24
～图的连通度, 24
～限制边连通度, 273
～限制连通度, 271
～(x,y)边连通度, 23
～(x,y) 连通度, 23
连通图, 10
～强连通图, 11
～w 边连通图, 24
～w 连通图, 24
立方连通圈, 59, 160
～超立方体边, 160
～圈边, 160
邻集, 8
～内邻集, 8
～外邻集, 8
邻接矩阵, 11
路, 9
～边不交路, 23
～边不交限长路问题, 231
～点不交超长路问题, 234
～Hamilton 路, 11
～回避 F 的路径, 190
～路长, 9
～内点不交路, 23
～无弦路, 9
～限长问题, 221
～(y,S) 路集, 263
～最短路, 9
轮, 11
～广义轮, 242
～轮辐, 11
～轮毂, 11
～轮心, 11
路由选择, 22, 173
～边转发指数, 182
～点转发指数, 173
～回避 F 的路径, 190
～路径, 22
～路由选择算法, 22
～容错路由选择的延迟, 191
～双向路由选择, 22
～幸存路径图, 190
～转发指数, 173
～最小路由选择, 22
～最小路由边转发指数, 182
～最小路由点转发指数, 173
～最小路由选择原理, 22
～最优路由选择, 191
路族, 240
～路族的长度, 240
～路族的宽度, 240
～最小路族, 240

Menger
～边形式 Menger 型问题, 231
～关于 ℓ 的边 Menger 数, 233
～关于 ℓ 的 Menger 数, 227
～关于 ℓ 的 (x,y) 边 Menger 数, 231
～关于 ℓ 的 (x,y)-Menger 数, 221
～Menger 定理, 23
～Menger-Whitney 判定准则, 24
～Menger 型超长路问题, 234
～Menger 型问题, 221
～限长 Menger 型问题, 221
Moore 界, 18, 83
～无向图 Moore 界, 83

~有向图Moore 界, 87
Moore 图, 83
~Moore 无向图, 83
~Moore 有向图, 87

Petersen 图, 48
平面图, 14
~非平面图, 14
~平面表示, 14
~平面嵌入, 14
匹配, 12
~匹配数, 12
~完备匹配, 12

嵌入
~点对点嵌入, 14
~膨胀率, 14
~膨胀数, 14
~嵌入负载, 14
~嵌入问题, 14
~嵌入拥塞, 14
~同构嵌入, 14
~图的嵌入, 13
~图嵌入问题, 13
圈, 9
泛圈
~边泛圈, 10
~点泛圈, 10
~奇圈, 9
~k 圈, 9
~偶圈, 9
~圈长, 9
~泛圈, 10
群
~保色自同构群, 61
~极小生成集, 64
~图的群, 47
~图的自同构群, 47

Rabin 数, 237

三角形, 9
扇, 25
~(x,Y) 扇的宽度, 25
~(x,Y) 扇, 25
~(Y,x) 扇, 25
树, 12
~k 叉树, 12
~内点, 12
~双根树, 103
~树层, 12
~树高, 12
~树根, 12
~树深, 12
~树叶, 12
~外向树, 12
~完全 k 叉树, 12
~有根树, 12
~支撑树, 12
数
~边 Menger 数, 23
~边转发指数, 182
~独立数, 12
~关于 ℓ 的边 Menger 数, 233
~关于 ℓ 的 Menger 数, 227
~关于 ℓ 的 (x,y) 边 Menger 数, 231
~关于 ℓ 的 (x,y)-Menger 数, 221
~交叉数, 15
~距离独立数, 265
~距离控制数, 265
~控制数, 12
~λ_r 原子数, 275
~ℓ 独立数, 265
~ℓ 控制数, 265

~(ℓ, w) 独立数, 259
~(ℓ, w) 控制数, 263
~Menger 数, 23
~匹配数, 12
~嵌入膨胀数, 14
~Rabin 数, 237
~原子数, 52
~转发指数, 173
~最小路由边转发指数, 182
~最小路由转发指数, 173
双环网, 136
~几乎紧优双环网, 147
~紧优双环网, 147
~k 紧优双环网, 147
~最优双环网, 147

通信模式, 7
图, 3
~变更图, 199
~边可迁图, 50
~边正则图, 7
~Cayley 图, 57
~点可迁图, 47
~Euler 图, 11
~非平凡图, 3
~Hamilton 图, 11
~可立方图, 102
~客图, 14
~空图, 3
~λ_r 图, 273
~λ_s'' 图, 293
~Petersen 图, 48
~平凡图, 3
~平面图, 14
~完全对换图, 189
~完全图, 4
~无向图, 3
~无爪图, 285
~线图, 33
~细分图, 7
~星, 4
~循环图, 47
~有向图, 3
~有向线图, 34
~有限图, 3
~爪, 285
~正则图, 7
~正则有向图, 8
~置换图, 300
~主图, 14
图的边数, 3
图的阶, 3
图的同构, 4
~保色自同构, 61
~图的同构映射, 4
~图的自同构, 47
图的同态, 13
图的运算, 6
~图的联, 7
~子图的并, 7
~子图的交, 7

网络, 5
~Beneš 网, 166
~超立方体网络, 95
~重格网, 158
~单环网, 10, 136
~de Brujin 网络, 112
~蝶形网, 162
~分布式双环计算机网, 136
~格网, 158
~环绕蝶形网, 164

~环网, 10
~互连网络, 5
~金字塔网, 158
~菊花链环网络, 136
~Kautz 网络, 127
~可重排网, 166
~立方连通圈网, 160
~Ω 网, 168
~前环后跳网, 136
~全连通网络, 5
~容错网络, 26
~双环网, 136
~树网络, 12
~网状网, 157
~网络拓扑, 5
~无向超环面网, 105
~线性阵列网, 10
~循环网, 150
移位交换网, 170
~有向超环面网, 106
~总线网, 10
完全对换图, 189
完全图, 4
~花状完全有向图, 39
~完全有向图, 4
围长, 9
无向边, 3
无向图, 3

相邻
~边相邻, 3
~顶点相邻, 3
相似
~边相似, 50
~点相似, 47
线图
~多重线图, 38
~无向图的线图, 33
~有向图的线图, 34
限制
~$\mathscr{R}$ 边割, 273
~$\mathscr{R}$ 边连通度, 273
~$\mathscr{R}$ 连通度, 271
~限制边割, 273
~限制边连通度, 273
~限制点割, 271
~限制连通度, 271
~限制容错直径, 271
细分
~边的细分, 7
~图的细分, 7
星, 4
循环图
~循环无向图, 48
~循环有向图, 47
系统, 4
~多处理系统, 4
~容错系统, 26

优图
~λ_r 非优图, 274
~λ_r 优图, 274
~λ''_s 非优图, 293
~λ''_s 优图, 293
有向
~有向边, 3
~有向回, 10
~有向迹, 10
~有向链, 10
~有向路, 10
~有向圈, 10
~有向图, 3

有向边, 3
~出边, 3
~对称边, 3
~入边, 3
有向图, 3
~对称有向图, 3
~反对称有向图, 3
~花状完全有向图, 39
~平衡有向图, 8
~完全有向图, 4
~循环有向图, 150
原子, 52
~负原子, 52
~λ_r 原子, 275
~λ_r 原子数, 275
~$\lambda_s^{(h)}$ 原子, 291
~原子分解定理, 53
~原子数, 52
~正原子, 52

爪, 285
~无爪图, 285
正则图, 7
~边正则图, 7
~正则有向图, 8
置换图, 300
直径, 16
~边容错直径, 204
~点容错直径, 212
~宽直径, 241
~w 宽直径, 241
~限制容错直径, 271
~直径持久度, 228
转发指数, 173
~边转发指数, 182
~(点)转发指数, 173
~最小路由边转发指数, 182
~最小路由转发指数, 173
子图, 6
~边不交子图, 7
~边导出子图, 6
~点不交子图, 7
~点导出子图, 6
~支撑子图, 6
~子图的并, 7
~子图的交, 7
最优
~w 优正则图, 244
~最优超边连通图, 288
~最优路由选择, 191
~最优 L 瓦, 138
~最优双环网, 147

《现代数学基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

1 数理逻辑基础（上册） 1981.1 胡世华、陆钟万 著
2 紧黎曼曲面引论 1981.3 伍鸿熙、吕以辇、陈志华 著
3 组合论（上册） 1981.10 柯召、魏万迪 著
4 数理统计引论 1981.11 陈希孺 著
5 多元统计分析引论 1982.6 张尧庭、方开泰 著
6 概率论基础 1982.8 严士健、王隽骧、刘秀芳 著
7 数理逻辑基础（下册） 1982.8 胡世华、陆钟万 著
8 有限群构造（上册） 1982.11 张远达 著
9 有限群构造（下册） 1982.12 张远达 著
10 环与代数 1983.3 刘绍学 著
11 测度论基础 1983.9 朱成熹 著
12 分析概率论 1984.4 胡迪鹤 著
13 巴拿赫空间引论 1984.8 定光桂 著
14 微分方程定性理论 1985.5 张芷芬、丁同仁、黄文灶、董镇喜 著
15 傅里叶积分算子理论及其应用 1985.9 仇庆久等 编
16 辛几何引论 1986.3 J.柯歇尔、邹异明 著
17 概率论基础和随机过程 1986.6 王寿仁 著
18 算子代数 1986.6 李炳仁 著
19 线性偏微分算子引论（上册） 1986.8 齐民友 著
20 实用微分几何引论 1986.11 苏步青等 著
21 微分动力系统原理 1987.2 张筑生 著
22 线性代数群表示导论（上册） 1987.2 曹锡华等 著
23 模型论基础 1987.8 王世强 著
24 递归论 1987.11 莫绍揆 著
25 有限群导引(上册) 1987.12 徐明曜 著
26 组合论（下册） 1987.12 柯召、魏万迪 著
27 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用 1988.1 李忠 著
28 代数体函数与常微分方程 1988.2 何育赞 著
29 同调代数 1988.2 周伯壎 著

30 近代调和分析方法及其应用 1988.6 韩永生 著
31 带有时滞的动力系统的稳定性 1989.10 秦元勋等 编著
32 代数拓扑与示性类 1989.11 马德森著 吴英青、段海鲍译
33 非线性发展方程 1989.12 李大潜、陈韵梅 著
34 反应扩散方程引论 1990.2 叶其孝等 著
35 仿微分算子引论 1990.2 陈恕行等 编
36 公理集合论导引 1991.1 张锦文 著
37 解析数论基础 1991.2 潘承洞等 著
38 拓扑群引论 1991.3 黎景辉、冯绪宁 著
39 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组 1991.4 陈亚浙、吴兰成 著
40 黎曼曲面 1991.4 吕以辇、张学莲 著
41 线性偏微分算子引论（下册） 1992.1 齐民友 著
42 复变函数逼近论 1992.3 沈燮昌 著
43 Banach 代数 1992.11 李炳仁 著
44 随机点过程及其应用 1992.12 邓永录等 著
45 丢番图逼近引论 1993.4 朱尧辰等 著
46 线性微分方程的非线性扰动 1994.2 徐登洲、马如云 著
47 广义哈密顿系统理论及其应用 1994.12 李继彬、赵晓华、刘正荣 著
48 线性整数规划的数学基础 1995.2 马仲蕃 著
49 单复变函数论中的几个论题 1995.8 庄圻泰 著
50 复解析动力系统 1995.10 吕以辇 著
51 组合矩阵论 1996.3 柳柏濂 著
52 Banach 空间中的非线性逼近理论 1997.5 徐士英、李冲、杨文善 著
53 有限典型群子空间轨道生成的格 1997.6 万哲先、霍元极 著
54 实分析导论 1998.2 丁传松等 著
55 对称性分岔理论基础 1998.3 唐云 著
56 Gel'fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用 1998.10 乐茂华 著
57 半群的 S-系理论 1999.2 刘仲奎 著
58 有限群导引(下册) 1999.5 徐明曜等 著
59 随机模型的密度演化方法 1999.6 史定华 著
60 非线性偏微分复方程 1999.6 闻国椿 著
61 复合算子理论 1999.8 徐宪民 著
62 离散鞅及其应用 1999.9 史及民 编著
63 调和分析及其在偏微分方程中的应用 1999.10 苗长兴 著

64 惯性流形与近似惯性流形 2000.1 戴正德、郭柏灵 著
65 数学规划导论 2000.6 徐增堃 著
66 拓扑空间中的反例 2000.6 汪林、杨富春 编著
67 拓扑空间论 2000.7 高国士 著
68 非经典数理逻辑与近似推理 2000.9 王国俊 著
69 序半群引论 2001.1 谢祥云 著
70 动力系统的定性与分支理论 2001.2 罗定军、张祥、董梅芳 编著
71 随机分析学基础（第二版） 2001.3 黄志远 著
72 非线性动力系统分析引论 2001.9 盛昭瀚、马军海 著
73 高斯过程的样本轨道性质 2001.11 林正炎、陆传荣、张立新 著
74 数组合地图论 2001.11 刘彦佩 著
75 光滑映射的奇点理论 2002.1 李养成 著
76 动力系统的周期解与分支理论 2002.4 韩茂安 著
77 神经动力学模型方法和应用 2002.4 阮炯、顾凡及、蔡志杰 编著
78 同调论——代数拓扑之一 2002.7 沈信耀 著
79 金兹堡-朗道方程 2002.8 郭柏灵等 著
80 排队论基础 2002.10 孙荣恒、李建平 著
81 算子代数上线性映射引论 2002.12 侯晋川、崔建莲 著
82 微分方法中的变分方法 2003.2 陆文端 著
83 周期小波及其应用 2003.3 彭思龙、李登峰、谌秋辉 著
84 集值分析 2003.8 李雷、吴从炘 著
85 数理逻辑引论与归结原理 2003.8 王国俊 著
86 强偏差定理与分析方法 2003.8 刘文 著
87 椭圆与抛物型方程引论 2003.9 伍卓群、尹景学、王春朋 著
88 有限典型群子空间轨道生成的格（第二版） 2003.10 万哲先、霍元极 著
89 调和分析及其在偏微分方程中的应用（第二版） 2004.3 苗长兴 著
90 稳定性和单纯性理论 2004.6 史念东 著
91 发展方程数值计算方法 2004.6 黄明游 编著
92 传染病动力学的数学建模与研究 2004.8 马知恩、周义仓、王稳地、靳 祯 著
93 模李超代数 2004.9 张永正、刘文德 著
94 巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用 2005.1 王玉文 著
95 巴拿赫空间结构和算子理想 2005.3 钟怀杰 著
96 脉冲微分系统引论 2005.3 傅希林、闫宝强、刘衍胜 著
97 代数学中的Frobenius结构 2005.7 汪明义 著

98 生存数据统计分析 2005.12 王启华 著
99 数理逻辑引论与归结原理(第二版) 2006.3 王国俊 著
100 数据包络分析 2006.3 魏权龄 著
101 代数群引论 2006.9 黎景辉 陈志杰 赵春来 著
102 矩阵结合方案 2006.9 王仰贤 霍元极 麻常利 著
103 椭圆曲线公钥密码导引 2006.10 祝跃飞 张亚娟 著
104 凝固过程动力学与交界面稳定性引论 2006.12 徐鉴君 著
105 椭圆与超椭圆曲线公钥密码的理论与实现 2006.12 王学理 裴定一 著
106 非线性演化方程的稳定性与分歧 2007.4 马天 汪宁宏 著
107 正规族理论及其应用 2007.4 顾永兴 庞学诚 方明亮 著
108 组合网络理论 2007.5 徐俊明 著

(O-2723.0101)


ISBN 978-7-03-018834-2

销售分类建议：高等数学

定 价：49.00 元